# Statistik für Digital Humanities

## Multivariate Analysis of Variance (MANOVA)

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
**Universität Leipzig**

06. Juli 2020

[Letzte Aktualisierung: 05/07/2020, 11:54]

# Anküpfungspunkt t-Test & ANOVA

- ANOVA untersucht Unterschiede einer abhängigen Variable bei mehreren Gruppen
- MANOVA untersucht Unterschiede mehrerer abhängiger Variablen (Outcomes)

- ANOVA: univariat
- MANOVA: multivariat
- Prinzipien von ANOVA übertragbar (Faktoren, unabhängig/abhängig, Post Hoc, Kontraste, Interaktion)
- Folgeanalysen mittels ANOVA oder Diskriminantenanalyse (Siehe Moodle)

Warum nicht mehrere ANOVA durchführen?

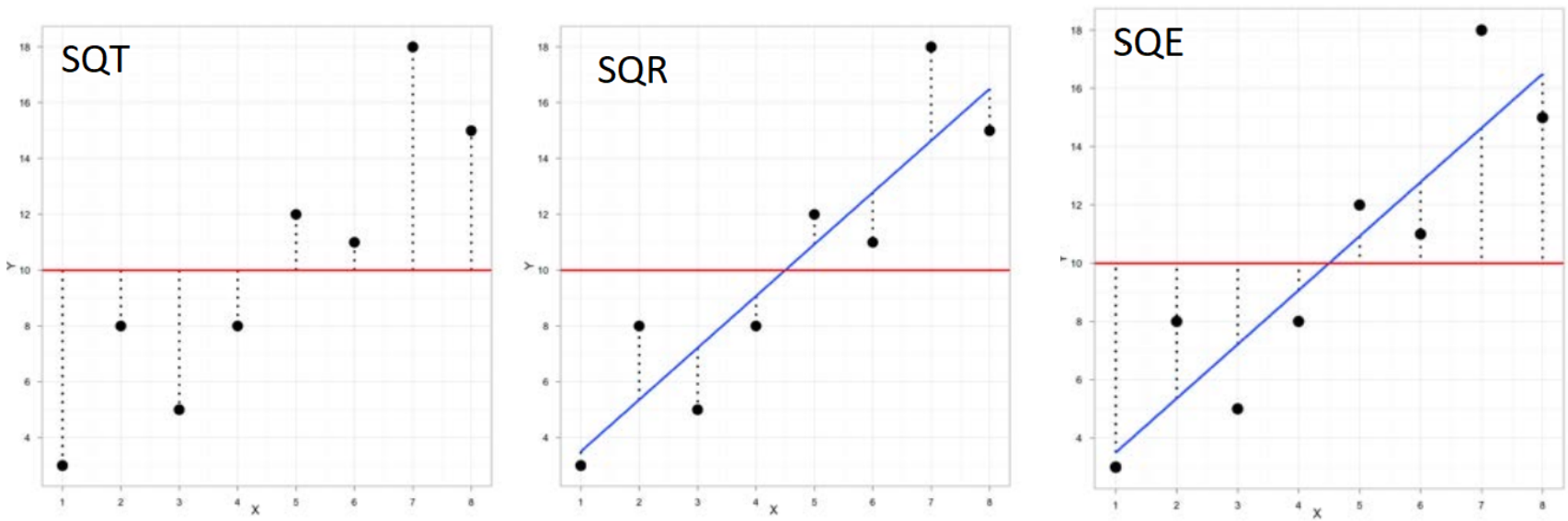
# Warum nicht mehrere ANOVA durchführen?

- Problem: familienbezogene / experimentbezogene Fehlerrate $1 - (1 - \alpha)^k$ mit $k =$ *Anzahl der Kombinationen* $\alpha$ ist die Typ 1 Fehlerwahrscheinlichkeit →Siehe ANOVA
- MANOVA betrachtet alle abhängigen Variablen, während jede ANOVA nur je eine betrachten würde
  - → MANOVA erlaubt Aussagen über Kombinationen der Outcomes
  - → exakter Zusammenhang zwischen Korrelation der Outcomes und Aussagekraft der MANOVA strittig
  - → → Cole & Maxwell & Arvey & Salas (1994): *How the power of MANOVA can both increase and decrease as a function of the intercorrelations between the dependent variables*
  - → Einschätzung der Aussagekraft (Power) bzgl. Interkorrelation generell schwierig, also am besten Vergleichsarbeiten suchen

# Berechnung

Wiederholung ANOVA:

- $F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{Systematische\ \ Variation}{Unsystematische\ \ Variation}$
- $MQE = \frac{SQE}{k-1}$
- $MQR = \frac{SQR}{n-k}$
- $k =$ Anzahl der Gruppen




Bei MANOVA ersetzen wir *einfach* Zahlen der univariaten ANOVA Analyse mit Matrizen

# Berechnung

MANOVA:

- Signifikanzmatrix $HE^{-1} = H * E^{-1} = \frac{H}{E} = \frac{Systematische\ \ Variation}{Unsystematische\ \ Variation}$
  Matrixdivision ist Multiplikation der inversen Matrix
- $H = SQKPE$ = Quadratsummenkreuzproduktmatrix erklärt Hypothesenmatrix
- $E = SQKPR$ = Quadratsummenkreuzproduktmatrix der Residuen Errormatrix

# Quadratsummenkreuzproduktmatrix

$SQKP* =$

| | Variable 1 | Variable 2 | ... |
|---|---|---|---|
| Variable 1 | SQ* | KP* | ... |
| Variable 2 | KP* | SQ* | ... |
| ... | ... | ... | ... |

- $SQT$,$SQR$,$SQE$ analog zu vorher
- $KPT = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i,var1} - \overline{x_{var1}}\right) * \left(x_{i,var2} - \overline{x_{var2}}\right) * \ldots$
- $KPE = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{x_{group,var1}} - \overline{x_{var1}}\right) * \left(\overline{x_{group,var2}} - \overline{x_{var2}}\right) * \ldots$
- $KPR = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i,var1} - \overline{x_{group,var1}}\right) * \left(x_{i,var2} - \overline{x_{group,var2}}\right) * \ldots$

Überprüfung per $SQT = SQR + SQE$
Überprüfung per $KPT = KPR + KPE$
Überprüfung per $SQKPT = SQKPR + SQKPE$

# Beispiel

Zeichenlänge des Dokumententitels und Dokumentes pro Autor

| Autor 1 Titel | Dokument | Autor 2 Titel | Dokument |
|---|---|---|---|
| 35 | 250 | 20 | 400 |
| 35 | 280 | 30 | 170 |
| 50 | 400 | 40 | 300 |

$\overline{Titel} = 35 \quad \overline{Dokument} = 300$

$\overline{Autor1, Titel} = 40 \quad \overline{Autor2, Titel} = 30$

$\overline{Autor1, Dokument} = 310 \quad \overline{Autor2, Dokument} = 290$

# Beispiel

$\overline{T} = 35 \quad \overline{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$

| A1 T | D | $T - \overline{T}$ | $D - \overline{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 T | D | $T - \overline{T}$ | $D - \overline{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$SQT_T = 0 + 0 + 15^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + 5^2 = 500$
$SQT_D = (-50)^2 + (-20)^2 + 100^2 + 100^2 + (-130)^2 + 0 = 39800$
$KPT = 0 + 0 + (15 * 100) + (-15 * 100) + (-5 * -130) + 0 = 650$

$SQKPT =$

| | T | D |
|---|---|---|
| T | 500 | 650 |
| D | 650 | 39800 |

# Beispiel

$\overline{T} = 35 \quad \overline{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$

| A1 T | D | $T - \overline{T}$ | $D - \overline{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 T | D | $T - \overline{T}$ | $D - \overline{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$SQE_T = 3 * (40 - 35)^2 + 3 * (30 - 35)^2 = 150$

$SQE_D = 3 * (310 - 300)^2 + 3 * (290 - 300)^2 = 600$

$KPE = 3 * (40 - 35) * (310 - 300) + 3 * (30 - 35) * (290 - 300) = 300$

$SQKPE =$

| | T | D |
|---|---|---|
| T | 150 | 300 |
| D | 300 | 600 |

# Beispiel

$\overline{T} = 35 \quad \overline{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$

| A1 T | D | $T - \overline{T}$ | $D - \overline{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 250 | 0 | -50 | 5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | 5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 20 | 90 |

| A2 T | D | $T - \overline{T}$ | $D - \overline{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 400 | -15 | 100 | -20 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | -10 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 0 | 10 |

$SQR_T = (35 - 40)^2 + (35 - 40)^2 + (50 - 40)^2 + (20 - 30)^2 + 0 + (40 - 30)^2 = 350$

$SQR_D = (250 - 310)^2 + (280 - 310)^2 + (400 - 310)^2 + (400 - 290)^2 + (170 - 290)^2 + (300 - 290)^2 = 39200$

$KPR = (35 - 40) * (250 - 310) + (35 - 40) * (280 - 310) + (50 - 40) * (400 - 310) + (20 - 30) * (400 - 290) + 0 + (40 - 30) * (300 - 290) = 350$

$SQKPR =$

| | T | D |
|---|---|---|
| T | 350 | 350 |
| D | 350 | 39200 |

# Beispiel

$E = SQKPR =$

| | T | D |
|---|---|---|
| T | 350 | 350 |
| D | 350 | 39200 |

$H = SQKPE =$

| | T | D |
|---|---|---|
| T | 150 | 300 |
| D | 300 | 600 |

$HE^{-1} = H * E^{-1}$ //Lösung via $R$

```
E <- matrix( c(350,350,
               350,39200
               ), nrow=2, byrow=TRUE)
H <- matrix( c( 150,300,
               300,600
                ), nrow=2, byrow=TRUE)
H %*% solve(E)
```

$HE^{-1} =$

| | |
|---|---|
| 0.440 | -0.012 |
| -0.880 | 0.023 |

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen
deshalb . . .

# Diskriminante Funktionsvariate

$HE^{-1} =$

| | |
|---|---|
| 0.440 | -0.012 |
| -0.880 | 0.023 |

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen
deshalb ...

- Eigenvektoren als Diskriminante Funktionsvariate
  - → Lineare Funktionen, die auf Basis des Outcomes die Prädiktoren (Gruppen) vorhersagt / diskriminiert
  - → Jede Variate ist ein multiples Regressionsmodell mit den Outcomes als Prädiktoren und Elementen der Eigenvektoren als Regressionskoeffizienten
  - → mehrere möglich
- Eigenwerte $\lambda$ (aus den Eigenvektoren)
- Berechnung komplex und unnötig, also per R-Skript

```
A <- H %*% solve(E)
ev <- eigen(A)
ev$values
[1] 0.432432 -8.673617e-19    <---Eigenwerte der beiden Variaten
```

Eigenwerte entsprechen konzeptionell F-Werten bei ANOVA, müssen aber noch transformiert werden ...

# Transformation der Eigenwerte

- Pillai-Bartlett Trace
- Hotelling's $T^2$
- Wilk's Lambda
- Roy's Largest Root

# Pillai(-Bartlett) Trace

- $V = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$ mit $s$ =Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{\textit{Erklärte Variation}}{\textit{Totale Variation}} = \frac{SQE}{SQT} = R^2$

Beispiel:
*Eigenwerte* : 0.432 *und* 0
$\frac{0.432}{1.432} + 0 = 0.302$

# Hotelling's $T^2$

- $T^2 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$ mit $s$ =Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{Erklärte\ \ Variation}{Unerklärte\ \ Variation} = \frac{SQE}{SQR} = F$

Beispiel:
*Eigenwerte* : 0.432 *und* 0
$0.432 + 0 = 0.432$

# Wilk's Lambda

- $\Delta = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+\lambda_i}$ mit $s$ =Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{Unerklärte\ \ Variation}{Totale\ \ Variation} = \frac{SQR}{SQT}$
- Kleine Werte zeigen höhere Signifikanz

Beispiel:
*Eigenwerte* : 0.432 *und* 0
$\frac{1}{1.432} * \frac{1}{1} = 0.698$

# Roy's Largest Root

- $\Theta = max(\lambda)$
- manchmal auch $\Theta = \frac{max(\lambda)}{1+max(\lambda)}$, aber nicht in R
- entspricht $\frac{Erklärte\ \ Variation}{Unerklärte\ \ Variation} = \frac{SQE}{SQR} = F$ der ersten (einflussreichsten) Variate
- Oft am aussagekräftigsten, da es den maximalen Effekt beschreibt

Beispiel:
*Eigenwerte* : 0.432 *und* 0
$\rightarrow$ 0.432

# Aussagekraft

- Bei kleinen Stichproben wenig Unterschied
- Wenn die erste Variate sehr viel größer ist $\rightarrow$Roy $>$ Hotelling$>$ Wilk$>$ Pillai
- Wenn Effekte sich eher gleichmäßig verteilen$\rightarrow$Roy $<$ Hotelling$<$ Wilk$<$ Pillai
  Olson (1974): *Comparative robustness of six tests in multivariate analysis of variance*
  Olson (1976): *On choosing a test statistic in multivariate analysis of variance*
  Olson (1979): *Practical considerations in choosing a MANOVA test statistic*
- Generell weniger als 10 Outcomegruppen empfehlenswert
  Stevens (1980): *Power of the multivariate analysis of variance*

# Grundannahmen

Annahmen von ANOVA plus

- Unabhängige Beobachtungen
- Randomisierte Stichproben
- mindestens intervallskaliert Daten
- Multivariate Normalverteilung
  - → Outcomes in Gruppen normalverteilt
  - → → Multivariater Shapiro Test
- Homogenität der Varianz-Kovarianz Matrix
  - → → Homogene Korrelationen sämtlicher Paare von Outcomegruppen und homogene Varianzen der Outcomegruppen
  - → Box's Test nicht signifikant → Gut
  - → aber Box's Test gilt als unzuverlässig
  - → bei gleichen Gruppengrößen (und v.a. 2 Gruppen) kann Hotelling und Pillai eher robust angesehen werden
  - → bei unterschiedlichen Gruppengrößen könnte man zufällige Einträge in den größeren Gruppen löschen

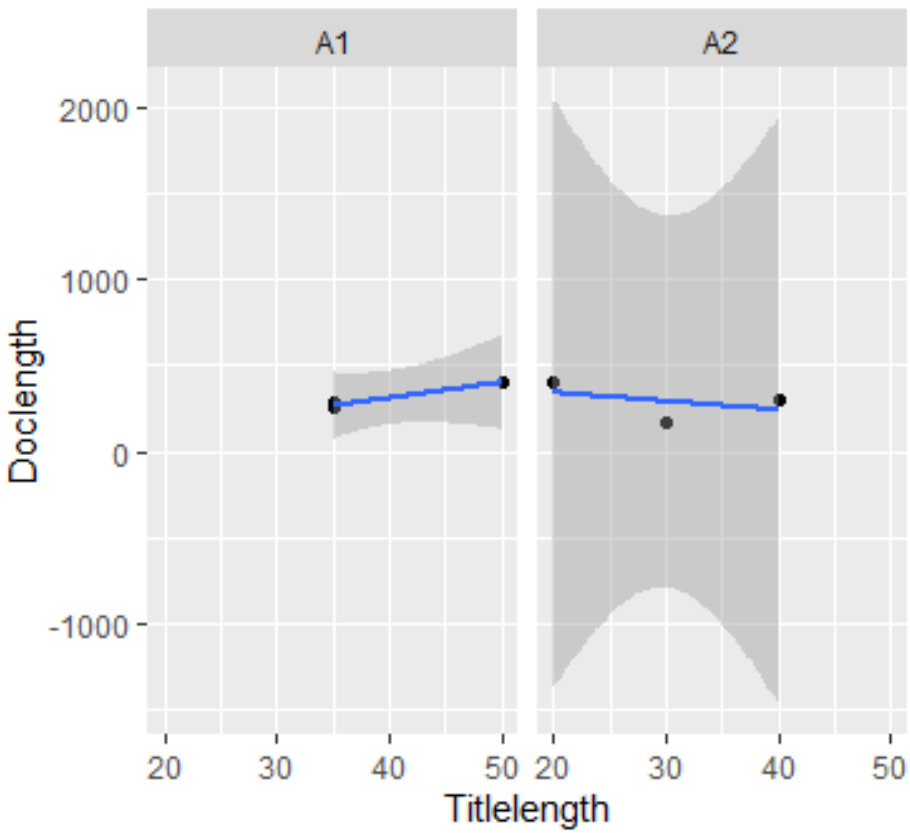
# Robustheit

- Relativ robust gegenüber Verletzung der Multivariaten Normalverteilung
- Roy nicht robust gegenüber heterogenen Varianz-Kovarianz Matrizen
- Bei gleichen Gruppengrößen Pillai am robustesten
- . . . sonst Pillai anfällig für heterogene Varianz-Kovarianz Matrizen und Verletzung der Multivariaten Normalverteilung

Daumenregel:
Achte auf homogene Varianz-Kovarianz Matrizen und multivariate Normalverteilung und verwende Pillai (oder Roy wenn fast nur 1 Variate Einfluss hat)

# MANOVA in R

```
library(ggplot2)
Group<-gl(2, 3, labels = c("A1", "A2"))
Titlelength<-c(35,35,50,20,30,40)
Doclength<-c(250,280,400,400,170,300)
df<-data.frame(Group, Titlelength, Doclength)
scatter <- ggplot(df, aes(Titlelength, Doclength))
scatter + geom_point() + geom_smooth(method = "lm") + facet_wrap(~Group, ncol = 2)
```



# MANOVA in R

```
library(pastecs)
Group<-gl(2, 3, labels = c("A1", "A2"))
Titlelength<-c(35,35,50,20,30,40)
Doclength<-c(250,280,400,400,170,300)
df<-data.frame(Group, Titlelength, Doclength)
by(df[,2:3],df$Group, cov)
```

```
df$Group: A1
            Titlelength Doclength
Titlelength          75       675 //Diagonal Varianzen
Doclength           675      6300 //Nichtdiagonal Kovarianzen
-----------------------------------//der Outcomes nach Gruppen
df$Group: A2
            Titlelength Doclength
Titlelength         100      -500
Doclength          -500     13300
```

Die Werte sind hier stark unterschiedlich (aber immerhin sind die Gruppenzahlen gleich)

# MANOVA in R

```
library(mvnormtest)
Group<-gl(2, 3, labels = c("A1", "A2"))
Titlelength<-c(35,35,50,20,30,40)
Doclength<-c(250,280,400,400,170,300)
df<-data.frame(Group, Titlelength, Doclength)
a1t<-t(df[1:3, 2:3])
a2t<-t(df[4:6, 2:3])
mshapiro.test(a1t)
mshapiro.test(a2t)

        Shapiro-Wilk normality test
data:  Z
W = 0.8, p-value <2e-16

        Shapiro-Wilk normality test
data:  Z
W = 0.8, p-value <2e-16 //Deutliche Abweichung von multivariater Normalverteilung -
```

# MANOVA in R

```
...df Siehe vorher
outcome<-cbind(df$Titlelength, df$Doclength)
model<-manova(outcome ~ Group, data = df)
summary(model, intercept = TRUE)
summary(model, intercept = TRUE, test = "Wilks")
summary(model, intercept = TRUE, test = "Hotelling")
summary(model, intercept = TRUE, test = "Roy")

            Df  Pillai approx F num Df den Df   Pr(>F)
(Intercept)  1 0.96955   47.768      2      3 0.005312 **
Group        1 0.30189    0.649      2      3 0.583296   //Default = Pillai
Residuals    4

Group        1 0.69811  0.649       2       3 0.583296 //Wilks
Group        1 0.432    0.649       2       3 0.583296 //Hotelling-Lawley
Group        1 0.432    0.649       2       3 0.583296 //Roy
```

Und es kamen tatsächlich dieselben Werte heraus 

# Zusammenfassung

- MANOVA ist ein multi-multiples Regressionsmodell mit vertauschtem Outcome und Prädiktoren zur Untersuchung der Outcomes auf signifikante Unterschiede
- Berechnung analog zu ANOVA aber über Matrizen
- Eigenvektoren und -werte
- Transformation mittels Pillai-Bartlett Trace, Hotelling's $T^2$, Wilk's Lambda, Roy's Largest Root
- Grundannahmen, insbesondere homogene Varianz-Kovarianz Matrizen und multivariate Normalverteilung
- Folgeanalysen mittels ANOVA oder Diskriminantenanalyse (Siehe Moodle)
- Aufwand und Fehlerpotential nicht unterschätzen
- Robust: Wilcox (2005)