

Statistik für Digital Humanities

Multivariate Analysis of Variance (MANOVA)

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

06. Juli 2020

[Letzte Aktualisierung: 05/07/2020, 11:54]

- 1 Was ist MANOVA?
- 2 Berechnung
 - Signifikanzmatrix
 - Transformation der Eigenwerte
- 3 Grundannahmen
- 4 Robustheit
- 5 MANOVA in R

- ANOVA untersucht Unterschiede einer abhängigen Variable bei mehreren Gruppen

- ANOVA untersucht Unterschiede einer abhängigen Variable bei mehreren Gruppen
- MANOVA untersucht Unterschiede mehrerer abhängiger Variablen (Outcomes)
- ANOVA: univariat

- ANOVA untersucht Unterschiede einer abhängigen Variable bei mehreren Gruppen
- MANOVA untersucht Unterschiede mehrerer abhängiger Variablen (Outcomes)
- ANOVA: univariat
- MANOVA: multivariat
- Prinzipien von ANOVA übertragbar (Faktoren, unabhängig/abhängig, Post Hoc, Kontraste, Interaktion)
- Folgeanalysen mittels ANOVA oder Diskriminantenanalyse (Siehe Moodle)

- ANOVA untersucht Unterschiede einer abhängigen Variable bei mehreren Gruppen
- MANOVA untersucht Unterschiede mehrerer abhängiger Variablen (Outcomes)
- ANOVA: univariat
- MANOVA: multivariat
- Prinzipien von ANOVA übertragbar (Faktoren, unabhängig/abhängig, Post Hoc, Kontraste, Interaktion)
- Folgeanalysen mittels ANOVA oder Diskriminantenanalyse (Siehe Moodle)

Warum nicht mehrere ANOVA durchführen?

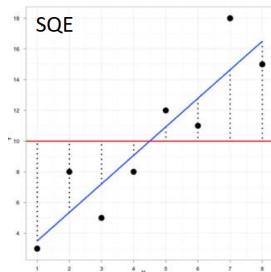
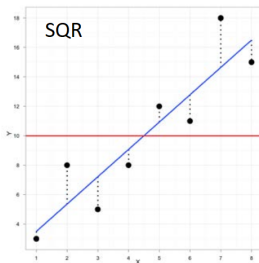
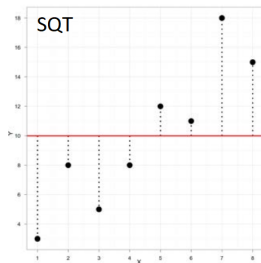
Warum nicht mehrere ANOVA durchführen?

- Problem: familienbezogene / experimentbezogene Fehlerrate $1 - (1 - \alpha)^k$ mit $k = \text{Anzahl der Kombinationen}$ α ist die Typ 1 Fehlerwahrscheinlichkeit → Siehe ANOVA
- MANOVA betrachtet alle abhängigen Variablen, während jede ANOVA nur je eine betrachten würde
 - MANOVA erlaubt Aussagen über Kombinationen der Outcomes
 - exakter Zusammenhang zwischen Korrelation der Outcomes und Aussagekraft der MANOVA strittig
 - → Cole & Maxwell & Arvey & Salas (1994): *How the power of MANOVA can both increase and decrease as a function of the intercorrelations between the dependent variables*
 - Einschätzung der Aussagekraft (Power) bzgl. Interkorrelation generell schwierig, also am besten Vergleichsarbeiten suchen

- 1 Was ist MANOVA?
- 2 Berechnung
 - Signifikanzmatrix
 - Transformation der Eigenwerte
- 3 Grundannahmen
- 4 Robustheit
- 5 MANOVA in R

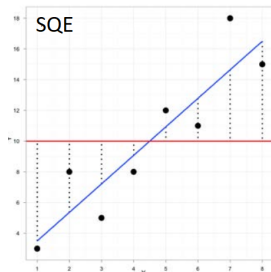
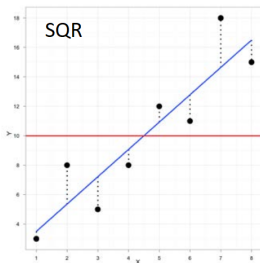
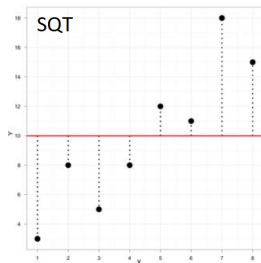
Wiederholung ANOVA:

- $F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{\text{Systematische Variation}}{\text{Unsystematische Variation}}$
- $MQE = \frac{SQE}{k-1}$
- $MQR = \frac{SQR}{n-k}$
- $k = \text{Anzahl der Gruppen}$



Wiederholung ANOVA:

- $F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{\text{Systematische Variation}}{\text{Unsystematische Variation}}$
- $MQE = \frac{SQE}{k-1}$
- $MQR = \frac{SQR}{n-k}$
- $k = \text{Anzahl der Gruppen}$



Bei MANOVA ersetzen wir *einfach* Zahlen der univariaten ANOVA Analyse mit Matrizen

MANOVA:

- Signifikanzmatrix $HE^{-1} = H * E^{-1} = \frac{H}{E} = \frac{\text{Systematische Variation}}{\text{Unsystematische Variation}}$
Matrixdivision ist Multiplikation der inversen Matrix
- $H = SQKPE$ = Quadratsummenkreuzproduktmatrix erklärt
Hypothesenmatrix
- $E = SQKPR$ = Quadratsummenkreuzproduktmatrix der Residuen
Errormatrix

Quadratsummenkreuzproduktmatrix

$$SQKP^* =$$

| | Variable 1 | Variable 2 | ... |
|------------|------------|------------|-----|
| Variable 1 | SQ* | KP* | ... |
| Variable 2 | KP* | SQ* | ... |
| ... | ... | ... | ... |

- SQT, SQR, SQE analog zu vorher
- $KPT = \sum_{i=1}^n (x_{i,var1} - \overline{x_{var1}}) * (x_{i,var2} - \overline{x_{var2}}) * \dots$
- $KPE = \sum_{i=1}^n (\overline{x_{group,var1}} - \overline{x_{var1}}) * (\overline{x_{group,var2}} - \overline{x_{var2}}) * \dots$
- $KPR = \sum_{i=1}^n (x_{i,var1} - \overline{x_{group,var1}}) * (x_{i,var2} - \overline{x_{group,var2}}) * \dots$

Quadratsummenkreuzproduktmatrix

$$SQKP^* =$$

| | Variable 1 | Variable 2 | ... |
|------------|------------|------------|-----|
| Variable 1 | SQ* | KP* | ... |
| Variable 2 | KP* | SQ* | ... |
| ... | ... | ... | ... |

- SQT, SQR, SQE analog zu vorher
- $KPT = \sum_{i=1}^n (x_{i,var1} - \bar{x}_{var1}) * (x_{i,var2} - \bar{x}_{var2}) * \dots$
- $KPE = \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{group,var1} - \bar{x}_{var1}) * (\bar{x}_{group,var2} - \bar{x}_{var2}) * \dots$
- $KPR = \sum_{i=1}^n (x_{i,var1} - \bar{x}_{group,var1}) * (x_{i,var2} - \bar{x}_{group,var2}) * \dots$

Überprüfung per $SQT = SQR + SQE$

Überprüfung per $KPT = KPR + KPE$

Überprüfung per $SQKPT = SQKPR + SQKPE$

Zeichenlänge des Dokumententitels und Dokumentes pro Autor

| Autor 1 | | Autor 2 | |
|---------|----------|---------|----------|
| Titel | Dokument | Titel | Dokument |
| 35 | 250 | 20 | 400 |
| 35 | 280 | 30 | 170 |
| 50 | 400 | 40 | 300 |

Zeichenlänge des Dokumententitels und Dokumentes pro Autor

| Autor 1 | | Autor 2 | |
|---------|----------|---------|----------|
| Titel | Dokument | Titel | Dokument |
| 35 | 250 | 20 | 400 |
| 35 | 280 | 30 | 170 |
| 50 | 400 | 40 | 300 |

$$\overline{\text{Titel}} = 35 \quad \overline{\text{Dokument}} = 300$$

Zeichenlänge des Dokumententitels und Dokumentes pro Autor

| Autor 1 | | Autor 2 | |
|---------|----------|---------|----------|
| Titel | Dokument | Titel | Dokument |
| 35 | 250 | 20 | 400 |
| 35 | 280 | 30 | 170 |
| 50 | 400 | 40 | 300 |

$$\overline{\text{Titel}} = 35 \quad \overline{\text{Dokument}} = 300$$

$$\overline{\text{Autor1, Titel}} = 40 \quad \overline{\text{Autor2, Titel}} = 30$$

$$\overline{\text{Autor1, Dokument}} = 310 \quad \overline{\text{Autor2, Dokument}} = 290$$

Beispiel

$$\bar{T} = 35 \quad \bar{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$$

| A1 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$$SQT_T = 0 + 0 + 15^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + 5^2 = 500$$

Beispiel

$$\bar{T} = 35 \quad \bar{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$$

| A1 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$$SQT_T = 0 + 0 + 15^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + 5^2 = 500$$

$$SQT_D = (-50)^2 + (-20)^2 + 100^2 + 100^2 + (-130)^2 + 0 = 39800$$

Beispiel

$$\bar{T} = 35 \quad \bar{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$$

| A1 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$$SQT_T = 0 + 0 + 15^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + 5^2 = 500$$

$$SQT_D = (-50)^2 + (-20)^2 + 100^2 + 100^2 + (-130)^2 + 0 = 39800$$

$$KPT = 0 + 0 + (15 * 100) + (-15 * 100) + (-5 * -130) + 0 = 650$$

Beispiel

$$\bar{T} = 35 \quad \bar{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$$

| A1 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$$SQT_T = 0 + 0 + 15^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + 5^2 = 500$$

$$SQT_D = (-50)^2 + (-20)^2 + 100^2 + 100^2 + (-130)^2 + 0 = 39800$$

$$KPT = 0 + 0 + (15 * 100) + (-15 * 100) + (-5 * -130) + 0 = 650$$

$$SQKPT =$$

| | T | D |
|---|-----|-------|
| T | 500 | 650 |
| D | 650 | 39800 |

Beispiel

$$\bar{T} = 35 \quad \bar{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$$

| A1 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
| 35 | 250 | 0 | -50 | -5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | -5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 10 | 90 |

| A2 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
| 20 | 400 | -15 | 100 | -10 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | 0 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 10 | 10 |

$$SQE_T = 3 * (40 - 35)^2 + 3 * (30 - 35)^2 = 150$$

$$SQE_D = 3 * (310 - 300)^2 + 3 * (290 - 300)^2 = 600$$

$$KPE = 3 * (40 - 35) * (310 - 300) + 3 * (30 - 35) * (290 - 300) = 300$$

$$SQKPE = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 150 & 300 \\ \hline D & 300 & 600 \\ \hline \hline \end{array}$$

Beispiel

$$\bar{T} = 35 \quad \bar{D} = 300 \quad \overline{A1, T} = 40 \quad \overline{A2, T} = 30 \quad \overline{A1, D} = 310 \quad \overline{A2, D} = 290$$

| A1 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A1, T}$ | $D - \overline{A1, D}$ |
| 35 | 250 | 0 | -50 | 5 | -60 |
| 35 | 280 | 0 | -20 | 5 | -30 |
| 50 | 400 | 15 | 100 | 20 | 90 |

| A2 | | | | | |
|----|-----|---------------|---------------|------------------------|------------------------|
| T | D | $T - \bar{T}$ | $D - \bar{D}$ | $T - \overline{A2, T}$ | $D - \overline{A2, D}$ |
| 20 | 400 | -15 | 100 | -20 | 110 |
| 30 | 170 | -5 | -130 | -10 | -120 |
| 40 | 300 | 5 | 0 | 0 | 10 |

$$SQR_T = (35 - 40)^2 + (35 - 40)^2 + (50 - 40)^2 + (20 - 30)^2 + 0 + (40 - 30)^2 = 350$$

$$SQR_D = (250 - 310)^2 + (280 - 310)^2 + (400 - 310)^2 + (400 - 290)^2 + (170 - 290)^2 + (300 - 290)^2 = 39200$$

$$KPR = (35 - 40) * (250 - 310) + (35 - 40) * (280 - 310) + (50 - 40) * (400 - 310) + (20 - 30) * (400 - 290) + 0 + (40 - 30) * (300 - 290) = 350$$

| | | |
|-----------|-------|-------|
| | T | D |
| $SQKPR =$ | T 350 | 350 |
| | D 350 | 39200 |

Beispiel

$$E = SQKPR = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 350 & 350 \\ \hline D & 350 & 39200 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$H = SQKPE = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 150 & 300 \\ \hline D & 300 & 600 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$HE^{-1} = H * E^{-1} // \text{Lösung via } R$$

Beispiel

$$E = SQKPR = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 350 & 350 \\ \hline D & 350 & 39200 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$H = SQKPE = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 150 & 300 \\ \hline D & 300 & 600 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$HE^{-1} = H * E^{-1} // \text{Lösung via } R$$

```
E <- matrix( c(350,350,
               350,39200
             ), nrow=2, byrow=TRUE)
H <- matrix( c( 150,300,
               300,600
             ), nrow=2, byrow=TRUE)
H %*% solve(E)
```


Beispiel

$$E = SQKPR = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 350 & 350 \\ \hline D & 350 & 39200 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$H = SQKPE = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 150 & 300 \\ \hline D & 300 & 600 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$HE^{-1} = H * E^{-1} // \text{Lösung via } R$$

```
E <- matrix( c(350,350,
               350,39200
             ), nrow=2, byrow=TRUE)
H <- matrix( c( 150,300,
               300,600
             ), nrow=2, byrow=TRUE)
H %*% solve(E)
```

$$HE^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.440 & -0.012 \\ \hline -0.880 & 0.023 \\ \hline \end{array}$$

Beispiel

$$E = SQKPR = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 350 & 350 \\ \hline D & 350 & 39200 \\ \hline \hline \hline \end{array}$$

$$H = SQKPE = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & T & D \\ \hline T & 150 & 300 \\ \hline D & 300 & 600 \\ \hline \hline \hline \end{array}$$

$$HE^{-1} = H * E^{-1} // \text{Lösung via } R$$

```
E <- matrix( c(350,350,
               350,39200
             ), nrow=2, byrow=TRUE)
H <- matrix( c( 150,300,
               300,600
             ), nrow=2, byrow=TRUE)
H %*% solve(E)
```

$$HE^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.440 & -0.012 \\ \hline -0.880 & 0.023 \\ \hline \hline \end{array}$$

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen 😞
deshalb ...

Diskriminante Funktionsvariate

$$HE^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.440 & -0.012 \\ \hline -0.880 & 0.023 \\ \hline \end{array}$$

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen 😞
deshalb ...

- Eigenvektoren als Diskriminante Funktionsvariate
 - Lineare Funktionen, die auf Basis des Outcomes die Prädiktoren (Gruppen) vorhersagt / diskriminiert
 - Jede Variate ist ein multiples Regressionsmodell mit den Outcomes als Prädiktoren und Elementen der Eigenvektoren als Regressionskoeffizienten
 - mehrere möglich

Diskriminante Funktionsvariate

$$HE^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.440 & -0.012 \\ \hline -0.880 & 0.023 \\ \hline \end{array}$$

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen 😞
deshalb ...

- Eigenvektoren als Diskriminante Funktionsvariate
 - Lineare Funktionen, die auf Basis des Outcomes die Prädiktoren (Gruppen) vorhersagt / diskriminiert
 - Jede Variate ist ein multiples Regressionsmodell mit den Outcomes als Prädiktoren und Elementen der Eigenvektoren als Regressionskoeffizienten
 - mehrere möglich
- Eigenwerte λ (aus den Eigenvektoren)

Diskriminante Funktionsvariate

$$HE^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.440 & -0.012 \\ \hline -0.880 & 0.023 \\ \hline \end{array}$$

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen 😞
deshalb ...

- Eigenvektoren als Diskriminante Funktionsvariate
 - Lineare Funktionen, die auf Basis des Outcomes die Prädiktoren (Gruppen) vorhersagt / diskriminiert
 - Jede Variate ist ein multiples Regressionsmodell mit den Outcomes als Prädiktoren und Elementen der Eigenvektoren als Regressionskoeffizienten
 - mehrere möglich
- Eigenwerte λ (aus den Eigenvektoren)
- Berechnung komplex und unnötig, also per R-Skript

```
A <- H %*% solve(E)
```

```
ev <- eigen(A)
```

```
ev$values
```

```
[1] 0.432432 -8.673617e-19 <---Eigenwerte der beiden Variaten
```

Diskriminante Funktionsvariate

$$HE^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.440 & -0.012 \\ \hline -0.880 & 0.023 \\ \hline \end{array}$$

wir können keine Matrix gegen einen Signifikanzwert vergleichen 😞
deshalb ...

- Eigenvektoren als Diskriminante Funktionsvariate
 - Lineare Funktionen, die auf Basis des Outcomes die Prädiktoren (Gruppen) vorhersagt / diskriminiert
 - Jede Variate ist ein multiples Regressionsmodell mit den Outcomes als Prädiktoren und Elementen der Eigenvektoren als Regressionskoeffizienten
 - mehrere möglich
- Eigenwerte λ (aus den Eigenvektoren)
- Berechnung komplex und unnötig, also per R-Skript

```
A <- H %*% solve(E)
```

```
ev <- eigen(A)
```

```
ev$values
```

```
[1] 0.432432 -8.673617e-19 <---Eigenwerte der beiden Variaten
```

Eigenwerte entsprechen konzeptionell F-Werten bei ANOVA, müssen aber noch transformiert werden ...

- Pillai-Bartlett Trace
- Hotelling's T^2
- Wilk's Lambda
- Roy's Largest Root

Pillai(-Bartlett) Trace

- $V = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$ mit s =Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{\text{Erklärte Variation}}{\text{Totale Variation}} = \frac{SQE}{SQT} = R^2$

Pillai(-Bartlett) Trace

- $V = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}$ mit s =Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{\text{Erklärte Variation}}{\text{Totale Variation}} = \frac{SQE}{SQT} = R^2$

Beispiel:

Eigenwerte : 0.432 und 0

$$\frac{0.432}{1.432} + 0 = 0.302$$

- $T^2 = \sum_{i=1}^s \lambda_i$ mit $s = \text{Anzahl der Variaten}$
- entspricht $\frac{\text{Erklärte Variation}}{\text{Unerklärte Variation}} = \frac{SQE}{SQR} = F$

- $T^2 = \sum_{i=1}^s \lambda_i$ mit $s = \text{Anzahl der Variaten}$
- entspricht $\frac{\text{Erklärte Variation}}{\text{Unerklärte Variation}} = \frac{SQE}{SQR} = F$

Beispiel:

Eigenwerte : 0.432 und 0

$$0.432 + 0 = 0.432$$

- $\Delta = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1+\lambda_i}$ mit s = Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{\text{Unerklärte Variation}}{\text{Totale Variation}} = \frac{SQR}{SQT}$
- Kleine Werte zeigen höhere Signifikanz

- $\Delta = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1+\lambda_i}$ mit s = Anzahl der Variaten
- entspricht $\frac{\text{Unerklärte Variation}}{\text{Totale Variation}} = \frac{SQR}{SQT}$
- Kleine Werte zeigen höhere Signifikanz

Beispiel:

Eigenwerte : 0.432 und 0

$$\frac{1}{1.432} * \frac{1}{1} = 0.698$$

- $\Theta = \max(\lambda)$
- manchmal auch $\Theta = \frac{\max(\lambda)}{1 + \max(\lambda)}$, aber nicht in R
- entspricht $\frac{\text{Erklärte Variation}}{\text{Unerklärte Variation}} = \frac{SQE}{SQR} = F$ der ersten (einflussreichsten) Variate
- Oft am aussagekräftigsten, da es den maximalen Effekt beschreibt

- $\Theta = \max(\lambda)$
- manchmal auch $\Theta = \frac{\max(\lambda)}{1 + \max(\lambda)}$, aber nicht in R
- entspricht $\frac{\text{Erklärte Variation}}{\text{Unerklärte Variation}} = \frac{SQE}{SQR} = F$ der ersten (einflussreichsten) Variate
- Oft am aussagekräftigsten, da es den maximalen Effekt beschreibt

Beispiel:

Eigenwerte : 0.432 und 0

→ 0.432

- Bei kleinen Stichproben wenig Unterschied
- Wenn die erste Variate sehr viel größer ist \rightarrow Roy $>$ Hotelling $>$ Wilk $>$ Pillai
- Wenn Effekte sich eher gleichmäßig verteilen \rightarrow Roy $<$ Hotelling $<$ Wilk $<$ Pillai
 - Olson (1974): *Comparative robustness of six tests in multivariate analysis of variance*
 - Olson (1976): *On choosing a test statistic in multivariate analysis of variance*
 - Olson (1979): *Practical considerations in choosing a MANOVA test statistic*
- Generell weniger als 10 Outcomegruppen empfehlenswert
 - Stevens (1980): *Power of the multivariate analysis of variance*

Annahmen von ANOVA plus

- Unabhängige Beobachtungen
- Randomisierte Stichproben
- mindestens intervallskaliert Daten
- Multivariate Normalverteilung
 - Outcomes in Gruppen normalverteilt
 - → Multivariater Shapiro Test
- Homogenität der Varianz-Kovarianz Matrix
 - → Homogene Korrelationen sämtlicher Paare von Outcomegruppen und homogene Varianzen der Outcomegruppen
 - Box's Test nicht signifikant → Gut
 - aber Box's Test gilt als unzuverlässig
 - bei gleichen Gruppengrößen (und v.a. 2 Gruppen) kann Hotelling und Pillai eher robust angesehen werden
 - bei unterschiedlichen Gruppengrößen könnte man zufällige Einträge in den größeren Gruppen löschen

- Relativ robust gegenüber Verletzung der Multivariaten Normalverteilung
- Roy nicht robust gegenüber heterogenen Varianz-Kovarianz Matrizen
- Bei gleichen Gruppengrößen Pillai am robustesten
- ... sonst Pillai anfällig für heterogene Varianz-Kovarianz Matrizen und Verletzung der Multivariaten Normalverteilung

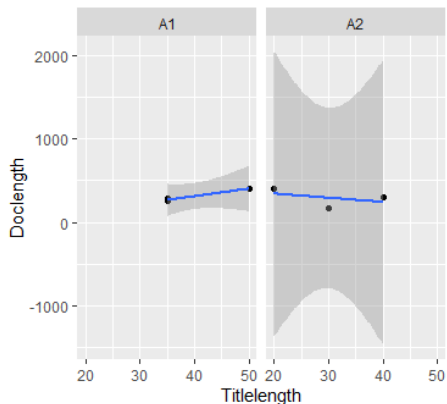
- Relativ robust gegenüber Verletzung der Multivariaten Normalverteilung
- Roy nicht robust gegenüber heterogenen Varianz-Kovarianz Matrizen
- Bei gleichen Gruppengrößen Pillai am robustesten
- ... sonst Pillai anfällig für heterogene Varianz-Kovarianz Matrizen und Verletzung der Multivariaten Normalverteilung

Daumenregel:

Achte auf homogene Varianz-Kovarianz Matrizen und multivariate Normalverteilung und verwende Pillai (oder Roy wenn fast nur 1 Variate Einfluss hat)

MANOVA in R

```
library(ggplot2)
Group<-gl(2, 3, labels = c("A1", "A2"))
Titlelength<-c(35,35,50,20,30,40)
Doclength<-c(250,280,400,400,170,300)
df<-data.frame(Group, Titlelength, Doclength)
scatter <- ggplot(df, aes(Titlelength, Doclength))
scatter + geom_point() + geom_smooth(method = "lm") + facet_wrap(~Group, ncol = 2)
```



MANOVA in R

```
library(pastecs)
Group<-gl(2, 3, labels = c("A1", "A2"))
Titlelength<-c(35,35,50,20,30,40)
Doclength<-c(250,280,400,400,170,300)
df<-data.frame(Group, Titlelength, Doclength)
by(df[,2:3],df$Group, cov)
```

df\$Group: A1

| | Titlelength | Doclength | |
|----------------------------------|-------------|-----------|-----------------------------|
| Titlelength | 75 | 675 | //Diagonal Varianzen |
| Doclength | 675 | 6300 | //Nichtdiagonal Kovarianzen |
| -----//der Outcomes nach Gruppen | | | |

df\$Group: A2

| | Titlelength | Doclength |
|-------------|-------------|-----------|
| Titlelength | 100 | -500 |
| Doclength | -500 | 13300 |

Die Werte sind hier stark unterschiedlich (aber immerhin sind die Gruppennzahlen gleich)

```
library(mvnormtest)
Group<-gl(2, 3, labels = c("A1", "A2"))
Titlelength<-c(35,35,50,20,30,40)
Doclength<-c(250,280,400,400,170,300)
df<-data.frame(Group, Titlelength, Doclength)
a1t<-t(df[1:3, 2:3])
a2t<-t(df[4:6, 2:3])
mshapiro.test(a1t)
mshapiro.test(a2t)
```

Shapiro-Wilk normality test

data: Z

W = 0.8, p-value <2e-16

Shapiro-Wilk normality test

data: Z

W = 0.8, p-value <2e-16 //Deutliche Abweichung von multivariater Normalverteilung -

```
...df Siehe vorher
outcome<-cbind(df$Titlelength, df$Doclength)
model<-manova(outcome ~ Group, data = df)
summary(model, intercept = TRUE)
summary(model, intercept = TRUE, test = "Wilks")
summary(model, intercept = TRUE, test = "Hotelling")
summary(model, intercept = TRUE, test = "Roy")
```

| | Df | Pillai | approx F | num Df | den Df | Pr(>F) | |
|-------------|----|---------|----------|--------|--------|----------|--------------------|
| (Intercept) | 1 | 0.96955 | 47.768 | 2 | 3 | 0.005312 | ** |
| Group | 1 | 0.30189 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Default = Pillai |
| Residuals | 4 | | | | | | |
| Group | 1 | 0.69811 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Wilks |
| Group | 1 | 0.432 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Hotelling-Lawley |
| Group | 1 | 0.432 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Roy |

```
...df Siehe vorher
outcome<-cbind(df$titlelength, df$doclength)
model<-manova(outcome ~ Group, data = df)
summary(model, intercept = TRUE)
summary(model, intercept = TRUE, test = "Wilks")
summary(model, intercept = TRUE, test = "Hotelling")
summary(model, intercept = TRUE, test = "Roy")
```

| | Df | Pillai | approx F | num Df | den Df | Pr(>F) | |
|-------------|----|---------|----------|--------|--------|----------|--------------------|
| (Intercept) | 1 | 0.96955 | 47.768 | 2 | 3 | 0.005312 | ** |
| Group | 1 | 0.30189 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Default = Pillai |
| Residuals | 4 | | | | | | |
| Group | 1 | 0.69811 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Wilks |
| Group | 1 | 0.432 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Hotelling-Lawley |
| Group | 1 | 0.432 | 0.649 | 2 | 3 | 0.583296 | //Roy |

Und es kamen tatsächlich dieselben Werte heraus



- MANOVA ist ein multi-multiples Regressionsmodell mit vertauschtem Outcome und Prädiktoren zur Untersuchung der Outcomes auf signifikante Unterschiede
- Berechnung analog zu ANOVA aber über Matrizen
- Eigenvektoren und -werte
- Transformation mittels Pillai-Bartlett Trace, Hotelling's T^2 , Wilk's Lambda, Roy's Largest Root
- Grundannahmen, insbesondere homogene Varianz-Kovarianz Matrizen und multivariate Normalverteilung
- Folgeanalysen mittels ANOVA oder Diskriminantenanalyse (Siehe Moodle)
- Aufwand und Fehlerpotential nicht unterschätzen
- Robust: Wilcox (2005)