

Statistik für Digital Humanities

Annahmen Parametrischer Tests

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

11. November 2019

[Letzte Aktualisierung: 03/02/2020, 14:53]

Annahmen Parametrischer Tests

- Parametrische Tests weitverbreitete Grundlage statistischer Arbeit
- Parametrische Tests gehen von verschiedenen Annahmen aus
- Annahmen bzgl. Daten nicht gegeben → Test unpassend
- → Kritisch für korrekte Auswahl von Tests
- → Einschränkung der Auswahl passender Methoden

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianz
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit

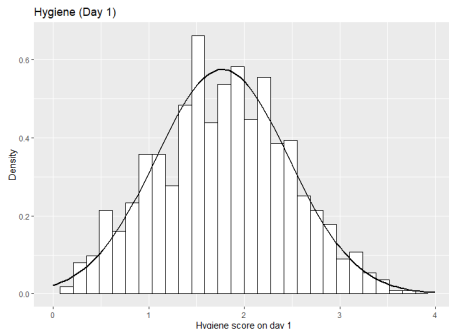
4 Grundannahmen

- Normalverteilung
 - Logik hinter Hypothesentests basiert meist (aber nicht immer) auf Normalverteilung (Bsp t-Test)
 - Keine Normalverteilung → Logik der Teststatistik fehlerhaft
- Homogenität der Varianz
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit

Berechnung von Normalität

- Visuell
- Vergleich von Eigenschaften der Normalverteilung (Verschiebung, Wölbung, . . .)
- Berechnung des Unterschiedes zu normaler Normalverteilung (Shapiro-Wilk Test)
- **Central Limit Theorem**
- → Wenn Stichprobe tendenziell normalverteilt dann Stichprobenverteilung ebenfalls
if $n > 30$:
 - $\bar{X}_{\text{Stichprobenverteilung}} \approx \bar{X}_{\text{population}}$
 - Stichprobenverteilung tendenziell normalverteilt

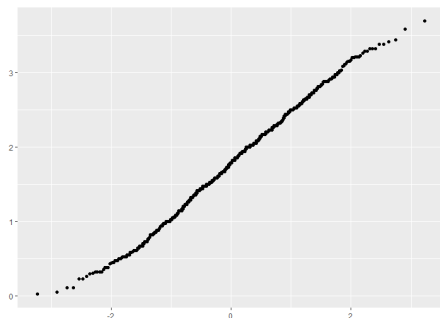
Visuell mit Häufigkeitsverteilung



Vergleich mit Normalverteilung bei gleichem \bar{x} und s

```
dlf<-read.delim("DownloadFestival.dat", header=TRUE)
dlfhistogram <- ggplot(dlf, aes(day1)) + ggtitle ("Hygiene (Day 1)")
  + xlim(0,4) + geom_histogram(aes(y=..density..), color="black", fill="white")
  + labs(x="Hygiene score on day 1", y="Density")
dlfhistogram + stat_function(fun=dnorm, args =
  list(mean = mean(dlf$day1, na.rm=TRUE), sd = sd(dlf$day1, na.rm=TRUE)))
```

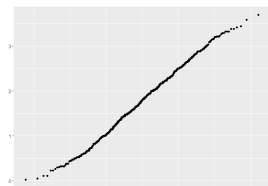
Visuell mit Q-Q Plot



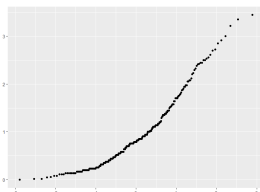
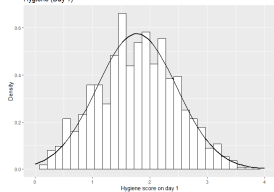
- Quantile-Quantile Plot zeichnet sortierte und kummulierte Werte der Datenverteilung gegen die einer Normalverteilung
- Je gerader die Line desto normalverteilter die Daten

```
dlf<-read.delim("DownloadFestival.dat", header=TRUE)  
qqplot(sample=dlf$day1, stat="qq")
```

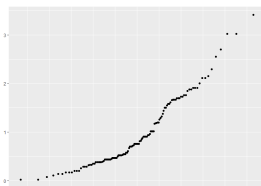
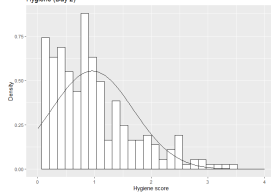
Visuell



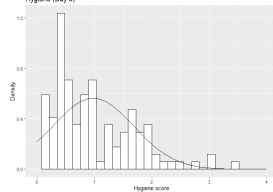
Hygiene (Day 1)



Hygiene (Day 2)



Hygiene (Day 3)



Vergleich von Eigenschaften

- R Paket pastecs
- z-Scores $\frac{skew}{2SE}$ und $\frac{kurt}{2SE}$ zeigen singifikante Wölbung oder Verschiebung bei Werten
 - < -1 und > 1 bei $p = 0.05$
 - < -1.29 und > 1.29 bei $p = 0.01$
- Signifikanz nur bei kleinen Samples sinnvoll (< 200)

```
library(pastecs)
round(stat.desc(cbind(dlf$day1,dlf$day2,dlf$day3),basic=FALSE,norm=TRUE),digits=3)
      V1      V2      V3
median  1.790 0.790 0.760
mean    1.771 0.961 0.977
SE.mean  0.024 0.044 0.064
CI.mean.0.95 0.048 0.087 0.127
var      0.481 0.520 0.504
std.dev  0.694 0.721 0.710
coef.var  0.392 0.750 0.727
skewness -0.004 1.083 1.008
skew.2SE -0.026 3.612 2.309
kurtosis -0.422 0.755 0.595
kurt.2SE -1.228 1.265 0.686
normtest.W  0.996 0.908 0.908 // Ergebnisse des Shapiro-Wilk Test
normtest.p  0.032 0.000 0.000 //
```

Shapiro-Wilk Test

S.S. Shapiro, M.B. Wilk: An Analysis of Variance Test for Normality

- Teststatistik zur Signifikanz der Abweichung der Daten von einer Normalverteilung
- Maximale Stichprobengröße: 50
- Generell je größer Stichprobe, desto mehr Typ 1 Fehler, deshalb zusätzlich visuelle Tests sowie Skew und Kurtosis in Betracht ziehen
- H_1 Es liegt keine Normalverteilung vor
- H_0 Es liegt eine Normalverteilung vor
- **Achtung:** Der R Befehl `shapiro.test(data)` liefert nicht den eigentlichen Test sondern den von Patrick Royston (1982) für $n > 50$
- p-Wert bei `shapiro.test(data) < 0.05` → Daten signifikant anders als Normalverteilung

Shapiro-Wilk Test

Berechnung

- X sortieren
- $W = \frac{b^2}{S^2}$
 - $b = \sum_{i=1}^k \alpha_i * (y_{n-i+1} - y_i)$
 - $S^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n} * (\sum x_i)^2$
 - $k = \frac{n}{2}$ wenn n gerade, $\frac{n-1}{2}$ sonst
 - α_i aus Shapiro-Wilk Tabelle ablesen (auf passendes n achten)
- Vergleiche W mit Grenzwert W_{kr} für 0.5-Level aus Tabelle

Interpretation

- Wenn $W > W_{kr}$: H_0 wahrscheinlich (Test findet keinen Hinweis gegen Normalverteilung)

Shapiro-Wilk Test

Beispiel: Like/Dislike Verhältnis auf Youtube $X = \{6, 1, -4, 8, -2, 5, 0\}$

- Sortiert: $X = \{-4, -2, 0, 1, 5, 6, 8\}$
- $S^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{7} * (\sum x_i)^2 = 146 - 28 = 118$
- $b = 0.6233 * (8 + 4) + 0.3031 * (6 + 2) + 0.1401 * (5 - 0) = 10.6049$
- $W = 10.6049^2 / 118 = 0.9530$
- $\rightarrow W$ wesentlich größer als $W_{kr}(0.928)$
- \rightarrow Kein Beweis gegen Normalverteilung gefunden

Vergleich dazu das abweichende Ergebnis des R Skripts

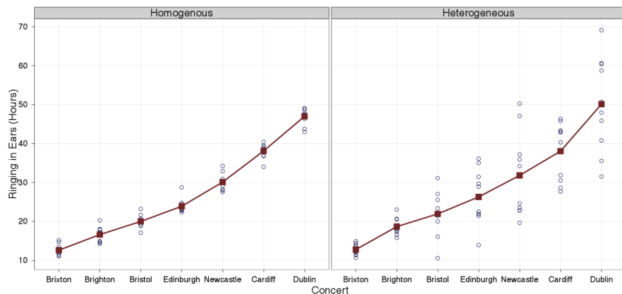
```
data <- c(6,1-4,8,-2,5,0)
shapiro.test(data)
```

$W = 0.90428$, $p\text{-value} = 0.3998$

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianz
 - Bei Gruppendesigns: Varianz einer Variable zwischen verschiedenen Gruppen sollte gleich sein
 - Kontinuierlicher Messung: Varianz einer Variable sollte gleich bleiben bei Variation einer anderen
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit

Homogenität der Varianz



Berechnung von Homogenität der Varianz

- Bei Kontinuierlicher Messung: Visuelle Analyse
- Bei Gruppendesigns: Levene's Test, Hartleys Varianz-Ratio

Levene's Test

- H_0 : Varianzen in verschiedenen Gruppen sind gleich / Der Unterschied ist 0
- $p < 0.05$: H_0 ist nicht korrekt, signifikante Unterschiede zwischen den Varianzen verschiedener Gruppen
- Berechnung: One-Way Anova (Einweg-Varianzanalyse) → kommt später
- Generell je größer Stichprobe ($n \geq 50$), desto mehr Typ 1 Fehler – > Hartleys F_{max} ebenfalls anwendbar

```
library(car)
rexam <- read.delim("rexam_factor.dat",header=TRUE)
> leveneTest(rexam$exam, rexam$uni)
  Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
      Df F value Pr(>F)
group  1  2.0886 0.1516
      98
> leveneTest(rexam$numeracy, rexam$uni, center= mean)
  Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = mean)
      Df F value  Pr(>F)
group  1  7.3681 0.007846 **
      98
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```


Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

- Pearson & Hartley (1954)
- H_0 : kleinster und größter Wert sind keine Outlier
- Test auch allgemein zur Outlier-Analyse geeignet
- $F_{max} = \frac{\max(s^2)}{\min(s^2)}$
- $F_{max} < \text{Kritischer Wert} \rightarrow \text{Test nicht signifikant} \rightarrow H_0 \text{ gilt} \rightarrow \text{Varianzen homogen}$

Hartley's F_{max} (Varianz-Ratio)

Varianz der Freundesanzahlen bei Facebook, StudiVZ, Steam, Friendster

- $V = \{22, 40, 53, 57\}$

- $n_{pergroup} = 10$

H_0 : kleinster und größter Wert sind keine Outlier

$min = 22$

$max = 57$

$F_{max} = \frac{\max(s^2)}{\min(s^2)} = \frac{57}{22} = 2.59 < \text{Kritischer Wert (6,31)} \rightarrow \text{Test nicht signifikant} \rightarrow H_0 \text{ gilt}$

\rightarrow Varianzen homogen

$V = \{9, 40, 53, 57\}$ wäre mit $F_{max} = 6.33$ nicht homogen

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianz
- Mindestens Intervalldaten
 - Daten sollten zumindest Intervallskaliert sein
 - Ordnung der Werte & aussagekräftiger Abstand
 - Absoluter Nullpunkt optional
- Unabhängigkeit

4 Grundannahmen

- Normalverteilung
- Homogenität der Varianz
- Mindestens Intervalldaten
- Unabhängigkeit
 - Variablenwerte unabhängig voneinander, beeinflussen sich nicht
 - Bei Messwiederholungsdesigns Variablenwerte verschiedener Probanden unabhängig voneinander

Annahmen nicht gegeben

Grundsätzlich 2 Möglichkeiten der Abweichung

- Daten passen nicht → Extremwerte, Outlier verzerren die Normalverteilung
- Testverfahren passt nicht → Alternativen möglich?

Umgang mit Problemwerten

Zuallererst

- Daten auf offensichtliche (Tipp-)Fehler prüfen

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
- Datentransformation
- Score des Problemfalls ändern

Umgang mit Problemwerten

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
 - Werte, die sehr wahrscheinlich nicht zur Population gehören kann man löschen
 - Katze hat gebellt → War wahrscheinlich ein verkleideter Hund
- Datentransformation
- Score des Problemfalls ändern

Umgang mit Problemwerten

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
- Datentransformation
 - Manche Analysen erlauben Datentransformationen (aller Werte!)
 - Bspw Relativer Abstand analysiert, aber absoluter Abstand egal → Umskalierung der Skala unproblematisch
 - Beispiele:
 - Log-Transformation $\log X$ verkürzt rechten Tail der Verteilung, reduziert pos. skew & Varianz
 - Wurzel-Transformation \sqrt{X} bringt jeden Wert näher ans Zentrum, reduziert (pos.) skew & Varianz
 - Reziproke Transformation $\frac{1}{X}$ normalisiert auf $-1 \dots 1$, reduziert Einfluss großer Werte (aber dreht Höhe der Werte um), reduziert pos. skew & Varianz (obviously)
 - Umgekehrter Score $X_r = x_{max} - X$ oder $x_{max} - X + 1$ erlaubt Korrektur von negativem Skew mit erwähnten Mitteln.
 - **Für Interpretation unbedingt wieder rückrechnen**
- Score des Problemfalls ändern

Umgang mit Problemwerten

Weitere Optionen nach umgekehrter Präferenz sortiert

- Problemfälle löschen
- Datentransformation
- Score des Problemfalls ändern
 - Wert sehr unrepräsentativ → Ändern kleineres Übel
 - Nächsthöchster Score plus 1
 - Mittelwert $+3 * s$ (folgt aus z-Score)
 - Mittelwert $+2 * s$

SuperGAU Handling

Wenn selbst Datenkorrektur nicht hilft oder zu "messy" wird:

- Gerade Normalität oft schwer objektiv bestimmbar
- Bootstrapping (Hochrechnen der Daten anhand gegebener Verteilung)
- Manche parametrische Tests gelten als **robust**, funktionieren also auch wenn nicht alle Annahmen erfüllt sind
 - Trimmed Mean → k kleinste und größte Werte löschen (k mit angeben)
 - M-Schätzer → k empirisch bestimmt
 - Bootstrap → Stichprobe in kleinere Proben mit Normalverteilung zerlegen, Stichprobenwerte abschätzen
 - Siehe (Wilcox, 2005), R Package WRS
- Konsequenzen von Transformationen eventuell schwerwiegender als ein Bruch mit den Annahmen
- Nichtparametrische Testverfahren haben keine Grundannahmen über die Daten, sind aber sehr eingeschränkt anwendbar

Zusammenfassung

- Parametrische Tests basieren auf 4 Grundannahmen über die Daten
 - Normalverteilung → Shapiro-Wilk Test
 - Homogenität der Varianzen → Levene und Hartley Test
 - Mindestens Intervallskalierung
 - Unabhängigkeit
- Wenn Annahmen nicht gegeben sind können folgende zunehmend unangenehme Reperaturmaßnahmen helfen
 - Daten auf offensichtliche (Tipp-)Fehler prüfen
 - Problemfälle löschen
 - Datentransformation
 - Score des Problemfalls ändern
- Wenns alles nix hilft
 - Nichtparametrische Tests
 - Robuste Tests
 - Schadensabschätzung
 - Kreative Argumentation