Statistik für Digital Humanities

Lineare Regression

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

18. Mai 2020

[Letzte Aktualisierung: 17/05/2020, 22:15]

Überblick

Wiederholung Korrelation

Mögliche Beziehung zwischen Variablen

- positiv: Je höher x, desto höher y
  Übungszeit $\rightarrow$ Sprachverständnis
- nicht vorhanden: Kein Zusammenhang zwischen x und y
  Übungszeit $\rightarrow$ Anzahl Sonneneruptionen
- negativ: Je höher x desto niedriger y
  Übungszeit $\rightarrow$ Freizeit

Wiederholung Korrelation

Mögliche Beziehung zwischen Variablen

- positiv: Je höher x, desto höher y
  Übungszeit → Sprachverständnis
- nicht vorhanden: Kein Zusammenhang zwischen x und y
  Übungszeit → Anzahl Sonneneruptionen
- negativ: Je höher x desto niedriger y
  Übungszeit → Freizeit

2 wesentliche Beziehungsmaße

- Kovarianz
- Korrelation

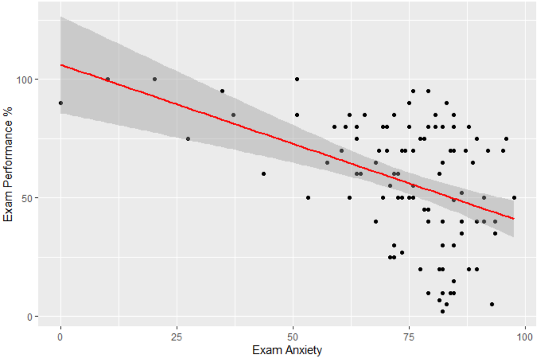
Regression

- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von unabhängigen Variablen
  - Step 1: Modellfitting auf Daten
  - Step 2: REGRESSION
  - Step 3: Outcome für neuen Prädiktor errechnet
- Wie viel Angst haben Studierende 10, 5 oder 2 Minuten vor der Prüfung?
- Wie viele Personen werden zu einer öffentlichen jährlich wiederholten Veranstaltung erwartet?
- Wie viele Alben verkaufen wir, wenn wir x Euro für Werbung ausgeben?

Regression

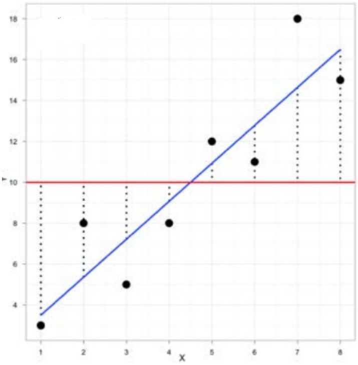
- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von unabhängigen Variablen
  - Step 1: Modellfitting auf Daten
  - Step 2: REGRESSION
  - Step 3: Outcome für neuen Prädiktor errechnet
- Wie viel Angst haben Studierende 10, 5 oder 2 Minuten vor der Prüfung?
- Wie viele Personen werden zu einer öffentlichen jährlich wiederholten Veranstaltung erwartet?
- Wie viele Alben verkaufen wir, wenn wir x Euro für Werbung ausgeben?
- Einfache Regression
  - 1 Prädiktor
- Multiple Regression
  - Mehr als 1 Prädiktor

Regressionsgerade




```
data<-read.delim("Exam Anxiety.dat", header=TRUE)
graph<-ggplot(data, aes(Anxiety, Exam))
graph + geom_point(method="lm") + geom_smooth() +
  labs(x = "Exam Anxiety", y = "Exam Performance %")
```

Regressionsgerade vs Mittelwert



Oversimplified:

Im Grunde versuchen wir die Mittelwertgerade zu kippen um dann y in Abhängigkeit von x zu berechnen statt immer dieselben y für alle x

Überblick

1. Was ist Regression?
2. Regression als Modell
   - Berechnung
   - Fitness
   - Fitness von Prädiktoren
   - Vorhersage per Regression
3. Multiple Regression
   - Berechnung
   - Fitness
   - Auswahl der Prädiktoren
4. Evaluation von Regressionen
   - Extremwerte
   - Einflusstarke Werte
   - Generalisierbarkeit

Ausflug Gerade Linien

Gerade Linien durch 2 Parameter bestimmt

- a: Schnittpunkt mit Y-Achse (Intercept)
- b: Winkel (Slope, Gradient)

$Y = a + b * X$

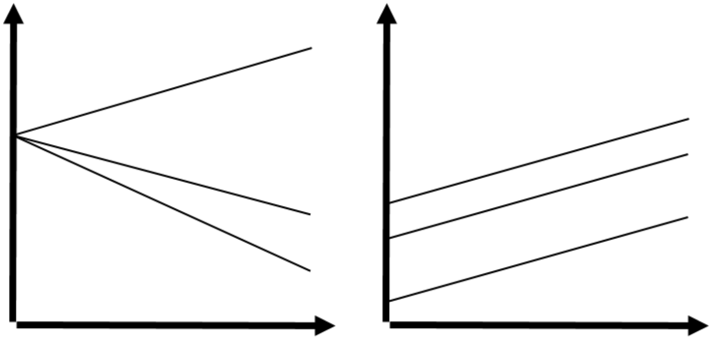
Ausflug Gerade Linien

Gerade Linien durch 2 Parameter bestimmt

- a: Schnittpunkt mit Y-Achse (Intercept)
- b: Winkel (Slope, Gradient)

$Y = a + b * X$

Gleicher Intercept vs. Gleicher Gradient



Regression als statistisches Modell

Kombiniere:

- $Ergebnis = Modell + Fehler$
- $Y = a + b * X$

Regression als statistisches Modell

Kombiniere:

- $Ergebnis = Modell + Fehler$
- $Y = a + b * X$

Regressionsformel

- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X)$

Regression als statistisches Modell

Kombiniere:

- $Ergebnis = Modell + Fehler$
- $Y = a + b * X$

Regressionsformel

- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \varepsilon_i$

Regression als statistisches Modell

Kombiniere:

- $Ergebnis = Modell + Fehler$
- $Y = a + b * X$

Regressionsformel

- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \varepsilon_i$
- $\hat{Y}$ = vorhergesagtes Outcome
- X = Prädiktoren
- **Regressionskoeffizienten**
    - b_0 = Schnittpunkt mit Y-Achse
    - b_1 = Winkel der Geraden
- ε = **Residual Term**
    - oft nicht explizit angegeben

Regressionskoeffizienten

Regressionskoeffizienten

- b_0 = Schnittpunkt mit Y-Achse
  - Position des Modells im geometrischen Raum
- b_1 = Winkel der Geraden
  - Richtung der Beziehung zwischen Prädiktor und Outcome
  - positiv: Je höher x, desto höher y
    Übungszeit $\rightarrow$ Sprachverständnis
  - negativ: Je höher x desto niedriger y
    Übungszeit $\rightarrow$ Freizeit
  - Je extremer b_1, desto mehr ändert sich y bei einer Verschiebung von x
- b meint meistens b_1

Berechnung

Methode Andy Field:

- Suche einen kleinen bärtigen Zauberer namens Nephwick the Line Finder (Frage ein Statistikprogramm)

Berechnung

Methode Andy Field:

- Suche einen kleinen bärtigen Zauberer namens Nephwick the Line Finder (Frage ein Statistikprogramm)

Mathematischereres Vorgehen:

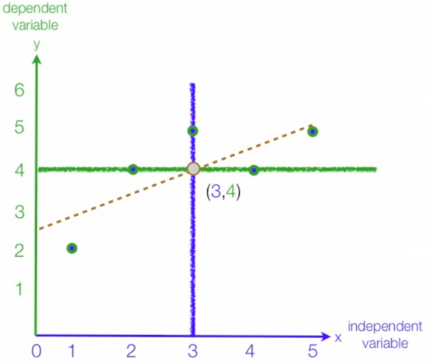
- Youtube StatisticsFun "How to calculate linear regression using least square method"
- `https://www.youtube.com/watch?v=JvS2triCgOY`
- $b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$
- $b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$

Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben:

Übungszeit X	Punktzahl Y
1	2
2	4
3	5
4	4
5	5

Gesucht:



- Blaue vertikale Line $= \overline{x}$
- Grüne horizontale Line $= \overline{y}$
- Braune diagonale Line = Regressionslinie

Methode der kleinsten Quadrate

$b_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$
$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$
$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \epsilon_i$

	X	Y
	1	2
	2	4
	3	5
	4	4
	5	5
Mean:	3	4

Methode der kleinsten Quadrate

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$$
$$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$$
$$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \epsilon_i$$

	X	Y	$x_i - \overline{x}$
	1	2	-2
	2	4	-1
	3	5	0
	4	4	1
	5	5	2
Mean:	3	4	

Methode der kleinsten Quadrate

$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$
$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$
$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \epsilon_i$

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$
	1	2	-2	-2
	2	4	-1	0
	3	5	0	1
	4	4	1	0
	5	5	2	1
Mean:	3	4		

Methode der kleinsten Quadrate

$$b_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$$
$$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$$
$$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \epsilon_i$$

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$
	1	2	-2	-2	4
	2	4	-1	0	1
	3	5	0	1	0
	4	4	1	0	1
	5	5	2	1	4
Mean:	3	4			

Methode der kleinsten Quadrate

$b_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$
$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$
$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \epsilon_i$

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})$
	1	2	-2	-2	4	4
	2	4	-1	0	1	0
	3	5	0	1	0	0
	4	4	1	0	1	0
	5	5	2	1	4	2
Mean:	3	4				

Methode der kleinsten Quadrate

$b_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}$
$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x}$
$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) + \epsilon_i$

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})$
	1	2	-2	-2	4	4
	2	4	-1	0	1	0
	3	5	0	1	0	0
	4	4	1	0	1	0
	5	5	2	1	4	2
Mean:	3	4		Sum:	10	6

Methode der kleinsten Quadrate

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})$
	1	2	-2	-2	4	4
	2	4	-1	0	1	0
	3	5	0	1	0	0
	4	4	1	0	1	0
	5	5	2	1	4	2
Mean:	3	4		Sum:	10	6

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Methode der kleinsten Quadrate

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})$
	1	2	-2	-2	4	4
	2	4	-1	0	1	0
	3	5	0	1	0	0
	4	4	1	0	1	0
	5	5	2	1	4	2
Mean:	3	4		Sum:	10	6

$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{6}{10} = 0.6$

$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x} = 4 - 0.6 * 3 = 2.2$

Methode der kleinsten Quadrate

	X	Y	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})$
	1	2	-2	-2	4	4
	2	4	-1	0	1	0
	3	5	0	1	0	0
	4	4	1	0	1	0
	5	5	2	1	4	2
Mean:	3	4		Sum:	10	6

$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{6}{10} = 0.6$

$b_0 = \overline{y} - b_1 * \overline{x} = 4 - 0.6 * 3 = 2.2$

$\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = \underline{2.2 + 0.6 * X}$

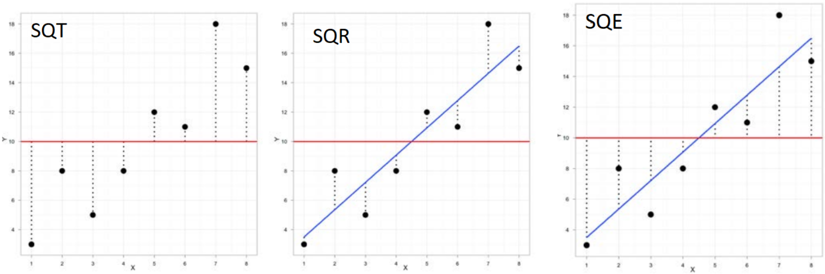
Fitness einer Regression

- Regressionsline gilt als *Best Fit* für ein Regressionsmodell...
- ...aber muss kein guter Fit sein

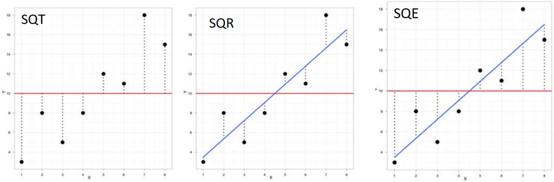
Wiederholung Fitness des Mittelwerts

- Abweichung (deviance) $= x_i - \overline{x}$
- Naiv: Abweichungen addieren $= \sum(x_i - \overline{x})$
  - $X = \{22, 40, 53, 57\}$
  - $\overline{x} = 43$
  - Totaler Fehler $= -21 + -3 + 10 + 14 = 0$ 🙁
- Halbgut: Quadratabweichungen addieren SS $= \sum(x_i - \overline{x})^2$
  - Sum of Squares steigt mit Stichprobengröße🙁
- Gut: SS mit Stichprobengröße normalisieren
  Varianz $s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$
  Standardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Fitness einer Regressionslinie



Fitness einer Regressionslinie

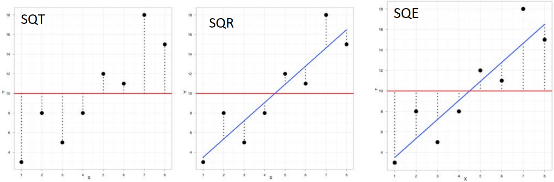


Abstände von Regression zu Beobachtung sind Residuen (Residuum)

- **Quadratsumme der Abweichungen** $SQT = \sum(y_i - \overline{y})^2$
- **Residuenquadratsumme** $SQR = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$
- **Erklärte Quadratsumme** $SQE = \sum(\overline{y} - \hat{y}_i)^2$
- $R^2 = \frac{SQE}{SQT}$

Interpretation

Fitness einer Regressionslinie



Abstände von Regression zu Beobachtung sind Residuen (Residuum)

- **Quadratsumme der Abweichungen** $SQT = \sum(y_i - \overline{y})^2$
- **Residuenquadratsumme** $SQR = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$
- **Erklärte Quadratsumme** $SQE = \sum(\overline{y} - \hat{y}_i)^2$
- $R^2 = \frac{SQE}{SQT}$

Interpretation

- hohes SQE bedeutet hohe Verbesserung des Regressionsmodells gegenüber dem Mittelwert
- R^2 ist der Anteil der Variation im Outcome, der durch das Modell erklärt wird
  - Fun Fact: Bei einfacher Regression gilt $\sqrt{R^2}$ = Pearsons r

Fitness einer Regressionslinie

Alternativ F-Test

- MQx = Mittelwert der Quadrate von x
- $MQE = \frac{SQE}{Variablenanzahl}$
- $MQR = \frac{SQR}{Beobachtungen - Regressionskoeffizienten}$
- F-Ratio $F = \frac{MQE}{MQR}$
- H_0 = Alle Regressionskoeffizienten sind 0 Die Regressionsline hat keine Vorhersagekraft
- Je höher F, desto besser das Modell
- Dazu später mehr...

Fitness von Prädiktoren

t-Test:

- Allgemein: $t = \frac{b_{observed} - b_{expected}}{SE_b}$ SE = Standardfehler = $\frac{s}{\sqrt{n}}$
- $H_0 : b == 0 \; // b_{expected}$ ist bei uns also 0
- $\rightarrow t_{b==0} = \frac{b_{observed}}{SE_b}$
- t_{kr} aus Tabelle ablesen ($df = n - anz_{predictors} - 1 \rightarrow n - 2$ für einfache Regression)
- $abs(t) < t_{kr} \rightarrow H_0$ angenommen $\rightarrow$ wahrscheinlich kein Effekt, der Unterschied zwischen $b_{observed}$ und 0 ist nicht signifikant
- Dazu später mehr...

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

Übungszeit X	Punktzahl Y
1	2
2	4
3	5
4	4
5	5

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

	X	Y	$\hat{Y}$
	1	2	2.8
	2	4	3.4
	3	5	4.0
	4	4	4.6
	5	5	5.2
Mean:	3	4	

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

	X	Y	$\hat{Y}$	$(y_i - \overline{y})^2$
	1	2	2.8	4
	2	4	3.4	0
	3	5	4.0	1
	4	4	4.6	0
	5	5	5.2	1
Mean:	3	4	Sum:	8

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

	X	Y	$\hat{Y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$
	1	2	2.8	4	0.64
	2	4	3.4	0	0.77
	3	5	4.0	1	1
	4	4	4.6	0	0.77
	5	5	5.2	1	0.04
Mean:	3	4	Sum:	8	3.22

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

	X	Y	$\hat{Y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$	$(\overline{y} - \hat{y})^2$
	1	2	2.8	4	0.64	1.44
	2	4	3.4	0	0.77	0.36
	3	5	4.0	1	1	0
	4	4	4.6	0	0.77	0.36
	5	5	5.2	1	0.04	1.44
Mean:	3	4	Sum:	8	3.22	3.6

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

	X	Y	$\hat{Y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$	$(\overline{y} - \hat{y})^2$
	1	2	2.8	4	0.64	1.44
	2	4	3.4	0	0.77	0.36
	3	5	4.0	1	1	0
	4	4	4.6	0	0.77	0.36
	5	5	5.2	1	0.04	1.44
Mean:	3	4	Sum:	8	3.22	3.6

- **Quadratsumme der totalen Abweichungen** $SQT = \sum(y_i - \overline{y})^2 = 8$
- **Residuenquadratsumme** $SQR = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = 3.22$
- **Erklärte Quadratsumme** $SQE = \sum(\overline{y} - \hat{y}_i)^2 = 3.6$

Fitness einer Regression

$b_1 = 0.6,\ b_0 = 2.2,\ \hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

	X	Y	$\hat{Y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(y_i - \hat{y})^2$	$(\overline{y} - \hat{y})^2$
	1	2	2.8	4	0.64	1.44
	2	4	3.4	0	0.77	0.36
	3	5	4.0	1	1	0
	4	4	4.6	0	0.77	0.36
	5	5	5.2	1	0.04	1.44
Mean:	3	4	Sum:	8	3.22	3.6

- $SQT = 8,\ SQR = 3.22,\ SQE = 3.6$
- $R^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{3.6}{8} = 0.45 \rightarrow 45\%$ der Variation von Y durch X erklärbar
- $t = \frac{b_1}{\sigma_b} = \frac{0.6}{0.2828} = 2.12 < t_{kr} = 3.18 \rightarrow$ Effektstärke des Prädiktors nicht signifikant
  //Standardfehler σ_b kommt vom R-Skript, kann aber auch analog zu vorher errechnet werden

Lineare Regression in *R*

```
geubt<-c(1,2,3,4,5)
punkte<-c(2,4,5,4,5)
data<-data.frame(geubt, punkte)
regression<-lm(data$punkte ~ data$geubt)
summary(regression)
```

```
Residuals:
   1    2    3    4    5
-0.8  0.6  1.0 -0.6 -0.2
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   2.2000     0.9381   2.345    0.101
data$geubt    0.6000     0.2828   2.121    0.124
Residual standard error: 0.8944 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:    0.6,        Adjusted R-squared:  0.4667
F-statistic:   4.5 on 1 and 3 DF,  p-value: 0.124

//12% Zufallswahrscheinlich (F Test)
//Mit 0 Ubung sagt das Modell 2.2 Punkte vorraus (Intercept)
```

Vorhersage

Wir erinnern uns:

- Regressionsformel $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

Wie kann man jetzt Vorhersagen treffen?

Vorhersage

Wir erinnern uns:

- Regressionsformel $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X) = 2.2 + 0.6 * X$

Wie kann man jetzt Vorhersagen treffen?
Einfach X einsetzen.

- $2.2 + 0.6 * 5\ \textit{Übungszeit} = 5.2\ \textit{Punkte}$
- $2.2 + 0.6 * 0\ \textit{Übungszeit} = 2.2\ \textit{Punkte}$
- $2.2 + 0.6 * 13\ \textit{Buechergelesen} = 9\ \textit{Bibelzitate}$

Überblick

Multiple Regression

- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von mehreren unabhängigen Variablen
- Outcome = (model) + Fehler

Multiple Regression

- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von mehreren unabhängigen Variablen
- Outcome = (model) + Fehler
- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X_1 + b_2 * X_2 + \cdots + b_n * X_n)$

Multiple Regression

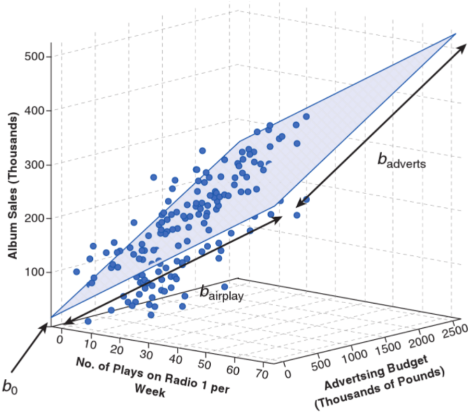
- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von mehreren unabhängigen Variablen
- Outcome = (model) + Fehler
- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X_1 + b_2 * X_2 + \cdots + b_n * X_n) + \varepsilon_i$
- $\hat{Y}$ = vorhergesagtes Outcome
- X_i = Prädiktoren
- **Regressionskoeffizienten**
  - b_0 = Schnittpunkt mit Y-Achse
  - b_i = Koeffizient des Prädiktors X_i

Multiple Regression

- Statistisches Modell zur Vorhersage einer abhängigen Variable auf Basis von mehreren unabhängigen Variablen
- Outcome = (model) + Fehler
- $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X_1 + b_2 * X_2 + \cdots + b_n * X_n) + \varepsilon_i$
- $\hat{Y}$ = vorhergesagtes Outcome
- X_i = Prädiktoren
- **Regressionskoeffizienten**
  - b_0 = Schnittpunkt mit Y-Achse
  - b_i = Koeffizient des Prädiktors X_i

  - Wie viel Angst haben Studierende 10, 5 oder 2 Minuten vor der Prüfung in wie großen Gruppen?
  - Wie viele Alben verkaufen wir, wenn wir x Euro für Werbung ausgeben und einen Song y mal im Radio spielen lassen?

Visualisierung



- Visualisierung schwierig
- 3 Prädiktoren (also ein Würfel) bereits schwer eindeutig darstellbar.

Fitness

- SQT, SQR,SQE analog zu linearer Regression berechenbar
- R = Korrelation zwischen beobachteten Y und berechneten Y
- Multiples R^2 = Maßzahl für Fitness ($1 \rightarrow$ Perfekter Fit)

Aber: R^2 steigt mit Anzahl der Prädiktoren, bevorteilt also Modelle mit mehr Prädiktoren, deshalb Sparsamkeitsbedachte Werte (Parsimony)

Akaike Information Criterion

- $AIC = n * \ln(\frac{SQR}{n}) + 2k$
- n = Anzahl der Fälle
- k = Anzahl der Prädiktoren

Fitness

- SQT, SQR,SQE analog zu linearer Regression berechenbar
- $R =$ Korrelation zwischen beobachteten Y und berechneten Y
- Multiples $R^2 =$ Maßzahl für Fitness ($1 \rightarrow$ Perfekter Fit)

Aber: R^2 steigt mit Anzahl der Prädiktoren, bevorteilt also Modelle mit mehr Prädiktoren, deshalb Sparsamkeitsbedachte Werte (Parsimony)

Akaike Information Criterion

- $AIC = n * \ln(\frac{SQR}{n}) + 2k$
- $n =$ Anzahl der Fälle
- $k =$ Anzahl der Prädiktoren

Interpretation nur im direkten Vergleich bei Modelle mit gleichen Daten, absolute Werte bedeutungslos

Interpretation: Je höher desto schlechter der Fit

Bayesian Information Criterion (Berechnung via R)

Auswahl der Prädiktoren

Prädiktoren korrelieren meist und haben Wechselwirkungen im Modell, deshalb Auswahl der Prädiktoren entscheidend

Auswahl der Prädiktoren

Prädiktoren korrelieren meist und haben Wechselwirkungen im Modell, deshalb Auswahl der Prädiktoren entscheidend

- Hierarchisch
  - Nach Einfluss auf Modell
  - Bekannte Prädiktoren zuerst (Bspw. Vorarbeiten)
  - Weitere gleichzeitig oder schrittweise oder wieder hierarchisch
- Erzwungen
- Schrittweise (Greedy)
- Alle Teilmengen

Auswahl der Prädiktoren

Prädiktoren korrelieren meist und haben Wechselwirkungen im Modell, deshalb Auswahl der Prädiktoren entscheidend

- Hierarchisch
- Erzwungen
  - Alle auf einmal
- Schrittweise (Greedy)
- Alle Teilmengen

Auswahl der Prädiktoren

Prädiktoren korrelieren meist und haben Wechselwirkungen im Modell, deshalb Auswahl der Prädiktoren entscheidend

- Hierarchisch
- Erzwungen
- Schrittweise (Greedy)
  - *vorwärts*: Wähle Prädiktor, der am meisten erklärt solange *AIC* besser wird
  - *rückwärts*: Füge alle Prädiktoren ein und lösche die, deren Löschung *AIC* verbessert
  - *beidseits*: *Greedy vorwärts* mit *Greedy rückwärts* in jedem Schritt
  - Nachteil am Beispiel Anziehsachen: Wähle die wärmsten Kleidungsstücke → Unterwäsche vergessen
- Alle Teilmengen

Auswahl der Prädiktoren

Prädiktoren korrelieren meist und haben Wechselwirkungen im Modell, deshalb Auswahl der Prädiktoren entscheidend

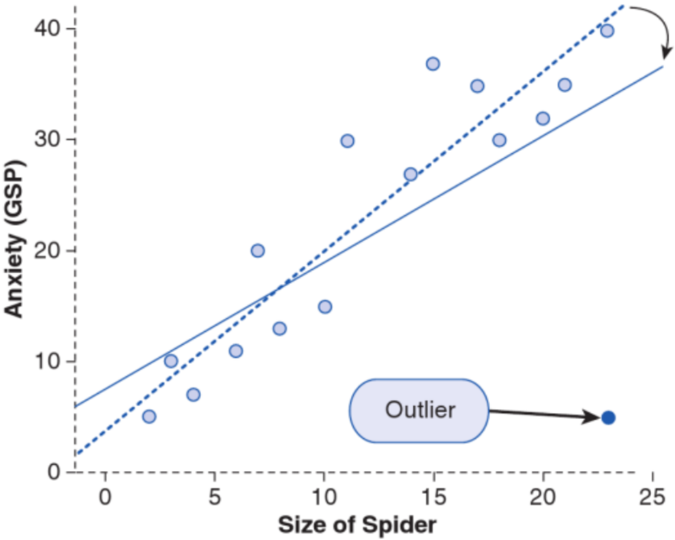
- Hierarchisch
- Erzwungen
- Schrittweise (Greedy)
- Alle Teilmengen
    - Bewertung aller Permutationen
    - 2 Prädiktoren: 4 Permutationen, 3 Prädiktoren: 8 Permutationen, 10 Prädiktoren: 1024 Permutationen
    - Fitnessbewertung mittels *Mallows* C_p

Überblick

2 Schritte zur Bewertung der Korrektheit

- Schritt 1: Fitness bezogen auf eigene Daten (Extremwerte und Einflusstarke Werte)
- Schritt 2: Generalisierbarkeit, Lässt sich das Modell auf andere Daten übertragen?

Extremwerte



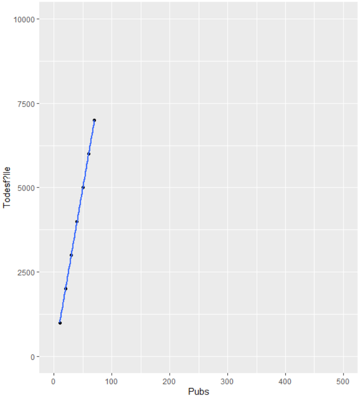
Extremwerte

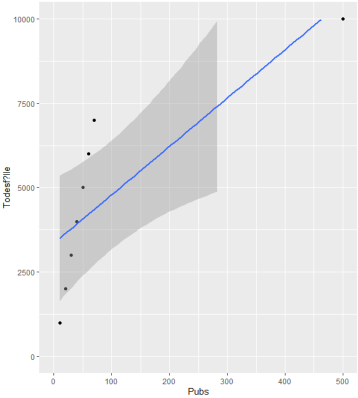
- Extremwerte kippen Regressionsgerade und erzeugen (wenn unpassend) Bias im Modell
- **Residuum R** = Abstand zwischen Regression und Beobachtung
- Extremwerte sind auffällig große Residuen
- Aber:

Extremwerte

- Extremwerte kippen Regressionsgerade und erzeugen (wenn unpassend) Bias im Modell
- **Residuum R** = Abstand zwischen Regression und Beobachtung
- Extremwerte sind auffällig große Residuen
- Aber:Toleranz des absoluten Residuenabstand vom Modell abhängig
- $\rightarrow$ **Standardisierte Residuen SR** $= \frac{R}{s_R}$
- Merkregeln, die aus Umwandlung in z-Scores folgen:
  - $SR > 3.29$ sind auffällig und unüblich
  - Wenn mehr als 1% der SR über 2.58 liegen, passt das Modell schlecht zu den Daten
  - Wenn mehr als 5% der SR über 1.96 liegen, passt das Modell schlecht zu den Daten

Einflusstarke Werte






```
pubs <- c(10,20,30,40,50,60,70,500)
deaths <- c(1000,2000,3000,4000,5000,6000,7000,10000)
pubsdeaths <-data.frame(pubs,deaths)
graph<-ggplot(pubsdeaths, aes(pubs, deaths))
graph + geom_point() + xlim(0,500) +ylim(0,10000)
    + labs(x = "Pubs", y = "Todesf?lle") + geom_smooth(method="lm")
```

Einflusstarke Werte

- Einflusstarke Werte machen das Modell instabil
  - $DFFit_i =$ Differenz zwischen y_i mit und ohne Fall i
  - Studentisiertes Residuum $=$ Differenz zwischen y_i und ohne Fall i geteilt durch Standardfehler
  - Cooks Distance gibt Einflussstärke eines Falles auf Vorhersagen aller anderen Fälle wieder ($> 1 \rightarrow$ Problemwert)
  - Hat-Value (Leverage/Hebelkraft): Durchschnitt berechnen $\frac{k+1}{n}$. Je mehr Abstand (Leverage) des Falls i zum Durchschnitt hat, desto höher ist der Einfluss

Einflusstarke Werte

Achtung:

- Influenzanalyse dient zur Bewertung eines Modells
- ...nicht zur Rechtfertigung einer Löschung eines Falls
- Gegenteil möglich: "Fall i ist Extremwert, aber da Cook Distance < 1 muss er nicht gelöscht werden."

Generalisierbarkeit

Lässt sich das Modell auf andere Daten übertragen? Das Modell hat weniger Bias, je besser es folgende Annahmen erfüllt

- Prädiktoren haben Varianz > 0
- Keine hohe Korrelation zwischen Prädiktoren (Multikollinearität)
- Prädiktoren korrelieren nicht mit externen Variablen
- Homoskedastizität (gleichmäßige Varianz der Residuen)
- Normalverteilung der Residuen mit Mittelwert 0
- Unabhängigkeit der Outcomes
- Linearität der Outcomes
- Variablentypen
- Unabhängigkeit der Fehler

Generalisierbarkeit

Lässt sich das Modell auf andere Daten übertragen? Das Modell hat weniger Bias, desto besser es folgende Annahmen erfüllt

- Prädiktoren haben Varianz > 0
- Keine hohe Korrelation zwischen Prädiktoren (Multikollinearität)
- Prädiktoren korrelieren nicht mit externen Variablen
- Homoskedastizität (gleichmäßige Varianz der Residuen)
- Normalverteilung der Residuen mit Mittelwert 0
- Unabhängigkeit der Outcomes
- Linearität der Outcomes
- Variablentypen
    - Prädiktoren: Intervall oder 2 Kategorien
    - Outcome: Intervall, stetig, uneingeschränkt (Spanne von Y sollte Spanne der Datenpunkte nicht überschreiten)
- Unabhängigkeit der Fehler

Generalisierbarkeit

Lässt sich das Modell auf andere Daten übertragen? Das Modell hat weniger Bias, desto besser es folgende Annahmen erfüllt

- Prädiktoren haben Varianz > 0
- Keine hohe Korrelation zwischen Prädiktoren (Multikollinearität)
- Prädiktoren korrelieren nicht mit externen Variablen
- Homoskedastizität (gleichmäßige Varianz der Residuen)
- Normalverteilung der Residuen mit Mittelwert 0
- Unabhängigkeit der Outcomes
- Linearität der Outcomes
- Variablentypen
- Unabhängigkeit der Fehler
    - Autokorrelation
    - Durbin-Watson Test

Kreuzvalidierung

- Je ähnlicher die Vorhersagekraft des Modells für verschiedene Samples, desto generalisierbarer ist es
- R^2 nach Stein: (Achtung, Adjusted R^2 in der Sprache R nach Wherry passt hier nicht)
  - Adjusted $R^2 = 1 - [\frac{n-1}{n-k-1} * \frac{n-2}{n-k-2} * \frac{n+1}{n}] * (1 - R^2)$
  - je höher, desto besser kreuzvalidiert das Modell
- Data Splitting
  - Daten zufällig teilen
  - Modell für Teilsamples berechnen
  - Generalisierbare Modelle sollten jetzt ähnliche Koeffizienten haben

Strichprobengröße

- Je mehr, desto besser
- Oversimplified: Mindestens 10 bis 15 mal die Anzahl der Prädiktoren
- Green, Samuel B (1991): *How Many Subjects Does It Take to Do a Regression Analysis?*
  - Bei Modelltests $n_{min} = 50 + 8 * k$
  - Bei fallbezogenen Tests $n_{min} = 104 + k$
  - Regelfall (Beides) : Maximum beider Werte

Zusammenfassung

- Regression erlaubt Abschätzen von Y für neue Werte aus X
- Zur Beschreibung benötigen wir Winkel und Schnittpunkt der Linie
  - Methode der kleinsten Quadrate
- Regressionsformel $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X)$
- b_0 und b_1 sind Regressionskoeffizienten

Zusammenfassung

- Regression erlaubt Abschätzen von Y für neue Werte aus X
- Zur Beschreibung benötigen wir Winkel und Schnittpunkt der Linie
  - Methode der kleinsten Quadrate
- Regressionsformel $\hat{Y} = (b_0 + b_1 * X)$
- b_0 und b_1 sind Regressionskoeffizienten
- Als statistisches Modell hat eine Regressionslinie eine Fitness
  - Residuenquadratsumme, Erklärte Quadratsumme, $R^2 =$ Verhältnis beider
  - F-Test möglich um Modell zu bewerten
  - t-Test möglich um Einflußstärke des Prädiktors zu bewerten
- 1 Prädiktor $\rightarrow$ Einfache Regression, Mehr als Prädiktor $\rightarrow$ Multiple Regression
  - Auswahl der Prädiktoren entscheidend
- Fitness der Regression zu Daten, Generalisierbarkeit
- Übersprungen: Multikollinearität, Annahmenbruch (Transformation der Residuen / Bootstrapping)