Statistik für Digital Humanities

Grundannahmen Parametrischer Verfahren

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

04. Mai 2020

[Letzte Aktualisierung: 03/05/2020, 21:19]

Überblick

Grundannahmen Parametrischer Verfahren

- Parametrische Tests weitverbreitete Grundlage statistischer Arbeit
- Parametrische Tests gehen von verschiedenen Annahmen aus
- Annahmen bzgl. Daten nicht gegeben $\rightarrow$ Test unpassend ☹
- $\rightarrow$ Kritisch für korrekte Auswahl von Tests
- $\rightarrow$ Einschränkung der Auswahl passender Methoden

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianzen
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit

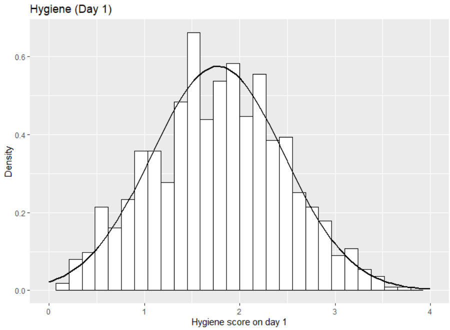
4 Grundannahmen

- Normalverteilung
  - Logik hinter Hypothesentests basiert meist (aber nicht immer) auf Normalverteilung (Bsp t-Test)
  - Keine Normalverteilung → Logik der Teststatistik fehlerhaft
- Homogenität der Varianzen
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit

Berechnung von Normalität

- Visuell
- Vergleich von Eigenschaften der Normalverteilung (Verschiebung, Wölbung,...)
- Berechnung des Unterschiedes zu normaler Normalverteilung (Shapiro-Wilk Test)
- **Central Limit Theorem**
- $\rightarrow$ Wenn Stichprobe tendenziell normalverteilt dann Stichprobenverteilung ebenfalls
  if $n > 30$:
  - $\overline{x}_{Stichprobenverteilung} \approx \overline{x}_{population}$
  - Stichprobenverteilung tendenziell normalverteilt

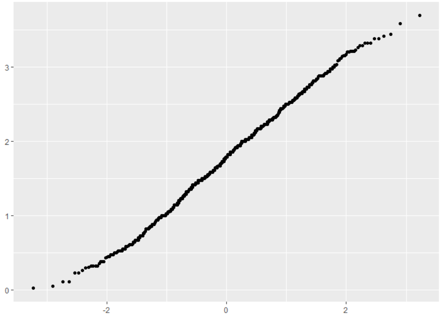
Visuell mit Häufigkeitsverteilung



Vergleich mit Normalverteilung bei gleichem $\overline{x}$ und s

```
dlf<-read.delim("DownloadFestival.dat", header=TRUE)
dlfhistogram <- ggplot(dlf, aes(day1)) + ggtitle ("Hygiene (Day 1)")
  + xlim(0,4) + geom_histogram(aes(y=..density..), color="black", fill="white")
  + labs(x="Hygiene score on day 1", y="Density")
dlfhistogram + stat_function(fun=dnorm, args =
  list(mean = mean(dlf$day1, na.rm=TRUE), sd = sd(dlf$day1, na.rm=TRUE)))
```

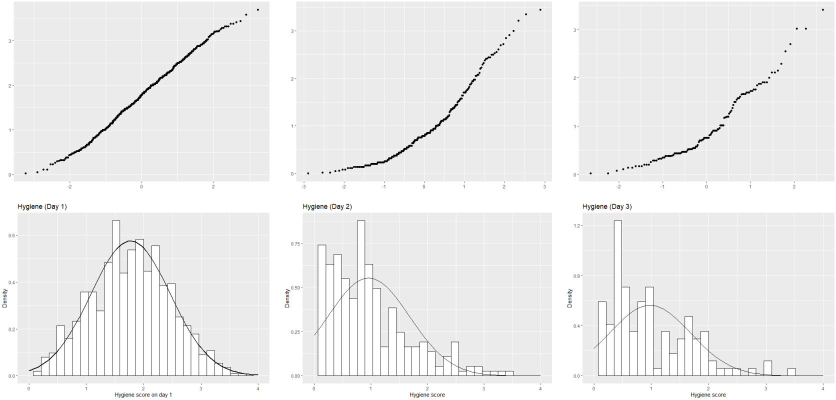
Visuell mit Q-Q Plot



- Quantile-Quantile Plot zeichnet sortierte und kummulierte Werte der Datenverteilung gegen die einer Normalverteilung
- Je gerader die Linie desto normalverteilter die Daten

```
dlf<-read.delim("DownloadFestival.dat", header=TRUE)
qplot(sample=dlf$day1, stat="qq")
```

Visuell



Hygiene (Day 1)
Hygiene (Day 2)
Hygiene (Day 3)
Density
Hygiene score on day 1
Hygiene score
Hygiene score

Vergleich von Eigenschaften

- R Paket pastecs
- z-Scores $\frac{skew}{2SE}$ und $\frac{kurt}{2SE}$ zeigen signifikante Wölbung oder Verschiebung bei Werten
  - < -1 und > 1 bei $p = 0.05$
  - < -1.29 und > 1.29 bei $p = 0.01$
- Signifikanz nur bei kleinen Samples sinnvoll (< 200)

```
library(pastecs)
round(stat.desc(cbind(dlf$day1,dlf$day2,dlf$day3),basic=FALSE,norm=TRUE),digits=3)
                 V1    V2    V3
median        1.790 0.790 0.760
mean          1.771 0.961 0.977
SE.mean       0.024 0.044 0.064
CI.mean.0.95  0.048 0.087 0.127
var           0.481 0.520 0.504
std.dev       0.694 0.721 0.710
coef.var      0.392 0.750 0.727
skewness     -0.004 1.083 1.008
skew.2SE     -0.026 3.612 2.309
kurtosis     -0.422 0.755 0.595
kurt.2SE     -1.228 1.265 0.686
normtest.W    0.996 0.908 0.908 // Ergebnisse des Shapiro-Wilk Test
normtest.p    0.032 0.000 0.000 //
```

Shapiro-Wilk Test

Shapiro, S.S. & Wilk,M.B. (1965): *An Analysis of Variance Test for Normality*

- Teststatistik zur Signifikanz der Abweichung der Daten von einer Normalverteilung
- Maximale Stichprobengröße: 50
- Generell je größer Stichprobe, desto mehr Typ 1 Fehler, deshalb zusätzlich visuelle Analyse sowie Skew und Kurtosis in Betracht ziehen
- H_1 Es liegt keine Normalverteilung vor
- H_0 Es liegt eine Normalverteilung vor
- **Achtung:** Der R Befehl shapiro.test(data) liefert nicht den eigentlichen Test sondern den von Patrick Royston (1982) für $n > 50$
- p-Wert bei shapiro.test(data) < 0.05 $\rightarrow$Daten signifikant anders als Normalverteilung

Shapiro-Wilk Test

Berechnung

- X sortieren
- $W = \frac{b^2}{S^2}$
  - $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i * (y_{n-i+1} - y_i)$
  - $S^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n} * (\sum x_i)^2$
  - $k = \frac{n}{2}$ wenn n gerade, $\frac{n-1}{2}$ sonst
  - α_i aus Shapiro-Wilk Tabelle ablesen (auf passendes n achten)
- Vergleiche W mit Grenzwert W_{kr} für 0.5-Level aus Tabelle

Interpretation

- Wenn $W > W_{kr}$: H_0 wahrscheinlich (Test findet keinen Hinweis gegen Normalverteilung)

Shapiro-Wilk Test

Beispiel: Like/Dislike Verhältnis auf Youtube $X = \{6, 1, -4, 8, -2, 5, 0\}$

- Sortiert: $X = \{-4, -2, 0, 1, 5, 6, 8\}$
- $S^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{7} * (\sum x_i)^2 = 146 - 28 = 118$
- $b = 0.6233 * (8 + 4) + 0.3031 * (6 + 2) + 0.1401 * (5 - 0) = 10.6049$
- $W = 10.6049^2/118 = 0.9530$
- $\rightarrow W$ wesentlich größer als $W_{kr}(0.928)$
- $\rightarrow$ Kein Beweis gegen Normalverteilung gefunden

Vergleich dazu das abweichende Ergebnis des R Skripts

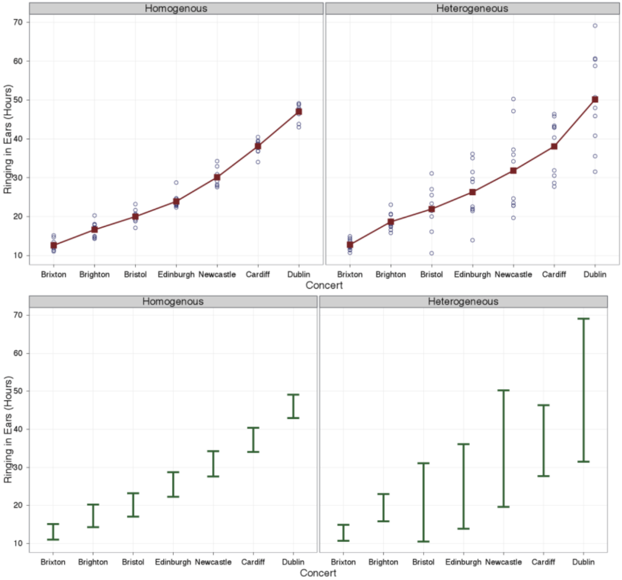
```
data <- c(6,1-4,8,-2,5,0)
shapiro.test(data)

W = 0.90428, p-value = 0.3998
```

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianzen
  - Bei Gruppendesigns: Varianz einer Variable zwischen verschiedenen Gruppen sollte gleich sein
  - Messwiederholungsdesign: Varianz einer Variable sollte gleich bleiben bei Variation einer anderen → Siehe VO *Vergleich zweier Mittelwerte*
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit

Homogenität der Varianz



Berechnung von Homogenität der Varianz

- Bei Kontinuierlicher Messung: Visuelle Analyse
- Bei Gruppendesigns: Levene's Test, Hartleys Varianz-Ratio

Levene's Test

- H_0: Varianzen in verschiedenen Gruppen sind homogen / Der Unterschied ist nicht signifikant
- $p < 0.05$: H_0 ist nicht korrekt, signifikante Unterschiede zwischen den Varianzen verschiedener Gruppen
- Berechnung: One-Way Anova (Einweg-Varianzanalyse) $\rightarrow$ kommt später
- Generell je größer Stichprobe ($n \geq 50$), desto mehr Typ 1 Fehler $->$ Hartleys F_{max} ebenfalls anwendbar

```
library(car)
rexam <- read.delim("rexam_factor.dat",header=TRUE)
> leveneTest(rexam$exam, rexam$uni)
    Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
          Df F value Pr(>F)
    group  1  2.0886 0.1516
          98
> leveneTest(rexam$numeracy, rexam$uni, center= mean)
    Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = mean)
          Df F value   Pr(>F)
    group  1  7.3681 0.007846 **
          98
```

Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

- Pearson, E.S. & Hartley, H.O. (1954):*Biometrika tables for statisticians*
- H_0: kleinster und größter Wert sind keine Outlier
- Test auch allgemein zur Outlier-Analyse geeignet
- $F_{max} = \frac{max(s^2)}{min(s^2)}$
- $F_{max} <$ Kritischer Wert $\rightarrow$ Test nicht signifikant $\rightarrow$ H_0 gilt $\rightarrow$

Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

- Pearson, E.S. & Hartley, H.O. (1954): *Biometrika tables for statisticians*
- H_0: kleinster und größter Wert sind keine Outlier
- Test auch allgemein zur Outlier-Analyse geeignet
- $F_{max} = \frac{max(s^2)}{min(s^2)}$
- $F_{max} <$ Kritischer Wert $\rightarrow$ Test nicht signifikant $\rightarrow$ H_0 gilt $\rightarrow$ Varianzen homogen

Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

Varianz der Freundesanzahlen bei Facebook, StudiVZ, Steam, Friendster

- $V = \{22, 40, 53, 57\}$
- $n_{pergroup} = 10$

H_0: kleinster und größter Wert sind keine Outlier

$min = 22$

$max = 57$

$F_{max} = \frac{max(s^2)}{min(s^2)} =$

Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

Varianz der Freundesanzahlen bei Facebook, StudiVZ, Steam, Friendster

- $V = \{22, 40, 53, 57\}$
- $n_{pergroup} = 10$

H_0: kleinster und größter Wert sind keine Outlier

$min = 22$

$max = 57$

$F_{max} = \frac{max(s^2)}{min(s^2)} = \frac{57}{22} = 2.59 <$ Kritischer Wert (6,31) $\rightarrow$ Test nicht signifikant $\rightarrow$ H_0 gilt $\rightarrow$

Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

Varianz der Freundesanzahlen bei Facebook, StudiVZ, Steam, Friendster

- $V = \{22, 40, 53, 57\}$
- $n_{pergroup} = 10$

H_0: kleinster und größter Wert sind keine Outlier

$min = 22$

$max = 57$

$F_{max} = \frac{max(s^2)}{min(s^2)} = \frac{57}{22} = 2.59 <$ Kritischer Wert (6,31) $\rightarrow$ Test nicht signifikant $\rightarrow$ H_0 gilt $\rightarrow$ Varianzen homogen

$V = \{9, 40, 53, 57\}$ wäre mit $F_{max} = 6.33$ nicht homogen

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianzen
- Mindestens Intervalldaten
  - Daten sollten zumindest Intervallskaliert sein
  - Ordnung der Werte & aussagekräftiger Abstand
  - Absoluter Nullpunkt optional
- Unabhängigkeit

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianzen
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit
  - Variablenwerte unabhängig voneinander, beeinflussen sich nicht
  - Bei Messwiederholungsdesigns Variablenwerte verschiedener Probanden unabhängig voneinander

Überblick

Annahmen nicht gegeben

Grundsätzlich 2 Möglichkeiten der Abweichung

- Daten passen nicht $\rightarrow$ Extremwerte, Outlier verzerren die Verteilung
- Testverfahren passt nicht $\rightarrow$ Alternativen möglich?

Umgang mit Problemwerten

Zuallererst

- Daten auf offensichtliche (Tipp-)Fehler prüfen

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
- Datentransformation
- Score des Problemfalls ändern

Umgang mit Problemwerten

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
  - Werte, die sehr wahrscheinlich nicht zur Population gehören kann man löschen
  - Katze hat gebellt $\rightarrow$ War wahrscheinlich ein verkleideter Hund
- Datentransformation
- Score des Problemfalls ändern

Umgang mit Problemwerten

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
- Datentransformation
  - Manche Analysen erlauben Datentransformationen (aller Werte!)
  - Bspw Relativer Abstand analysiert, aber absoluter Abstand egal $\rightarrow$ Umskalierung der Skala unproblematisch
  - Beispiele:
    - Log-Transformation $\log X$ verkürzt rechten Tail der Verteilung, reduziert pos. skew & Varianz
    - Wurzel-Transformation $\sqrt{X}$ bringt jeden Wert näher ans Zentrum, reduziert (pos.) skew & Varianz
    - Reziproke Transformation $\frac{1}{X}$ normalisiert auf $-1 \ldots 1$, reduziert Einfluss großer Werte (aber dreht Höhe der Werte um), reduziert pos. skew & Varianz (obviously)
    - Umgekehrter Score $X_r = x_{max} - X$ oder $x_{max} - X + 1$ erlaubt Korrektur von negativem Skew mit erwähnten Mitteln.
  - **Für Interpretation unbedingt wieder rückrechnen**
- Score des Problemfalls ändern

Umgang mit Problemwerten

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
- Datentransformation
- Score des Problemfalls ändern
  - Wert sehr unrepräsentativ $\rightarrow$ Ändern kleineres Übel
  - Nahester Score $\pm$ 1 Einheit
    - Reihenfolge bleibt, problematischer Abstand wird annulliert
  - Mittelwert $\pm 3 * s$ (folgt aus z-Score)
  - Mittelwert $\pm 2 * s$

Überblick

SuperGAU Handling

Wenn selbst Datenkorrektur nicht hilft oder zu "messy" wird:

- Gerade Normalität oft schwer objektiv bestimmbar
- Bootstrapping (Hochrechnen der Daten anhand gegebener Verteilung)
- Manche parametrische Tests gelten als **robust**, funktionieren also auch wenn nicht alle Annahmen erfüllt sind
  - Trimmed Mean → k kleinste und größte Werte löschen (k mit angeben)
  - M-Schätzer → k empirisch bestimmt
  - Bootstrap → Stichprobe in kleinere Proben mit Normalverteilung zerlegen, Stichprobenwerte abschätzen
- Konsequenzen von Transformationen eventuell schwerwiegender als ein Bruch mit den Annahmen
- Nichtparametrische Testverfahren haben keine Grundannahmen über die Daten, sind aber sehr eingeschränkt anwendbar
- Wilcox, R.R.(2005):*Introduction to robust estimation and hypothesis testing*, R Package WRS

Zusammenfassung

- Parametrische Tests basieren auf 4 Grundannahmen über die Daten
  - Normalverteilung → Shapiro-Wilk Test
  - Homogenität der Varianzen → Levene und Hartley Test
  - Mindestens Intervallskalierung
  - Unabhängigkeit
- Wenn Annahmen nicht gegeben sind können folgende zunehmend unangenehme Reperaturmaßnahmen helfen
  - Daten auf offensichtliche (Tipp-)Fehler prüfen
  - Problemfälle löschen
  - Datentransformation
  - Score des Problemfalls ändern
- Wenns alles nix hilft
  - Nichtparametrische Tests
  - Robuste Tests
  - Schadensabschätzung
  - Kreative Argumentation

Aktuelle Beispiele

- Nick Redfern (2012): *The log-normal distribution is not an appropriate parametric model forshot length distributions of Hollywood films*
  - Sind Analysen auf Basis einer Annahme einer Lognormal-Verteilungen bei der Betrachtung von Schnittlängen von Filmszenen wirklich angemessen?
  - Gilt die Annahme der Lognormal-Verteilung hier?

- Mike Baxter (2012): *On the distributional regularity of shot lengths in film*
  - Welche methodischen Fehler hat Redfern (2012) begangen?