Statistik für Digital Humanities

Kovarianz & Korrelation

Dr. Jochen Tiepmar

Institut für Informatik
Computational Humanities
Universität Leipzig

17. Mai 2021

[Letzte Aktualisierung: 16/05/2021, 10:18]

Beziehungen zwischen Variablen

Mögliche Beziehung zwischen Variablen

- positiv: Je höher x, desto höher y
  Übungszeit $\rightarrow$ Sprachverständnis
- nicht vorhanden: Kein Zusammenhang zwischen x und y
  Übungszeit $\rightarrow$ Anzahl Sonneneruptionen
- negativ: Je höher x desto niedriger y
  Übungszeit $\rightarrow$ Freizeit

2 wesentliche Beziehungsmaße

- Kovarianz
- Korrelation Wir konzentrieren uns erstmal nur auf bivariate Korrelation, also zwischen 2 Variablen

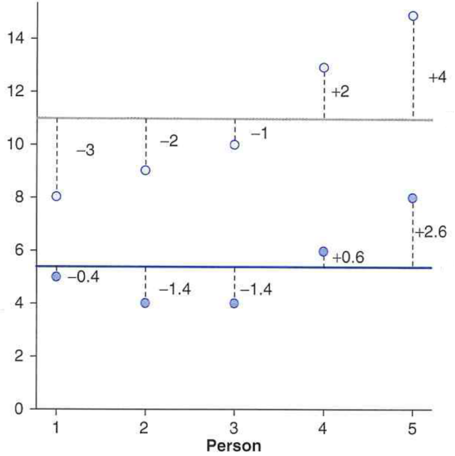
Anknüpfungspunkt Varianz

- Abweichung (deviance) $= x_i - \overline{x}$
- Naiv: Abweichungen addieren $= \sum(x_i - \overline{x})$
  - $\rightarrow$ $X = \{22, 40, 53, 57\}$
  - $\rightarrow$ $\overline{x} = 43$
  - $\rightarrow$ Totaler Fehler $= -21 + -3 + 10 + 14 = 0$
- Halbgut: Quadratabweichungen addieren SS $= \sum(x_i - \overline{x})^2$
  - $\rightarrow$ Sum of Squares steigt mit Stichprobengröße
- Gut: SS mit Stichprobengröße normalisieren
  Varianz $s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

$\rightarrow$ Kovarianz bestimmt, wie sehr zwei Variablen ko-variieren

Kovarianz

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Werbung gesehen	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Bambinas gekauft	8	9	10	13	15	11.0	2.92



Kovarianz

- Abweichung (deviance) $= x_i - \overline{x}$
- Halbgut: Kreuzprodukt der Abweichung (cross-product deviance) $=$ $(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})$
  - $\rightarrow$ positiv wenn x und y positiv oder negativ abweichen
  - $\rightarrow$ negativ wenn x und y in verschiedene Richtungen abweichen

  - $\rightarrow$ Summe der Kreuzprodukte der Abweichung steigt mit Stichprobengröße
- Gut: mit Stichprobengröße normalisieren
  Kovarianz $cov(X, Y) = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{n-1}$

Kovarianz

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Werbung gesehen	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Bambinas gekauft	8	9	10	13	15	11.0	2.92

Kovarianz $cov(X,Y) = \frac{\sum(x_i - \overline{x})*(y_i - \overline{y})}{n-1}$
$= \frac{(-0.4)*(-3)+(-1.4)*(-2)+(-1.4)*(-1)+(0.6)*(2)+(2.6)*(4)}{4}$
$= \frac{1.2+2.8+1.4+1.2+10,4}{4}$
$= \frac{17}{4} = 4.25$

```
werbung<-c(5,4,4,6,8)
gekauft<-c(8,9,10,13,15)
advertData<-data.frame(werbung, gekauft)
cov(advertData$werbung, advertData$gekauft)
```

Kovarianz

Kovarianz wird durch Maßskalierung verzerrt

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Arbeitsweg (Meilen)	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Wanderlust (Meilen)	8	9	10	13	15	11.0	2.92

$cov(x, y) = 4.25$
Nach Umrechnung in Kilometer ($*1.6$)
$cov(x, y) = 11$
$\rightarrow$ Vergleiche zwischen Datensätzen mit Kovarianz problematisch, deshalb...

Pearsons Korrelationskoeffizient

→ Vergleiche zwischen Datensätzen mit Kovarianz problematisch, deshalb. . .

- Pearson, K. (1920):*Notes on the History of Correlation*
- mit Standardabweichung normieren
  Korrelationskoeffizent $r(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{s_X * s_Y} = \frac{\sum(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{(n-1) * s_x * s_y}$
- auch Pearsons Produkt-Momentum Korrelationskoeffizient
- r liegt zwischen -1 und 1
  - → $+1$: perfekt positive Korrelation, x steigt proportional zu y
  - → 0 : kein linearer Zusammenhang, während x steigt, bleibt y gleich
  - → -1 : perfekt negative Korrelation, x steigt indirekt proportional zu y
- Indikator für Effektstärke Kein Beweis → Kontext und vergleichbare Ergebnisse beachten
  - → ± 0.1 : schwacher Effekt
  - → ± 0.3 : moderater Effekt
  - → ± 0.5 : starker Effekt

Pearsons Korrelationskoeffizient

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Werbung gesehen	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Bambinas gekauft	8	9	10	13	15	11.0	2.92

$cov(X, Y) = \frac{(x_i - \overline{x}) * (y_i - \overline{y})}{n-1}$
$= \frac{17}{4} = 4.25$
$s_x * s_y = 4.88$
$r = 4.25/4.88 = 0.87$

```
werbung<-c(5,4,4,6,8)
gekauft<-c(8,9,10,13,15)
advertData<-data.frame(werbung, gekauft)
cor(advertData$werbung, advertData$gekauft)
```

r als Teststatistik

Hypothesentest für

- Ist die Korrelation ungleich 0?
- Ist r wahrscheinlich wenn es keinen messbaren Effekt gäbe?

r ist nicht normalverteilt, deswegen z-Transformation
Fisher R.A.(1921): *On the propable Error of a coefficient of correlation deduced from a small sample*

- $z_r = \frac{1}{2}\log_e(\frac{1+r}{1-r})$
- $SE_{zr} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

Dann normal mit z-Score arbeiten

- $z = \frac{z_r}{SE_{zr}}$
- $p(r)$ aus der z-Tabelle ablesen ("Smaller portion")
- $p(r)$ verdoppeln weil two-tailed
- $p < 0.05 \rightarrow$ Korrelation signifikant

oder bald folgenden t-Test verwenden mit $df = 2$

- $t_r = \frac{r * \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

r als Teststatistik

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Werbung gesehen	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Bambinas gekauft	8	9	10	13	15	11.0	2.92

$r = 4.25/4.88 = 0.87$
$z_r = \frac{1}{2}\log_e(\frac{1+r}{1-r}) = 1.33$
$SE_{zr} = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0.71$
$z = \frac{z_r}{SE_{zr}} = \frac{1.33}{0.71} = 1.87$
$p(r) = 0.0307$ (Tabelle)
$\rightarrow$ Korrelation signifikant für one-tailed, nicht signifikant für two-tailed

```
werbung<-c(5,4,4,6,8)
gekauft<-c(8,9,10,13,15)
advertData<-data.frame(werbung, gekauft)
cor.test(advertData$werbung, advertData$gekauft)
#Liefert auch Konfidenzintervalle
#Ergebnisse leicht anders als hier -> Rundungsfehler
```

Konfidenzintervalle für r

r ist nicht normalverteilt, deswegen z-Transformation
Fisher R.A.(1921): *On the propable Error of a coefficient of correlation deduced from a small sample*

- $z_r = \frac{1}{2} \log_e(\frac{1+r}{1-r})$
- $SE_{zr} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

Dann KI für z_r berechnen (für 95%)

- Untergrenze $= z_r - (1.96 * SE_{zr})$
- Obergrenze $= z_r + (1.96 * SE_{zr})$

Dann auf r zurücktransformieren

- $r = \frac{e^{2*z_r}-1}{e^{2*z_r}+1}$

Konfidenzintervalle für r

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Werbung gesehen	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Bambinas gekauft	8	9	10	13	15	11.0	2.92

$r = 4.25/4.88 = 0.87$
$z_r = \frac{1}{2}\log_e(\frac{1+r}{1-r}) = 1.33$
$SE_{zr} = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0.71$
Zwischenergebnis:
Untergrenze $= 1.33 - (1.96 * 0.71) = -0.062$
Obergrenze $= 1.33 + (1.96 * 0.71) = 2.72$
$KI_U = \frac{e^{2*z_r}-1}{e^{2*z_r}+1} = \frac{e^{2*-0.062}-1}{e^{2*-0.062}+1} = -0.062$ $KI_O = \frac{e^{2*z_r}-1}{e^{2*z_r}+1} = \frac{e^{2*-2.72}-1}{e^{2*2.72}+1} = 0.991$

Interpretation von r

Proband	1	2	3	4	5	$\overline{x}$	s
Werbung gesehen	5	4	4	6	8	5.4	1.67
Bambinas gekauft	8	9	10	13	15	11.0	2.92

Determinationskoeffizient oder Bestimmtheitsmaß R^2

- Maß für Effektstärke
- $R^2 = r * r$
- Beispiel $r = 0.87$
  - $\rightarrow$ $R^2 = 0,7569$
  - $\rightarrow$ *Werbung gesehen* ist für 75,69% der Variation bei *Bambinas gekauft* verantwortlich
  - $\rightarrow$ 24,31 % der Variation bei *Bambinas gekauft* durch andere Variablen

Achtung: Kein Nachweis für Kausalität, auch wenn es oft so fehlinterpretiert wird

Statistische Annahmen von r

- Linearer Zusammenhang (ja/nein): Intervallskalierung Sortiert, Abstände zwischen den Werten der Skala aussagekräftig
- Darüber hinaus: Beide Variablen normalverteilt oder eine normal und die andere binärskaliert

$\rightarrow$ Sonst: nicht parametrisches Korrelationsmaß oder Bootstrapping

Nicht-Parametrische Korrelationsmaße

- Spearmans Korrelationskoeffizient ρ
- Kendalls tau τ

Spearmans Korrelationskoeffizient ρ

- Spearman C. (1904): *The proof and measurement of association between two things*
- wie Pearsons r aber statt x und y wird $Rang(x)$ und $Rang(y)$ verwendet
- $Rang(x) =$ Position in sortierter Liste
- Also: X und Y sortieren, x_i und y_i mit dem jeweiligen Rang in X und Y ersetzen und r berechnen.
- Interpretation von ρ analog zu r

```
cor(advertData$werbung, advertData$gekauft, method="spearman")
cor.test(advertData$werbung, advertData$gekauft,
 method="spearman", alternative="less") #alternative -> one/two-sided
```

Kendalls tau τ

- Kendall M. G. (1970): *Rank correlation methods*
- scheinbar besser als Spearman (Howell,D.C. (1997):*Statistical Methods for Psychology*)
- definitiv besser bei kleinen Datensätzen und vielen gleichrangigen Werten
- Interpretation von τ analog zu r

Berechnung (Laut Wikipedia):

- Sortiere Paare $\{x_i, y_i\}$ nach x
- vergleiche alle Paare $\{x_i, y_i\}$ mit allen Paaren $\{x_j, y_j\}$ mit $i < j$
  $C =$ Anzahl der Paare : $x_i < x_j$, $y_i < y_j$ Konkordanz
  $D =$ Anzahl der Paare : $x_i < x_j$, $y_i > y_j$Diskonkordanz
  $T_Y =$ Anzahl der Paare : $x_i \neq x_j$, $y_i = y_j$ Bindung in Y
  $T_X =$ Anzahl der Paare : $x_i = x_j$, $y_i \neq y_j$ Bindung in X
- **Kendalls tau** $\tau = \frac{C-D}{\sqrt{(C+D+T_Y)*(C+D+T_X)}}$

```
cor(advertData$werbung, advertData$gekauft, method="kendall")
```

Vergleiche zwischen Korrelationen

- Vergleiche zwischen unabhängigen Korrelationen
- Vergleiche zwischen abhängigen Korrelationen

Vergleiche zwischen unabhängigen Korrelationen

Werbung - Bambina Studie mit 51 *male* und 52 *female* wiederholt

- $n_{male} = 51, n_{female} = 52$
- $r_{male} = -0.506,\ r_{female} = -0.381$

$z_{Differenz} = \frac{z_{rmale} - z_{rfemale}}{\sqrt{\frac{1}{n_{male}-3} + \frac{1}{n_{female}-3}}}$

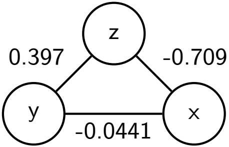
- $z_{Differenz} = \frac{-0.557-(-0.401)}{\sqrt{\frac{1}{49}+\frac{1}{48}}} = -0.768$
- z-Score Tabelle liefert 0.221 (one-tailed / gerichtet größer oder kleiner)
- verdoppeln liefert 0.442 (two-tailed / ungerichtet unterschiedlich)
- $\rightarrow$ Kein signifikanter Korrelationsunterschied Werte statistisch wahrscheinlich

Vergleiche zwischen unabhängigen Korrelationen

```
zdifference<-function(r1, r2, n1, n2){
 zd<-(atanh(r1)-atanh(r2))/sqrt(1/(n1-3)+1/(n2-3))
 p <-1 - pnorm(abs(zd))
 print(paste("Z Difference: ", zd))
 print(paste("One-Tailed P-Value: ", p))
 print(paste("Two-Tailed P-Value: ", 2*p))
}
```

Vergleiche zwischen abhängigen Korrelationen

Studie zu Prüfungsstress
$x =$ Prüfungsangst, $y =$ Performanz, $z =$ Abgabezeit
Ist die Korrelation zwischen x und y stärker als die zwischen z und y?
$H_0 \rightarrow$ Kein signifikanter Unterschied.



- $n = 103, r_{xy} = -0.0441,\ r_{zy} = 0.397,\ r_{zx} = -0.709$
- $t_{Differenz} = (r_{xy} - r_{zy}) * \sqrt{\frac{(n-1)*(1+r_{zx})}{2*(1-r_{xy}^2-r_{zx}^2-r_{zy}^2+2*r_{xy}+2*r_{zy}+2*r_{zx})}}$
- $= (-0.838) * \sqrt{\frac{29.1}{2*(1-0.94-0.503-1.58+0.248)}} = -5.09$
- T-Tabelle ($df = n - 3$, two tailed) liefert 1.96 (95%) und 2.63 (99%) als Kritische Werte
- $\rightarrow$ Wert signifikant höher als kritischer Wert $\rightarrow H_0$ widerlegt

Vergleiche zwischen abhängigen Korrelationen

```
tdifference<-function(rxy, rxz, rzy, n) {
 df<-n-3
        td<-(rxy-rzy)*sqrt((df*(1 + rxz))/(2*(1-rxy^2-rxz^2-rzy^2+(2*rxy*rxz*rzy)))
        p <-pt(td, df)
        print(paste("t Difference: ", td))
        print(paste("One-Tailed P-Value: ", p))
        print(paste("Two-Tailed P-Value: ", 2*p))
}
```

Zusammenfassung

- Kovarianz als grobes Maß für Beziehung zwischen Variablen anfällig für Messskalierung
- Pearsons r als normalisiertes Maß unabhängig von Messskalierung aber parametrisch
- nicht parametrische Verfahren
  - $\rightarrow$ Spearmans ρ
  - $\rightarrow$ Kendalls τ
- Korrelationen liegen zwischen -1 und 1
  - $\rightarrow$ -1 : negativ, indirekt proportional
  - $\rightarrow$ 1 : positiv, direkt proportional
- Korrelationen sind Indikatoren für Effektstärke
  - $\rightarrow$ $\pm$ 0.5 : starker Einfluss
  - $\rightarrow$ $\pm$ 0.3 : moderater Einfluss
  - $\rightarrow$ $\pm$ 0.1 : schwacher Einfluss

Korrelationen, die übersprungen wurden:

- Partiell und Semi-Partiell
- Biserial und Point-Biserial

Aktuelle Beispiele

- Paul Caruana-Galizia (2015): *Politics and the German language: Testing Orwell's hypothesis using the Google N-Gram corpus*
- "shows that six non-technical non-Naziwords – Demokratie(democracy), Freiheit(freedom), Frieden(peace), Herrlichkeit(glory), Gerechtigkeit(justice), and Heldentumd(heroism) – are (1) highly correlated with explicitly Nazi words; (2) negatively correlated with Germany's level of democracy; and (3) negatively correlated with the count of riots, anti-government protests, and government crises"

- kritischer Kommentar: vermutliche Drittvariable *Kriegsbereitschaft* und Korrelation wird fälschlicherweise als Hinweis auf Zusammenhang verwendet