Christian Mathissen
Johannisgasse 26, Zi. 3-33, Tel. 97-32285
mathissen@informatik.uni-leipzig.de

WS 07/08
Institut für Informatik
Universität Leipzig

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Modelle nebenläufiger Prozesse: Spurtheorie“

Das Übungsblatt ist zu finden unter www.informatik.uni-leipzig.de/~mathissen. Die Aufgaben sind bis zur Übung am 8. November 2007 vorzubereiten und werden von Ihnen dort an der Tafel vorgestellt.

Das *direkte Produkt* $M_1 \times M_2$ zweier Monoide M_1, M_2 ist das kartesische Produkt der Trägermengen versehen mit der komponentenweisen Multiplikation.

Aufgabe 2-1. Zeigen Sie: Jede endliche Semigruppe $S \neq \emptyset$ besitzt ein idempotentes Element.

Aufgabe 2-2. Sei M ein Monoid sowie $(\sim_i,\ i \in \mathbb{N})$ eine Familie von Kongruenzen auf M. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sim_i$ ist eine Kongruenz auf M.

b) $\sim_1 \cup \sim_2$ ist eine Kongruenz auf M.

c) Ist $\sim_1 \subseteq \sim_2$ so gibt es einen Epimorphismus $f : M/\sim_1 \to M/\sim_2$.

d) Sei $\approx$ eine Kongruenz auf $M/\sim_1$ dann gibt es eine Kongruenz $\sim$ auf M, so dass $M/\sim$ und $(M/\sim_1)/\approx$ isomorph sind.

Aufgabe 2-3. Sei $(\mathbb{N}, +)$ das Monoid der natürlichen Zahlen und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die kleinste Kongruenz $\sim$ mit $(n_1, n_2) \in \sim$. Bildet die Teilmenge $U = \{[n]_\sim \mid n \geq n_1\} \subseteq \mathbb{N}/\sim$ ein Monoid? Wann ist U ein Untermonoid von $\mathbb{N}/\sim$?

Aufgabe 2-4. Sei A ein Alphabet und $D \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen $A_1, \ldots, A_n$. Zeigen Sie, dass das Spurmonoid $M(A, D^C)$ isomorph zu $A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ ist (d.h. endliche direkte Produkte endlich erzeugter freier Monoide sind Spurmonoide).

Aufgabe 2-5. Seien (A_1, D_1) und (A_2, D_2) disjunkte Abhängigkeitsalphabete. Zeigen Sie, dass $(A_1 \cup A_2, D_1 \cup D_2)$ ein Abhängigkeitsalphabet und $M(A_1, D_1^C) \times M(A_2, D_2^C)$ isomorph zu $M(A_1 \cup A_2, (D_1 \cup D_2)^C)$ ist.

Aufgabe 2-6. Ein ungerichteter Graph (V, E) heißt *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei verschiedenen Ecken $v, v' \in V$ eine Folge von Ecken $v_1, \ldots, v_n$ und eine Folge von Kanten $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n) \in E$ mit $v_1 = v$ und $v_n = v'$ gibt. Zeigen Sie: Ein Graph $G = (V, E)$ ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn es disjunkte, nichtleere Mengen $V_1, V_2 \subseteq V$ mit $V_1 \cup V_2 = V$ und $(V_1 \times V_2) \cap E = \emptyset$ gibt.

Corrigendum: In Aufgabe 1-3 b) sollte es heißen: „... die größte in eSe enthalten Gruppe *mit e als Eins.*“. Zur Problematik siehe auch Aufgabe 2-3.