Modellierung

Draft (in Bearbeitung)

Messen, Modellieren und Bewerten (MMB) von verteilten Systemen

- Modellklasse Bedienungssysteme und Bedienungsnetze
  - Aufgabenstellung zur Modellierung
  - Methodologie der Modellierung
  - Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie
  - Grundmodelle zur Leistungsbewertung
- Analyseverfahren für
  - einzelne Bedienungssysteme
  - offene und geschlossene Bedienungsnetze
- Operationale Analyse
- Stochastische Petri-Netze

Bearbeitungsstand: 23.05.2007

Modellierung und Bewertung

Literatur

Bolch, G.: Leistungsbewertung von Rechensystemen. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1989

Dotzauer, E.: Grundlagen der Digitalen Simulation. Hanser-Verlag, München, 1987

Frank, M.; Lorenz, P.: Simulation diskreter Prozesse. Fachbuchverlag, Leipzig, 1979

Gnedenko, B.W.; König, D.: Handbuch der Bedienungstheorie I/II. Akademie-Verlag, Berlin, 1984

Greiner, M.; Tinhofer, G.: Stochastik für Studienanfänger der Informatik. Hanser-V., 1996

König, D.; Stoyan, D.: Methoden der Bedienungstheorie. WTB-Reihe, Band 143, Akademie-Verlag, 1976

König, H.; Quäck, D.: Petrinetze in der Steuerungstechnik. Verlag Technik, Berlin, 1988

Irmscher, K.: Analyseverfahren geschlossener Bedienungsnetze. Schriftenreihe “Informations-verarbeitung im Hoch- und Fachschulwesen”, Berlin, Heft 6/1984

Löffler, H.: Information - Signal - Nachrichtenverkehr. Akademie-Verlag, Berlin, 1980

Pflug, G.: Stochastische Modelle in der Informatik. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1986

Reisig, W.: Petrinetze - Eine Einführung. Springer-Verlag, Berlin, 1986

Schaßberger, R.: Warteschlangen. Springer, Wien/New York, 1973

Siegert, H.-J.: Simulation zeitdiskreter Systeme. Oldenburg Verlag, München/Wien, 1991

Starke, P.: Petri-Netze. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1990

<MOD-OV-020>

Aufgabenstellung zur Modellierung

Schwerpunkte

1. Modellierung
   Reales System (Konfiguration, Last) ~> Modell ~> Analyse
   Zeit ~> Leistung (Verhaltensmodelle)
   Leistungsbewertung (Performance Evaluation)
2. Modellklassen (MK)
   - Basis-Modellklassen:
     Bedienungssysteme/-netze, Petri-Netze
     Gerichtete Graphen (topologische Strukturen)
   - Anwendungsorientierte Modellklassen für Rechner- / Rechnerverbundsysteme:
     Multiprogrammbetrieb, Dialogbetrieb, Ressourcenverwaltung im Betriebssystem
     Terminalnetzwerke, Netz-Cluster
     Kommunikationssysteme, Rechnernetze (wired / wireless) → *network calculus (nc)*
     Netzwerk-Management
     Übertragungskanal → *Nachrichtenverkehrstheorie*
     Verteilte Verarbeitung: Client/Server, Peer-to-Peer, n-Tier, Verteilte Datenbanken
     CSCW, Büroautomatisierung, Teleworking, Grid Computing, CIM, CAD

Disziplinen:
Messen, Modellieren und Bewerten (MMB)
Performance Evaluation
Leistungsbewertung
Simulation des Systemverhaltens
Nachrichtenverkehrstheorie (ET)

<MOD-OV-040>

Aufgabenstellung zur Modellierung

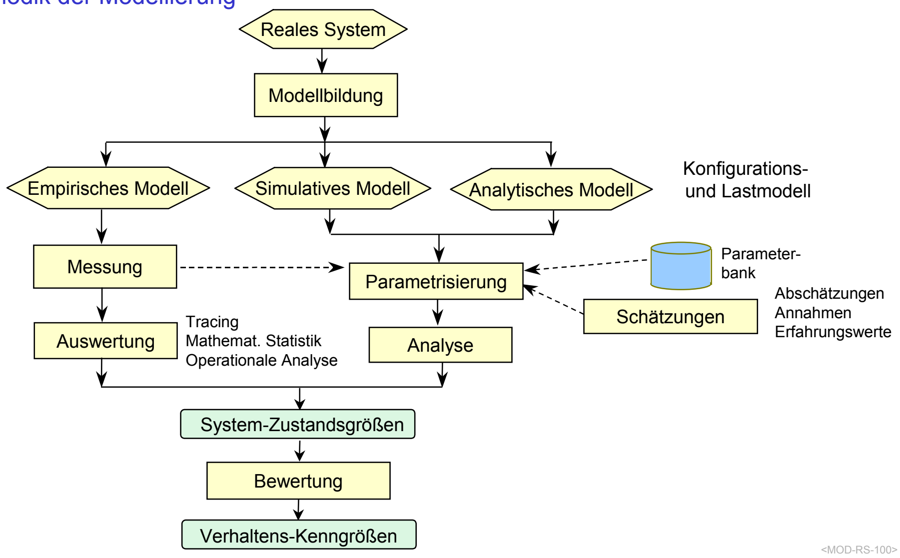
Schwerpunkte (2)

3. Basis-Modellklasse Bedienungssysteme/-netze
   - Charakteristika (stochastisch, zeitbehaftet), Methodologie (Dekomposition)
   - analytische Methoden
     Bedienungssysteme / Bedienungsnetze (offen, geschlossen)
     1- und mehrklassig (Kunden, Customer, Forderungen)
     exakte, approximative Lösungen
   - simulative Methoden (kontinuierlich, diskret) → *network simulator* ns-2
   - empirische Methoden: Messung, Schätzungen
     Statistische Auswertungen
     Operationale Analyse
   - Tools (Werkzeuge, Auswahl)
     BNETD, MOSAIC, RESQ, PAWCS, QNAP
     GPSS/SIMDIS, SATURN, HIT
   - Validation und hybride Modellierung
4. Basis-Modellklasse Petrinetze, insbes. Stochastische PN
   PNM, MARS, POSES, GreatSPN

<MOD-OV-050>

Methodologie der Modellierung

Methodik der Modellierung



<MOD-RS-100>

Methodologie der Modellierung

Bekannte Modellierungsprinzipien

Simplifikation:

Vernachlässigung unwesentlicher Merkmale und Parameter
Festlegungen zur Lösbarkeit, Rückführung auf bekannte Modelle

Dekomposition:

Zerlegung in Subsysteme bzw. äquivalente Systeme
- Flußäquivalenz, Norton'sches Theorem, Interface-Bedingungen
- Isolationsmethode (offline-Methode), Iterationsmethode
- Aggregation, Äquivalente Netze, Knotenapproximation

Hierarchische Strukturierung:

- Problemspezifische Strukturierung in verschiedenen Niveaus (z.B. OSIA, ODP)
- Schrittweise Verfeinerung / Detaillierung (Makro/Mikro-Modellierung bzw. Chef-Modellierung)

Hybridmodellierung:

Anwendung verschiedener Verhaltensmodelle
(z.B. Kombination von Berechnungsalgorithmen und Simulation)

Stufenmodellierung:

Mehrstufenkonzepte, Interface-Bedingungen

Kombinierte Modellierung:

Verknüpfung verschiedener Modellierungsprinzipien

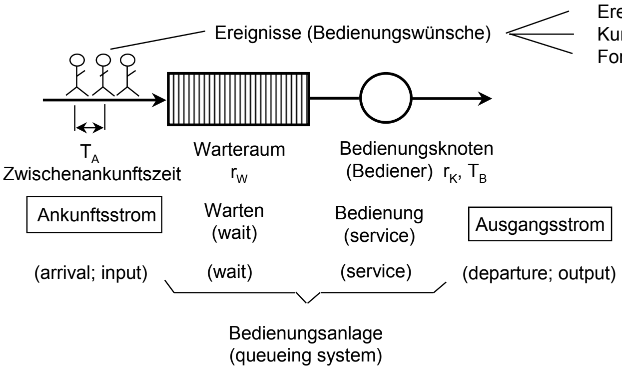
<MOD-RS-130>

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Bedienungssystem (Queueing System, Warteschlangensystem)

- *Zufälligkeit der Ereignisse* und *Beschränktheit der Bedienungskapazität* zur Befriedigung von Bedienungswünschen erfordert die Möglichkeit des Wartens von Ereignissen.
- Realisierung dieser Anforderungen durch Bedienungssysteme (queueing systems).

Bezeichnungen
Ereignisse (events)
Kunden (customers)
Forderungen (demands)



Primäre Zufallsgrößen:
- Ankunftsrate $\lambda = 1/T_A$
- Bedienungsrate: $\mu = 1/T_B$

Verteilungsfunktionen

<MKB-GB-040>

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Wichtige Verteilungsfunktionen

Verteilungsfunktionen, die insbes. zur Untersuchung von Rechensystemen verwendet werden:

- diskrete Verteilungen:
  - diskrete gleichmäßige Verteilung
  - Poisson-Verteilung (Verteilung „seltener Ereignisse“)
  - Binominal-Verteilung
  - Hypergeometrische Verteilung
- stetige Verteilungen:
  - stetig gleichmäßige Verteilung
  - Exponential-Verteilung
  - Erlang-Verteilung
  - Normalverteilung (Gaußsche Normal-Verteilung)
  - λ^2-, t-, F- Verteilung (sog. „Prüf-Verteilungen“) ~> in der mathematischen Statistik für Prüf- und Anpassungstests verwendet.

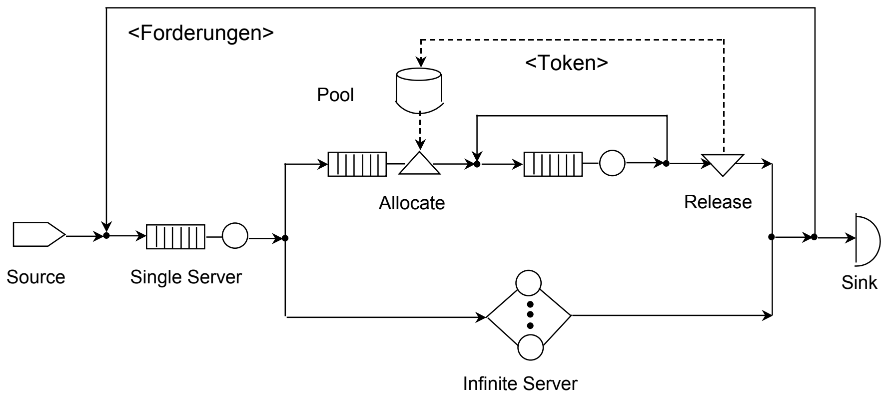
<MKB-GB-100>

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Beispiel eines Bedienungssystems

Offenes Bedienungsnetz

Erweitertes Bedienungsnetz (Nicht-Produktform) ~> i.allg. keine exakte Lösung möglich.
Abhilfe: Simulation (Zufallszahlengenerator, Verteilungsfunktionen, Konfidenzintervalle)



<MKB-GB-070>

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Kendall-Notation

$A / B / r_k / r_w$

- Anzahl der Warteplätze (falls ausgelassen, gilt $r_w = \infty$)
- Anzahl der Bedienungskanäle r_k
- Charakterisierung des Bedienungsprozesses
  u.a. **M** : exponential-verteilte Bedienungszeit (Markowscher Prozess)
  GI : allgemeine Bedienungszeitverteilung (stationäre Folge von Bedienungen)
- Charakterisierung des Ankunftsprozesses
  u.a. **M** : Poissonscher Fo-Strom (Markowscher Prozess)
  GI : Rekurrenter Fo-Strom (general independent)
  E_k : Rekurrenter Fo-Strom mit Erlang-Verteilung k-ten Grades
  D : Fo-Strom mit konstanten Abständen (deterministic)

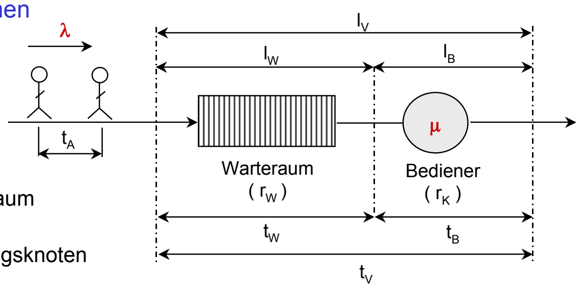
Beispiele:
M/M/1/r
M/M/1 ($\hat{=}$ M/M/1/∞)
GI/D/1
M/G/1

In Literatur auch Erweiterungen der Notation, um ein Bedienungssystem näher zu charakterisieren (z.B. Bedienungsdisziplin, Gesamtanzahl von Forderungen in einem geschlossenen System)
-> siehe Gnedenko/König: “Handbuch der Bedienungstheorie”

<MKB-BS-150>

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Kenngrössen von Bedienungssystemen



t_A : Zwischenankunfszeiten
Erwartungswert $T_A = E[\,t_A\,]$

λ: Ankunftsrate (Ankunftsstrom-intensität) $\boxed{\lambda = \frac{1}{T_A}}$

t_w : Wartezeit einer Forderung im Warteraum
Erwartungswert $T_W = E[\,t_W\,]$

t_B: Bedienungszeit einer Fo im Bedienungsknoten
Erwartungswert $T_B = E[\,t_B\,]$

μ: Bedienungsrate $\boxed{\mu = \frac{1}{T_B}}$

t_V : Verweilzeit einer Fo in der Bedienungsanlage (wartend und bedient)
Erwartungswert $T_V = E[\,t_V\,]$

Es gilt $\boxed{T_V = T_W + T_B}$ (1)

l_B: Anzahl der sich in Bedienung befindlichen Forderungen („Länge“)
Erwartungswert $L_B = E[\,l_B\,]$

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Kenngrössen von Bedienungssystemen (2)

l_W: Anzahl der im Warteraum wartenden Forderungen. Erwartungswert $L_W = E[\,l_W\,]$

Es gilt

$$\boxed{L_V = L_W + \frac{\lambda}{\mu}} \qquad (2)$$

Littlesche Gesetz: beschreibt die Beziehungen zwischen den Erwartungswerten L_W und T_W (analog L_V und T_V) eines im *stationären* Zustand befindlichen Wartesystems

$$\boxed{L_W = \lambda \cdot T_W} \qquad (3)$$

Analyse eines im stationären Zustand befindlichen Bedienungssystems liefert die stationären Zustands-Wktn.
Sie geben Auskunft über die Wkt. der Anzahl der im System enthaltenen Forderungen.
Für die Bewertung von Rechnersystemen interessieren aus dieser Menge von Zustands-Wktn. die sog. Randverteilungen (marginal distributions).

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Randverteilungen (marginal distributions)

$P_B(k) = P(n{=}k) = P_k$: *Stationäre Belegungs-Wkt.*
Wkt, dass sich zu einem beliebigen Zeitpunkt genau k Forderungen in der Bedienungsanlage befinden (wartend + bedient)

$P_0 = P(n{=}0)$: *Stillstands- oder Leer-Wkt*.

$$\boxed{P_0 = 1 - \sum_{(k)} P_k \qquad k=1, 2, \ldots} \qquad (4)$$

$P_A = P(n \geq 1)$: *Besetzt- oder Aktiv-Wkt.* (Auslastungsgrad)
Wkt, dass Anlage besetzt ist, d.h. mindestens 1 Fo im System

Stationäre Zustandsgrössen (L_V, T_V, η, D): Aus den Zustand-Wktn. lassen sich aggregierte Werte bilden, sog. stationäre Zustandsgrössen. Dienen i.allg. zur *unmittelbaren Leistungsbewertung* eines Rechnersystems

L_V : *mittlere „Länge einer Anlage“*
(Anzahl wartender+bedienter Fo)

$$\boxed{L_V = E[N] = \sum_{(k)} k \cdot P_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

T_V : *mittlere Verweilzeit*
aus Little-Formel (10) folgt

$$\boxed{T_V = \frac{L_V}{\lambda}} \qquad (5)$$

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Stationäre Zustandsgrößen (L_V, T_V, η, D): (Fortsetzung)

η: *Auslastung* (Wkt, dass Anlage aktiv ist)

- bei Einbedieneranlagen entspricht η dem Auslastungsgrad
- bei IS-Stationen gibt η die mittlere Anzahl der belegten Bedienungskanäle an

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= \sum_{(k)} P_k && k = 1, 2, \ldots \\ &= 1 - P_0 && \text{für Einbedieneranlage} \end{aligned}}$$

(zu 5)

D: *Durchsatz* (Anzahl der in einer Zeiteinheit bedienten Fo)
Entspricht einer Rate für Bedienen und Verlassen einer Fo

$$\boxed{D = \sum_{(k)} \mu \cdot P_k \underset{\substack{\text{falls} \\ \mu \neq \mu(k)}}{=} \mu \cdot \eta \qquad k = 1, 2, \ldots}$$

Leistungsbewertung (Performance Evaluation)

L_V, T_V, D, η - Analyse

Grundbegriffe aus der Bedienungstheorie

Klassifikation von Bedienungssystemen/-netzen

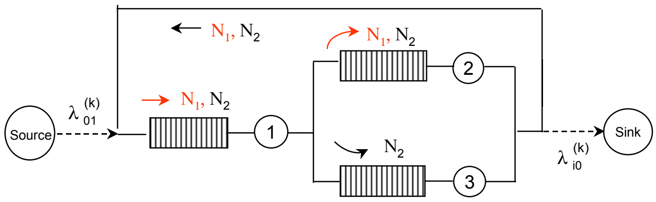
- einklassige / mehrklassige (multi-chain): nach Anzahl der Fo-Klassen (Kundentypen)
- Einzelne Bedienungssysteme (BS)
- Bedienungsnetze (Verkettung von BS): geschlossen / offen / gemischt

GBN: kein Zugang zum BN bzw. kein Abgang von Fo aus dem Netz, so dass die Anzahl der Fo im Netz konstant bleibt

OBN: an mindestens 1 Knoten findet ein *Zugang* von außen (λ_{oi}) bzw. *Abgang* nach außen statt (λ_{j0})

MBN: Falls mehrere Fo-Klassen, kann Netz bezüglich der Klassen offen u./o. geschlossen sein

Beispiel eines (offenen) Bedienungsnetzes



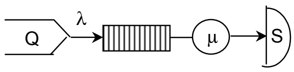
<MKB-BN-040>

Grundmodelle zur Leistungsbewertung

Basismodelle (offene Systeme)

Zur Modellierung des Leistungsverhaltens von Rechner-, Rechnerverbund- und Verteilten Systemen wurden vielfältige Modelle auf der Basis von Bedienungssystemen (BS) und Bedienungsnetzen (BN) entwickelt ~> Auswahl:

Offenes Einphasen-BS

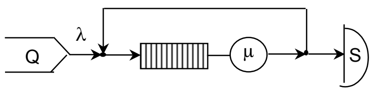


$\lambda = \frac{1}{T_A}$ $\mu = \frac{1}{T_B}$

Beispiele:
M/M/1/r
M/M/1
M/D/1
GI/G/1
M/G/1
usw.

Anwendungen:
- Rechner (global): t_B= Zeit für 1 Job
- Betriebssystem (Scheduling)
- Übertragungskanal (LAN, WAN, MFN)
  t_B = Übertragungs-Zeit

Offenes Einphasen-BS mit Rückführung (Feedback)



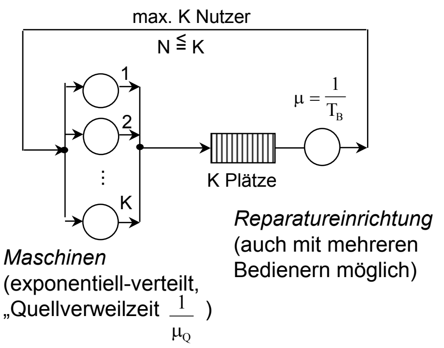
M/G/1-Model

Anwendungen:
- Time-Sharing-System, Processor-Sharing
- "Round-Robin"- bzw. "Reigen"-Algorithmus

<MKB-PE-020>

Grundmodelle zur Leistungsbewertung

Maschinen-Reparatur-Modell



Maschinen-Reparatur-Modell
(*Machine Repair with One Repairman*)
Geschlossenes BS, in Bedienungstheorie bekannt als

- Palmsches Mehrmaschinenmodell oder
- Engsetsches Wartesystem

Lösung als geschlossenes M/M/1/K/K-System
(Lit: [Allen])

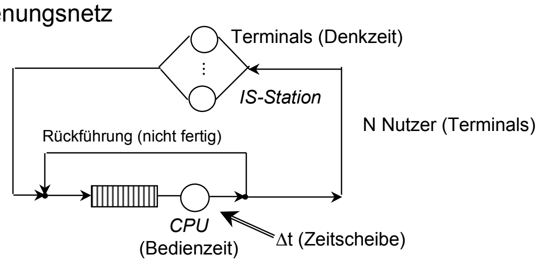
Anwendungen (Beispiele)

- in Rechentechnik:
  Speicherzugriffe (externer Speicher), Datenbanksysteme
  Dienstebereitstellung, Client/Server-Systeme
- in Automatisierungstechnik: Steuerungssysteme, Reparatursysteme

Grundmodelle zur Leistungsbewertung

Interaktiver Betrieb (Time-Sharing)

- Ersetzt man im Maschinen-Reparatur-Modell die Maschinen durch eine Menge von Terminals ~> *Grundmodell* eines *Rechners im interaktiven Betrieb*
- Statt Quelle nun eine *sog. IS-Station*: Kein Warten auf Bedienen, da am Terminal nur 1 Fo ankommt (Ausnahme bei Window-Technik und Multi-User-Betrieb)
- Geschlossenes Bedienungsnetz



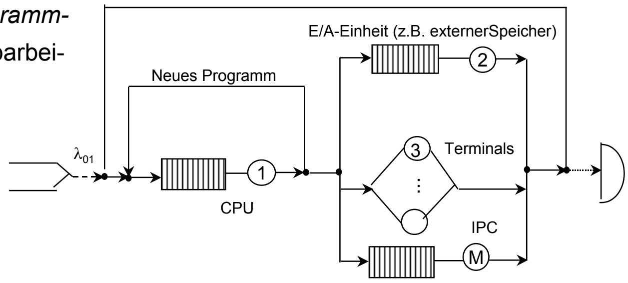
Dialogbetrieb

- Untersuchung IBM/TSO Time-Sharing-Modell (Lit. Scherr (MIT), 1967)
- Nutzung Round-Robin-Algorithmus M/M/1/K/K oder Theorie GBN

Grundmodelle zur Leistungsbewertung

Central-Server-Modell (Buzen, BCMP)

- *Grundmodell des Multiprogramm-betriebs* (quasi-parallele Abarbeitung von N Nutzerjobs)
- Central-Server-Modell (*J.P. Buzen* bzw. *BCMP*)



Lösung:

a) **einklassig:**

- *geschlossenes BN*
  (Lösung über sog. Buzen-Algorithmus, Gordon-Newell-Theorem)
- *offenes BN* : In/Output zur Umgebung
  (Lösung mit Jackson-Algorithmus)

b) **mehrklassig:**

- BCMP-Algorithmus (offenes bzw. geschlossenes BN)

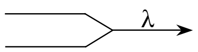
Strukturelemente

Quelle / Senke

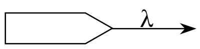
Quelle (source): Erzeugung von Forderungen (Forderungsstrom)

- zufällig
- Zwischenankunftszeit $T_A = \frac{1}{\lambda}$
- Verteilungsfunktion bzw. -gesetz

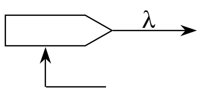
(in Simulation: Zufallszahlengenerator)



offene (unendliche) Quelle (erzeugt ∞ Anzahl von Fo)

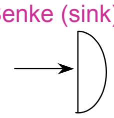


geschlossene (endliche) Quelle (endliche Fo-Anzahl)



mit Rückführung von Fo (Quellverweilzeit und -verteilung)

Senke (sink): Vernichtung von Forderungen



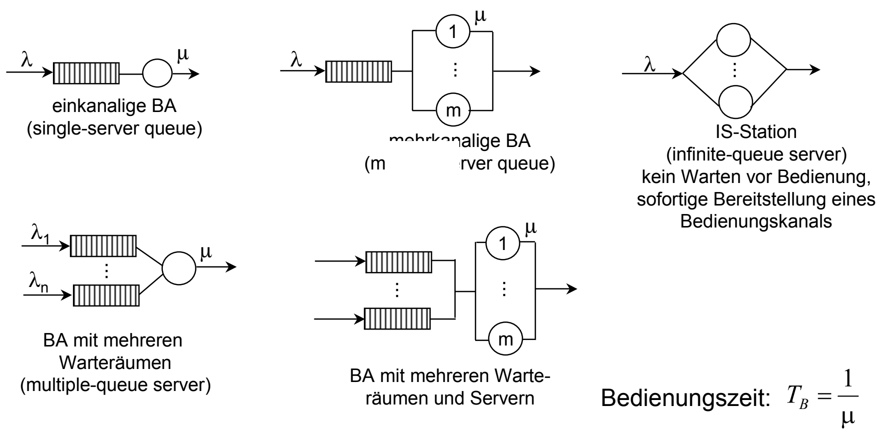
- Gesamt-Senke oder
- Senke an jedem Bediener

} identisch

Strukturelemente

Bedienungsanlage (Warteraum, Bediener)

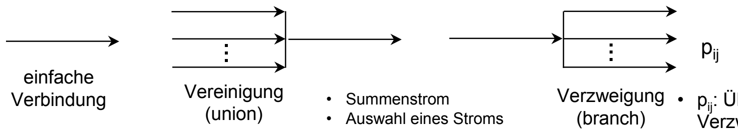
[Warten und] Bedienen von Forderungen sowie spezifische Funktionen



Bedienungszeit: $T_B = \frac{1}{\mu}$

Strukturelemente

Übergäng (transition probability)



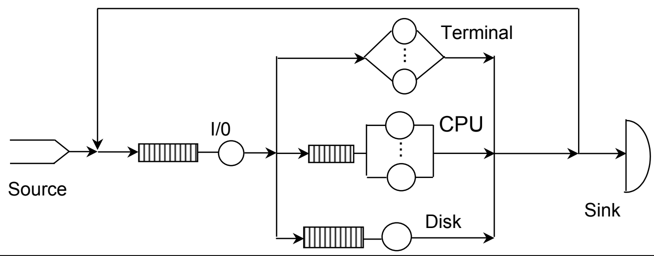
- Summenstrom
- Auswahl eines Stroms

- p_{ij}: Übergangs- oder Verzweigungs-Wkt. i -> j
- zyklische / stochastische Auswahl eines Zweiges

Forderungen, Kunden (demands, customer, events)

- Identifikation (Name)
- Phase:
  - Ankunftszeit (Verteilung, Intensität, Häufigkeit)
  - Klasse, Status, Priorität, Abhängigkeit

Beispiel



Draft
(in Bearbeitung)

Modellierung

Messen, Modellieren und Bewerten (MMB) von verteilten Systemen

- Modellklasse Bedienungssysteme und Bedienungsnetze
  - Aufgabenstellung, Methodologie
  - Grundbegriffe, Grundmodelle
- Analyseverfahren (analytisch) für Bedienungssysteme/-netze
  - Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)
  - Offene Bedienungsnetze (Jackson Algorithmus)
  - Geschlossene Bedienungsnetze
    (Convolution Algorithmus, Mean Value Analysis)
- Operationale Analyse
- Stochastische Petri-Netze

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Homogene Markovsche Kette und M/M/r/1

- M/M/1/r-Bedienungssystem erfüllt die Voraussetzungen einer homogenen Markovschen Kette ~> Analyse mit Hilfe der Chapman-Kolmogorov-DGL'n.
- Kann auch als Geburts- und Todesprozess modelliert werden („Wald", und mit den damit verbundenen Methoden, z.B. als Punkt-Prozess).

Grundgleichungen: Chapman-Kolmogorov-Gln.

- Im stationären Fall (eingeschwungener Zustand t --> ∞) vereinfachen sich diese DGL'n zu einem linearen algebraischen Glg.-System für die stationären Zustands-Wktn. $P_i = P(i)$

$$\boxed{\sum_{\substack{(i)\\ i \neq j}} q_{ij} \cdot P_i - q_j \cdot P_j = 0} \quad \text{i := Anzahl der Forderungen im System, alle Zustände } j = 0, 1, \ldots \qquad (3)$$

mit der Normierungsbedingung

$$\boxed{\sum_{(j)} P_j = 1} \quad j = 0, 1, \ldots \qquad (4)$$

q_{ij} : Übergangsintensitäten
es gilt die Konservativitätsbedingung

$$\boxed{q_j = \sum_{\substack{(i)\\ i \neq j}} q_{ji} < +\infty} \qquad (5)$$

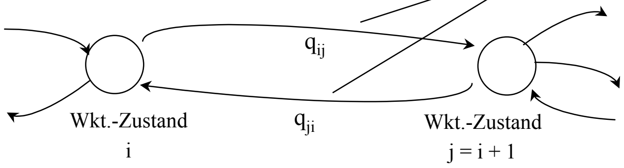
<BSE-MM-010>

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Markov- oder Übergangsgraph

Darstellung der Zustände und Übergangsintensitäten

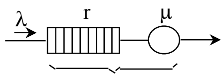
jeweils Σ aller möglichen Ereignisse



<u>Übergang</u>: wenn eines der möglichen Ereignisse eintritt

<u>Zustände</u>: Markov-Graph durchläuft alle Wkt.-Zustände j = 0, 1, 2, ... (z.B. Anzahl der Fo)

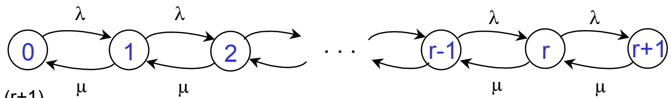
Markov-Graph für ein M/M/1/r - System



max. (r + 1) Forderungen im System

Zustand
(Anzahl Fo)

Zustände 0 ... (r+1)



1*μ (da 1 Bedienungskanal)

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Zustands-Gln. des M/M/1/r - Systems

Lt. Graph ergeben sich die Übergangsintensitäten zu:

$q_{i,\,i+1} = \lambda_i$
$q_{i,\,i-1} = \mu_i\,;\quad q_{ij} = 0$ sonst.
$q_i = \lambda_i + \mu_i$

Damit folgt aus (3) ... (5)

j = 0: $\quad (\;\div\; + q_{10} \cdot P_0) - q_0 \cdot P_0 = 0$

keine Übergangs-
intensitäten weiter

$q_0 = q_{01} + \;\div\; = \lambda$

$1 \le j \le r$: $\quad (q_{j-1,j} \cdot P_{j-1} + q_{j+1,j} \cdot P_{j+1}) - q_j \cdot P_j = 0$

$q_j = q_{j,j-1} + q_{j,j+1} = \mu + \lambda$

$j = r + 1$: $\quad (q_{r,r+1} \cdot P_r + \;\div\;) - q_{r+1} \cdot P_{r+1} = 0$

$q_{r+1} = q_{r+1,r} \;+\; \div \;=\; \mu$

Mit den obigen Übergangsintensitäten folgt daraus das lineare Glg.-System

$$
\begin{aligned}
&-\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0 \\
&\lambda \cdot P_{j-1} - (\mu + \lambda) \cdot P_j + \mu \cdot P_{j+1} = 0 \qquad 1 \le j \le r \qquad\qquad (6) \\
&\lambda \cdot P_r - \mu \cdot P_{r+1} = 0
\end{aligned}
$$

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Stationäre Zustands-Wktn.

Rekursive Auflösung der Zustands-Gln. (6)

$$P_{r+1} = \rho \cdot P_r$$
$$P_r = \rho \cdot P_{r-1}$$
$$\vdots$$
$$P_1 = \rho \cdot P_0$$

somit

$$P_j = \rho \cdot P_{j-1} = \rho \cdot \rho \cdot P_{j-2} = \cdots = \rho^n \cdot P_{j-n}$$
$$= \rho^2 \cdot P_{j-2} = \cdots = \rho^n \cdot P_{j-n} = \rho^j \cdot P_0 \quad \text{für } j = n$$

Letztlich nach lt. (9)

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho \dfrac{1-\rho^{r+1}}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Glg. (6) erlaubt somit eine Rekursionsformel für die stationären Zustands-Wktn. $P_j = P(j)$

$$\boxed{P_j = P(j) = \rho \cdot P_{j-1} = \rho^j \cdot P_0 \quad \text{mit } \rho = \frac{\lambda}{\mu}} \qquad 1 \leq j \leq r+1 \qquad (7)$$

bzw. für lastabhängige $\rho_j = \dfrac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$ in allgemeiner Form

$$P_j = \rho_j \cdot P_{j-1} = \left(\prod_{i=1}^{j} \rho_i\right) \cdot P_0$$

<BSE-MM-040>

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Leer-Wktn.

Wkt., dass sich keine Fo im System befindet. ~> folgt aus der Normierungsbedingung

$$\sum_{(j)} P_j = 1 \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, r+1$$

$$\left(\sum_{j=0}^{r+1} \rho^j\right) \cdot P_0 = 1$$

$$P_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{r+1} \rho^j\right) = 1$$

bzw. lastabhängig $\rho_i = \dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{r+1} \rho^j\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{j=1}^{r+1} \left(\prod_{i=1}^{j} \rho_i\right)\right]^{-1} \qquad (8)$$

Umformung

$$\sum_{j=1}^{r+1} \rho^j = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^{r+1} = \rho \cdot 1 + \rho \cdot \rho + \rho \cdot \rho^2 + \cdots + \rho \cdot \rho^r = \sum_{j=1}^{r+1} \rho \cdot \rho^{j-1} =$$

$$= \begin{cases} \rho \dfrac{1-\rho^{r+1}}{1-\rho} & \rho < 1 \\ r+1 & \rho = 1 \end{cases}$$

Summe einer endlichen geometrischen Reihe (bekannte Summenformel, $a_1 = \rho$)

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q < 1 \\ a_1 \cdot n & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

<BSE-MM-050>

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Leer-Wktn. (2)

Damit folgt aus (13) die Leer-Wkt.

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{r+1} \rho^j} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}} & \rho < 1 \\ \dfrac{1}{r+2} & \rho = 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Zusammenfassung von (7) und (8) ergibt die stationären Zustands-Wktn. (einschließlich P_0)

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\cdot\rho^j}{1-\rho^{r+2}} & \rho < 1 \\ \dfrac{1}{r+2} & \rho = 1 \end{cases} \qquad \text{für } j = 0, 1, ..., r+1 \qquad (10)$$

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Zustandsgrößen eines M/M/r/1-Systems

- Anlagenlänge
  Mittlere Anzahl der in einer Anlage verweilenden Fo, d.h. wartend und bedient

$$L_V = E[N] = \sum_{j=0}^{r+1} j\cdot P_j = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(r+2)\cdot\rho^{r+2}}{1-\rho^{r+2}} & \rho < 1 \\ \dfrac{r+2}{2} & \rho = 1 \end{cases}$$

- Auslastung
  Wkt., dass die Anlage aktiv ist, d.h. mindestens 1 Fo in der Anlage

$$\eta = \sum_{j=1}^{r+1} P_j = 1 - P_0 = \begin{cases} \dfrac{\rho\cdot(1-\rho^{r+1})}{1-\rho^{r+2}} & \rho < 1 \\ \dfrac{r+1}{r+2} & \rho = 1 \end{cases} \qquad (11)$$

- Durchsatz
  Rate für die Bedienung und Verlassen einer Fo

$$D = \sum_{j=1}^{r+1} \mu\cdot P_j = \mu\cdot\sum_{j=1}^{r+1} P_j = \mu\cdot\eta$$

- Mittlere Verweilzeit
  Folgt aus der Little-Formel
  $L = \lambda\cdot W$

$$T_V = \frac{L_V}{\lambda}$$

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Zustands-Wktn. und -Größen eines M/M/1-Systems

Für ∞ großen Warteraum folgen mit $\lim r -> \infty$ die Zustands-Wktn. und -Größen eines M/M/1-Systems zu ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$)

Zustands-Wktn.: $P_j = (1-\rho) \cdot \rho^j \quad j = 0, 1, ..., r+1$

Leer-Wkt.: $P_0 = 1 - \rho$

(12)

Anlagenlänge: $L_V = \frac{\rho}{1-\rho}$

Warteschlangenlänge: $L_W = L_V - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ $\qquad L_V = L_W + \rho \;\text{~>}\; L_W = L_V - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

aus Little $L_W = \lambda \cdot T_W = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Auslastung (Besetzt-Wkt.): $\eta = 1 - P_0 = \rho$

Durchsatz: $D = \mu \cdot \eta = \mu \cdot \rho = \lambda$

Verweilzeit: $T_V = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$

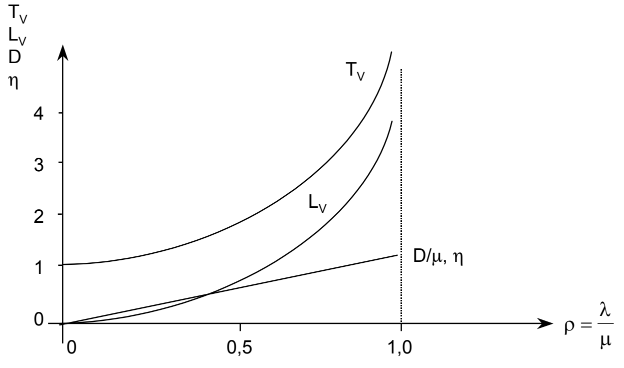
Mittlere Wartezeit: $T_W = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$ $\qquad T_W = T_v - T_B = T_V - \frac{1}{\mu}$

<BSE-MM-080>

Einzelne Bedienungssysteme (M/M/1/r)

Zustandsgrößen eines M/M/1-Systems (2)

Verlauf der Zustandsgrößen eines M/M/1-Systems über das Lastangebot $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$



asymptotische Annäherung
an Pol $\rho = 1$

<BSE-MM-090>

Offene Bedienungsnetze

Analyseverfahren offener Bedienungsnetze

- Voraussetzungen und Verfahren
- Produktform und Jackson-Theorem
- Lösungen für Produktformnetze auf Basis der Zustands-Wktn.
  - Offene Bedienungsnetze mit einer Forderungsklasse ("Jackson-Algorithmus")
  - Offene Bedienungsnetze mit mehreren Forderungsklassen ("BCMP-Algorithmus")

<OBN-AV-010>

Offene Bedienungsnetze

Voraussetzungen und Verfahren

Bedienungsnetz: Ausgang mindestens eines BS wird zum Eingang eines anderen BS.

Offenes Bedienungsnetz (open queueing network) dann, wenn Forderungs-Ankünfte *von außen* und Forderungs-Abgänge *nach außen* möglich sind.

Folgende Kenngrößen charakterisieren ein OBN (1-klassig):

M: Anzahl der (inneren) Bedienungsanlagen BA_i (i = 0 ... M)
(BA_0 symbolisiert die Außenwelt)

λ_{oi} : mittlere Ankunftsrate von außen am Knoten i (BA_i)

λ_i : gesamte mittlere Ankunftsrate von Fo an der i-ten Bedienungsanlage
(von außen und von anderen BA)

r_i : Anzahl der Bedienungskanäle der BA_i (Bedienungs-Kanäle einer BA_i seien identisch, jeder mit der Bedienungsrate μ_i, und mit der identischen Warteschlangendisziplin)

μ_i : mittlere Bedienungsrate der BA_i

$\mu_i = \frac{1}{T_{B_i}}$ T_{Bi} : Erwartungswert der Bedienungszeit

Die Bedienungsraten können auch lastabhängig sein: $\mu_i = \mu_i(n_i)$

<OBN-AV-030>

Offene Bedienungsnetze

Lösungen für OBN (Berechnungsalgorithmen)

- Basis: Zustands-Wktn
  exakte Lösung, Produktform-Netze (PF)
  - Jackson-Algorithmus (1957): 1-klassig, PF
    abgeleitet für exponentielle Netze mit FIFO-Disziplin
  - BCMP-Algorithmus (1975): mehrklassig, PF
    (Baskett, Chandy, Muntz, Palacios)
    Erweiterung auf Typen 1 ... 4 für PF-Netze
- Basis: Mittelwertanalyse
  Erweiterung der MVA von GBN auf OBN und gemischte Netze
  - Zahorian (1981)
  - Totzauer (1981)
  - Akyildiz / Bolch (1983)

Offene Bedienungsnetze / Produktform

Produktform der Zustands-Wktn.

Mit den Arbeiten von J.R. Jackson (1957) gelang der Durchbruch bei der Analyse von (offenen) Bedienungsnetzen.

Die Analyse von offenen Bedienungsnetzen mit Anlagen vom Jackson-Typ (exponential-verteilte T_B, FIFO-Strategie, M/M/r_i-Anlagen) führt zur Produktform der Zustands-Wktn.:

$$\boxed{P(\vec{n}) = P(n_1, n_2, \cdots, n_M) = \prod_{i=1}^{M} P_i(n_i)} \qquad (1)$$

M: Anzahl der BA

n_i: Fo-Anzahl im Knoten i
(n = 0, 1, 2, ...)

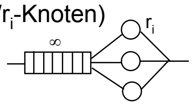
Für solche PF-Netze sind exakte Lösungen möglich.

Eine Produktform für offene Bedienungsnetze (hier 1-klassig) liegt vor, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind (hierbei Netze mit M/M/r_i-Knoten betrachtet).

Offene Bedienungsnetze / Produktform

Produktform für OBN

Folgende Bedingungen sind zu erfüllen (PF: 1-klassige Netze, mit M/M/r_i-Knoten)



- Netz besteht aus *M Bedienungsanlagen*, alle mit FIFO-Disziplin
- Gesamtanzahl der Fo im Netz ist *unbeschränkt*
- Jede Anlage BA_i besteht aus *$r_i \geq 1$ Bedienungskanälen* mit der *Bedienungsrate* μ_i $(i = 1 \ldots M)$
  Die Bedienungsraten können auch lastabhängig sein:
  $\mu_i = \mu_i(n_i)$, d.h. abhängig von der jeweiligen Fo-Zahl im Knoten i
- Bedienungszeit einer Fo in der BA_i ist *exponentiell* verteilt mit dem Mittelwert $T_{B_i} = \frac{1}{\mu_i}$
- Jeder Knoten kann *Fo-Ankünfte von außen* haben, wobei die Zwischenankunftszeiten exponentiell verteilt sind mit der *Ankunftsrate* λ_{oi}.
  Ankunftsraten können auch lastabhängig sein.
- Das System befinde sich im Gleichgewichtszustand

$$\boxed{\begin{array}{c}\rho_i < 1 \\ \text{d.h. } \lambda_i < \mu_i \cdot r_i\end{array}} \qquad (2)$$

Stabilitätsbedingung

λ_i : Gesamt-Ankunftsrate an einer Station i

Offene Bedienungsnetze / Produktform

Produktform für OBN (2)

- Verzweigungs-Wktn.
  charakterisieren die Struktur des Systems und die Arbeitslast (Forderungen):
  p_{ij} : Wkt., dass eine in Anlage i fertig bediente Fo zur Anlage j verzweigt
  p_{oi}: Wkt., dass eine von aussen kommende Fo die Anlage i betritt
  (0 kennzeichnet die Quelle bzw. Außenwelt)
  p_{io}: Wkt., dass eine Fo nach Bedienung in der Anlage i das System verlässt
  (0 kennzeichnet die Senke bzw. Außenwelt)

$$\boxed{p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{M} p_{ij}} \qquad (3)$$

- Zustand eines Bedienungsnetzes
  definiert durch den Forderungs-Vektor :

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$$

n_i : Anzahl verweilender Fo in der Anlage i, wartend und in Bedienung

Offene Bedienungsnetze / Produktform

Produktform für OBN (3)

Mit

λ : Gesamt-Forderungsstrom, erzeugt in der Fo-Quelle,

λ_i : Ankunftsrate an einer Anlage i,

p_{oi} : Verteilung der Gesamt-Außenankünfte auf die einzelnen Anlagen i,

kann das Glg.-System für die λ_i überführt werden in

$$\boxed{\sum_{j=1}^{M} (p_{ji} - \delta_i^j) \cdot \lambda_j = -p_{0i} \cdot \lambda} \qquad i = 1, 2, ..., M \qquad (4)$$

mit $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \quad \text{Kronecker-Symbol} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\lambda_{0i} = p_{0i} \cdot \lambda \qquad \lambda = \sum \lambda_{0i} = \sum p_{0i} \cdot \lambda = \lambda \qquad \sum p_{0i} = 1$$

(4) : inhomogenes lineares Glg.-System für λ_i (i = 1 ... M)

Infolge D ≠ 0 (D: Koeffizientendeterminante der linken Seite) besitzt das Glg.-System (4) linear unabhängige nichttriviale Lösungen.

<OBN-PF-050>

Offene Bedienungsnetze / Produktform

Produktform für OBN (5)

In ausgeschriebener Form lautet das Glg.-System (4)

$$\begin{array}{ll}
i = 1: & (p_{11} - 1) \cdot \lambda_1 + p_{21} \cdot \lambda_2 + p_{31} \cdot \lambda_3 + \cdots + p_{M1} \cdot \lambda_M = -p_{01} \cdot \lambda \\
i = 2: & p_{12} \cdot \lambda_1 + (p_{22} - 1) \cdot \lambda_2 + p_{32} \cdot \lambda_3 + \cdots + p_{M2} \cdot \lambda_M = -p_{02} \cdot \lambda \\
i = 3: & p_{13} \cdot \lambda_1 + p_{23} \cdot \lambda_2 + (p_{33} - 1) \cdot \lambda_3 + \cdots + p_{M3} \cdot \lambda_M = -p_{03} \cdot \lambda \\
 & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
i = M: & p_{1M} \cdot \lambda_1 + p_{2M} \cdot \lambda_2 + p_{3M} \cdot \lambda_3 + \cdots + (p_{MM} - 1) \cdot \lambda_M = -p_{0M} \cdot \lambda
\end{array} \qquad (4a)$$

<OBN-PF-060>

Offene Bedienungsnetze / Produktform

Theorem von Jackson

- Es sei **P**$(n_1, ..., n_M)$ die Wkt., dass sich System im Zustand $\vec{n} = (n_1, ..., n_M)$ befindet.
- Problem: Bestimmung der Wktn. aller Systemzustände im statischen Gleichgewicht, aus denen sich dann die wichtigen Leistungskenngrößen ableiten lassen.

Zur Lösung dieses Problems dient das klassische Theorem von Jackson (1957):
Wenn es für Glg. (4) bzw. (4a) eine *eindeutige* Lösung gibt, die der folgenden Ungleichung genügt:

$\lambda_i < \mu_i \cdot r_i$ *(Stabilitätsbedingung)*

dann wird der Gleichgewichtszustand der Wktn. im OBN durch die sog. Produktform (Produkt der Zustands-Wktn., sog. Rand-Wktn.) beschrieben:

$$\boxed{P(\vec{n}) = P(n_1, \cdots, n_M) = \prod_{i=1}^{M} P_i(n_i) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, ...} \qquad (5)$$

$P_i(n_i)$: Wkt., dass sich im Knoten i genau n_i Fo befinden (wartend und in Bedienung)

Die einzelnen BA_i können somit als *voneinander unabhängige M/M/r_i - Systeme* mit der *Ankunftsrate* λ_i und der *Bedienungsrate* μ_i behandelt werden. Die λ_i folgen aus dem Glg.-System (4) und für die M/M/r_i-Systeme gelten bekannte Formeln (mehrklassig: BCMP).

<OBN-PF-070,080>

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Offene Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse („Jackson“-Algorithmus)

Betrachtet werden Bedienungsanlagen vom Typ 1:

M/M/r-Knoten: 1-bzw. mehrkanalig (r_i : Anzahl Bedienungskanäle $r_i \geq 1$) } identisch für alle Kanäle
FIFO-Disziplin
Exponentiell verteilte Bedienungszeit
Bedienungsrate μ_i (auch lastabhängig $\mu_i(n_i)$)

Die Ankunftsraten λ_i folgen aus dem linearen Glg.-System (4) bzw. (4a)

$$\lambda_i = \lambda_{oi} + \sum_{j=1}^{M} p_{ji}\lambda_j \qquad i = 1, 2, ..., M$$

wobei die λ_i der Stationaritätsbedingung (2) genügen müssen:

$$\lambda_i < \mu_i \cdot r_i$$

Die Zustands-Wktn. des OBN bestimmen sich aus der Produktform (1):

$$P(\vec{n}) = P(n_1, ..., n_M) = \prod_{i=1}^{M} P_i(n_i)$$

Falls λ_i berechnet sind, kann man nun die Angebote $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ (i = 1 ... M) ermitteln.

<OBN-JA-010>

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

M/M/r-System

Für M/M/r-Bedienungsanlagen ($r_i \geq 1$) gilt für die Zustands-Wktn.

$$P_i(n_i) = \begin{cases} P_i(0) \cdot \dfrac{(r_i \cdot \rho_i)^{n_i}}{n_i\,!} & \text{für } n_i \leq r_i \\ P_i(0) \cdot \dfrac{r_i^{r_i} \cdot \rho_i^{n_i}}{r_i\,!} & \text{für } n_i > r_i \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, ..., M \\ n_i = 0, 1, 2, ... \end{matrix} \qquad (6)$$

wobei die Leer-Wkt. $P_i(0)$ aus der Bedingung $\sum_{i=1}^{M} P(n_i) = 1$

folgt zu

$$P_i(0) = \frac{1}{\sum_{n_i=0}^{r_i-1} \dfrac{(r_i \cdot \rho_i)^{n_i}}{n_i\,!} + \dfrac{(r_i \cdot \rho_i)^{r_i}}{r_i\,! \cdot (1-\rho_i)}} \qquad (7)$$

Dabei ist

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{r_i \cdot \mu_i} < 1 \qquad (8)$$

die Auslastung ("Angebot") des M/M/r-Systems

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

M/M/r-System (2)

Speziell gilt für ein M/M/1-System (r_i = 1 Bedienungskanäle)

$$P_i(n_i) = (1-\rho_i) \cdot \rho_i^{n_i} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, ..., M \\ n_i = 0, 1, 2, ... \end{matrix}$$

bzw. rekursiv $\qquad (9)$

$$P_i(n_i) = P_i(n_i - 1) \cdot \rho_i$$

mit der Auslastung ("Angebot") des M/M/1-Systems

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$$

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Zustandsgrößen

Die Zustandsgrößen (L_V, T_V, D, η) können aus Zustands-Wktn. direkt berechnet werden.

OBN mit M/M/1-Bedienungsanlagen (Anlage i)

Auslastung des Knotens i: $\eta_i = \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$

Durchsatz am Knoten i: $D_i = \lambda_i = \mu_i \cdot \eta_i$ (10)

Gesamtdurchsatz des Netzes: $D = \lambda = \sum_{i=1}^{M} \lambda_{0i}$

Mittlere Anzahl verweilender Fo im Knoten i:

$$L_{V_i} = \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i \cdot P_i(n_i) = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

und die Varianz der Anzahl verweilender Fo

$$\sigma^2_{L_{V_i}} = \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i^2 \cdot P_i(n_i) - L^2_{V_i} = \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)^2}$$

<OBN-JA-040>

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Zustandsgrößen (2)

M/M/1-Bedienungsanlagen (Fortsetzung) zu (10)

Mittlere Verweilzeit einer Fo im Knoten i (nach Little) $T_{V_i} = \frac{L_{V_i}}{\lambda_i} = \frac{1}{\mu_i \cdot (1-\rho_i)}$

$T_{V_i} = T_{W_i} + T_{B_i}$

Mittlere Wartezeit einer Fo im Knoten i $T_{W_i} = T_{V_i} - \frac{1}{\mu_i} = \frac{\rho_i}{\mu_i \cdot (1-\rho_i)}$

Mittlere Warteschlangenlänge (Anzahl wartender Fo) im Knoten i (nach Little) $L_{W_i} = \lambda_i \cdot T_{W_i} = \frac{\rho_i^2}{1-\rho_i}$

Für das Gesamt-Netz, bestehend aus M/M/1-Anlagen, gilt

Gesamt-Durchsatz des Netzes

$$D_N = \lambda = \sum_{i=1}^{M} \lambda_{0i}$$ (11)

Mittlere Gesamt-Verweilzeit der Fo im Netz (nach Little)

$$T_{V_N} = \frac{L_V}{D_N} = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{M} L_{V_i} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{M}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

<OBN-JA-050,060>

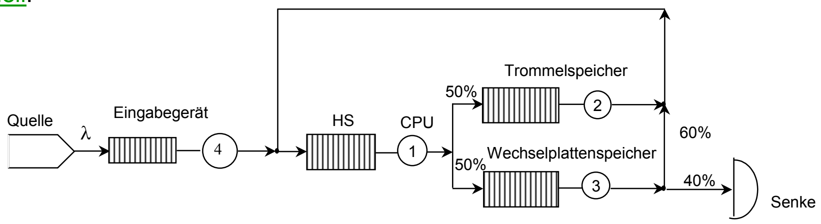
Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Beispiel 1

OBN mit 4 Anlagen (M = 4)

Jede Bedienungsanlage ist vom Typ 1 (M/M/1); Typ 1: exponentiell verteilte T_B, FIFO

Modell:



Quelle erzeugt Aufträge, die über das Eingabegerät eingelesen werden.
Die Aufträge werden multiplex in der Zentraleinheit (HS + CPU) und 2 externen Speichern verarbeitet.
Nach Fertigstellung (im WPS) werden die Aufträge in die Senke abgelegt.

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Beispiel 1 (Fortsetzung)

OBN mit 4 Anlagen (M = 4)

Bedienungsnetz: M = 4 Anlagen
(offen) K = 1 Klasse

Forderungsstrom: Poisson-Strom, exponentiell verteilte Zwischenankunftszeiten mit λ = 4 Aufträge/s (T_A = 0,25 s)

Bedienungsanlagen: M/M/1-Knoten (Typ 1), d.h. exponentiell verteilte Bedienungszeit, FIFO

	Bedienungszeiten i = 1	2	3	4	
T_{Bi}	0.04	0.03	0.06	0.05	[s]
$\mu_i = \frac{1}{T_{Bi}}$	25	33,3	16,7	20	[1/s]

Verzweigungs-Wktn: p_{oi} von außen
p_{io} nach außen
p_{ij} innerhalb

$$p(0...4,\ 0...4) = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Beispiel 1 (Fortsetzung)

OBN mit 4 Anlagen (M = 4)

a.) Ankunftsraten λ_i : folgen aus dem Glg.-System (4) bzw. (4a)

$$\begin{aligned}
(p_{11}-1)\,\lambda_1 + p_{21}\lambda_2 + p_{31}\lambda_3 + p_{41}\lambda_4 &= -p_{01}\lambda \\
p_{12}\lambda_1 + (p_{22}-1)\,\lambda_2 + p_{32}\lambda_3 + p_{42}\lambda_4 &= -p_{02}\lambda \\
p_{13}\lambda_1 + p_{23}\lambda_2 + (p_{33}-1)\,\lambda_3 + p_{43}\lambda_4 &= -p_{03}\lambda \\
p_{14}\lambda_1 + p_{24}\lambda_2 + p_{34}\lambda_3 + (p_{44}-1)\,\lambda_4 &= -p_{04}\lambda
\end{aligned}$$

bzw. mit den Werten für p_{ij}

$$\begin{aligned}
-\lambda_1 + \lambda_2 + 0.6\,\lambda_3 + 1\cdot\lambda_4 &= 0 \\
0.5\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\
0.5\,\lambda_1 - \lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

Auflösung

$$-\lambda_4 = -\lambda \quad \sim> \quad \lambda_4 = \lambda$$

$$\begin{aligned}
-\lambda_1 + \lambda_2 + 0.6\,\lambda_3 &= -\lambda \quad | \; + \\
0.5\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \quad | \; + \quad \longrightarrow \lambda_2 = 1/2\,\lambda_1 = 5/2\,\lambda \\
0.5\,\lambda_1 - \lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Beispiel 1 (Fortsetzung)

OBN mit 4 Anlagen (M = 4)

$$\longrightarrow \lambda_2 = 1/2\,\lambda_1 = 5/2\,\lambda$$

$$\begin{aligned}
-0.5\lambda_1 + 0.6\,\lambda_3 &= -\lambda \quad | \; + \\
0.5\lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \quad | \; + \quad \longrightarrow \lambda_1 = 2\,\lambda_3 = 5\,\lambda \\
\hline
-0.4\,\lambda_3 &= -\lambda \quad \longrightarrow \lambda_3 = 10/4\,\lambda = 5/2\,\lambda
\end{aligned}$$

Ergebnis der λ_i (mit $\lambda = 4$)

$\lambda_1 = 5\lambda = 20$ Aufträge/s $< \mu_1 = 25$ Aufträge/s

$\lambda_2 = 5/2\,\lambda = 10$ Aufträge/s $< \mu_2 = 33.3$ Aufträge/s

$\lambda_3 = 5/2\,\lambda = 10$ Aufträge/s $< \mu_3 = 16.7$ Aufträge/s

$\lambda_4 = \lambda = 4$ Aufträge/s $< \mu_4 = 20$ Aufträge/s

b.) Stationaritätsbedingung $\lambda_i < \mu_i$ erfüllt ($\lambda_i < \mu_i \cdot r_i$, mit $r_i = 1$)

~> somit M/M/1-Formeln anwendbar

c.) Bestimmung der Belegungs-Wktn. für M/M/1-Systeme:

Glg. (9) ~> $P_i(n_i) = (1-\rho_i)\,\rho_i^{n_i}$ bzw. rekursiv $P_i(n_i) = P_i(n_i-1)\cdot\rho_i$

Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Beispiel 1 (Fortsetzung)

OBN mit 4 Anlagen (M = 4)

Angebot

i =	1	2	3	4
$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$	0.8	0.3	0.6	0.2
$1-\rho_i$	0.2	0.7	0.4	0.8

Belegungs-Wktn.

Fo-Zahl k	Anlage 1 $P_{B1}(n_1 = k)$	Anlage 2 $P_{B2}(n_2 = k)$	Anlage 3 $P_{B3}(n_3 = k)$	Anlage 4 $P_{B4}(n_4 = k)$
0	0.2	0.7	0.4	0.8
1	0.16	0.21	0.24	0.16
2	0.128	0.063	0.144	0.032
3	0.1024	0.0189	0.0864	0.0064
4	0.08192	0.00567	0.05184	0.00128
5	0.06554	0.00170	0.03110	0.000256
⋮				

$$P_i(n_i) = (1-\rho_i)\,\rho_i^{n_i}$$
$$= P_i(n_i-1)\cdot\rho_i$$

d.) Bestimmung der Zustandsgrößen (Glg. (10))

Anlage m	BA-“Länge“ L_{Vm}	Verweilzeit T_{Vm} [s]	Durchsatz D_m [Auftr./s]	Auslastung η_m
1	4.00000	0.20000	20.0	0.8
2	0.42857	0.04286	10.0	0.3
3	1.50000	0.15000	10.0	0.6
4	0.25000	0.06250	4.0	0.2

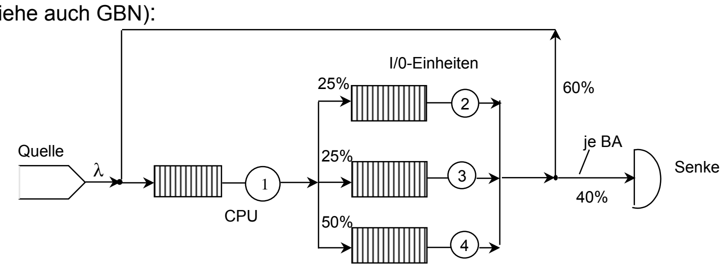
Offene Bedienungsnetze (einklassig, Jackson-Algorithmus)

Beispiel 2

OBN mit 4 Anlagen (M = 4)

Jede Bedienungsanlage ist vom Typ 1 (M/M/1); Typ 1: exponentiell verteilte T_B, FIFO

Modell (siehe auch GBN):



Ges.: A) Leistungsanalyse des Modells (P_i, L_{Vi}, ..., η_i)
B) Bewertung
Gesamt-Durchsatz
Gesamt-Verweilzeit
Anzahl Warteplätze für WS_4

Bedienungszeiten

i =	1	2	3	4
T_{Bi}	0.125	1	0.5	0.5

Geschlossene Bedienungsnetze

Lösungen für Produktform-Netze (Mittelwertanalyse)

- Überblick
- Convolution- (oder Faltungs-) Algorithmen
  - Bedienungsnetze mit einer Forderungsklasse ("Buzen-Algorithmus")
  - Bedienungsnetze mit mehreren Forderungsklassen ("BCMP-Algorithmus")
- Mittelwertanalyse (MVA)
  - Grundlagen der MVA (Mean Value Analysis)
  - Bedienungsnetze mit einer Forderungsklasse
  - Bedienungsnetze mit mehreren Forderungsklassen

Grundlagen der Mittelwertanalyse

Prinzip der Mittelwertanalyse

MVA (Mean Value Analysis) ist

- *einfach* anwendbar
- numerisch *stabil*, *schnelle* Algorithmen
- günstig geeignet für *hohe* Belastungen
- arbeitet *ohne* Zustands-Wktn., gestattet aber eine *nachträgliche* Berechnung der Zustands-Wktn.

Unter Verwendung des Ankunftstheorems und Littleschen Gesetzes kann man aus den Zustandsgleichungen die Wkts.-Ausdrücke eliminieren und erhält Ausdrücke, in denen nur noch die Zustandsgrößen

- L_V: Anzahl verweilender Forderungen,
- T_V: Verweilzeit,
- D: Durchsatz,
- η: Auslastung

enthalten sind.

Grundlagen der Mittelwertanalyse

Entwicklung der Mittelwertanalyse

- MVA wurde 1978 durch M. Reiser und S. Lavenberg entwickelt.
- Sie gilt für *geschlossene Bedienungsnetze* mit einer oder mehreren Forderungsklassen bei Erfüllung der Produktform.
  Sie eignet sich insbesondere für hohe Belastungen.
- Eine Erweiterung auf *offene und gemischte Netze* wurde u.a. durch Sauer/Chandy (1981), Totzauer (1981), Zahorjan (1981) und Bolch/Akyildiz (1983) vorgenommen.
- Neben den exakten Lösungen, die aber sehr zyklusaufwendig sind, gibt es auch *Näherungslösungen* der Produktformausdrücke auf Basis heuristischer Annahmen.
  Effektive Algorithmen mit ausreichender Genauigkeit wurden u.a. von Bard (1979,80), Schweitzer (1979) und Chandy/Neuse (1982) entwickelt.
- Die Mittelwertanalyse (und auch die Operationale Analyse) bilden somit eine Alternative zu den stochastischen Verfahren auf Basis der stationären Zustands-Wktn.

Grundlagen der Mittelwertanalyse

Literatur zu den theoretischen Grundlagen der Mittelwertanalyse

Reiser, M.; Lavenberg, S.S.: Mean-value analysis of closed multichain queuing networks. Journal of the ACM, 27(1980)2, S. 313-322

Denning, P.J.; Buzen, J.P.: The Operational Analysis of Queueing Network Models. Computing Surveys, 10(1978)3, S. 225-261

Chandy, K.M.; Neuse, D.: Linearizer: A Heuristic Algorithm for Queueing Network Models of Computing Systems. Communications of the ACM, 25(1982)2, S. 126-134

Voraussetzungen der MVA

- Ankunftstheorem (arrival theorem) über die Forderungsverteilung zum Zeitpunkt der Ankunft (Reiser/Kobayashi, König):

  Die Verteilung der verweilenden Forderungen in einem geschlossenen Bedienungsnetz bei Eintritt einer Forderung in eine Bedienungsanlage i ist gleich der Verteilung der Forderungen im System, wenn sich im System eine Forderung weniger befindet (Anm.: Ankunftstheorem ist für alle PF-Netze erfüllt).

Grundlagen der Mittelwertanalyse

Voraussetzungen der MVA (2)

- Theorem von Little: $L = \lambda \cdot W$

  Dieses Theorem wird auf das gesamte Netzwerk mehrfach angewandt (Bedienungsanlagen und Klassen).

Die *Gesetze der MVA* gelten für alle Netze, die das *lokale Gleichgewicht* erfüllen, d.h. für alle Produktform-Netze:

Typ 1-Knoten (M/M/m): ein- bzw. mehrkanalige BA mit exponentiell verteilter Bedienungszeit und FIFO-Disziplin und 1 Fo-Klasse (bzw. k Klassen und klassenunabhängiger T_B) (bei mehreren Fo-Klassen und klassenabhängiger Bedienungszeit ist PF verletzt → hierfür wurde von König über Wkts.-Beziehungen eine Näherungslösung abgeleitet).

Typ 2-Knoten (M/G/1): 1-kanalige BA mit Processor-Sharing-Disziplin
Typ 3-Knoten (M/G/∞): *IS-Station* (ohne Wartebedingung)
Typ 4-Knoten (M/G/1): 1-kanalige BA mit LIFO-PR-Disziplin

} allgemeine Bedienungszeitverteilung

<GBN-MA-070>

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Theoretische Grundlagen

Grundlage der mathematischen Berechnung bildet die rekursive Beziehung zwischen T_V und L_V

$$\boxed{T_{V_m}(N) = T_{B_m}[1 + L_{V_m}(N-1)]} \qquad (12)$$

mit der Initialisierung $\boxed{L_{V_m}(0) = 0}$

M: Anzahl BA (m = 1 ... M)
N: Anzahl Fo im Netz

Damit lassen sich im Zustand N alle Mittelwerte (Zustandsgrößen) angeben (hierbei Beschränkung auf Single-Server Queue und IS-Station):

Mittlere Verweilzeit
$$T_{V_m}(N) = \begin{cases} T_{B_m}[1 + L_{V_m}(N-1)] & \text{Einbediener } (\mu = \text{const.}) \\ T_{B_m} & \text{IS-Station} \end{cases}$$
(Mehrbediener s. Bolch/Akyildiz)

Durchsatz
$$D_m(N) = \frac{N \cdot v_m}{\sum_{i=1}^{M} v_i \cdot T_{V_i}(N)} \qquad (13) \quad \forall\, m = 1 \ldots M$$

Mittlere Anzahl verweilender Fo
$$L_{V_m}(N) = D_m(N) \cdot T_{V_m}(N)$$

Auslastung
$$\eta_m(N) = T_{B_m} \cdot D_m(N)$$

<GBN-MA-080>

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Theoretische Grundlagen (2)

Die ν_m stellen relative Ankunftsraten dar (sog. Besuchskoeffizienten, visit ratio).
Sie folgen als linear abhängige Lösung aus dem linearen homogenen Glg.-System

$$\boxed{\sum_{i=1}^{M}(p_{ij}-\delta_j^i)\cdot\nu_i = 0} \qquad j = 1 \ldots M \qquad (14)$$

$$\nu_i = \frac{X_i}{T_{B_i}} = X_i \cdot \mu_i \quad \text{(siehe Buzen)}$$

Algorithmus (rekursiv)

1. Bestimmung der Besuchskoeffizienten

   Lineares homogenes Glg.-System (14), ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
(p_{11}-1)\cdot\nu_1 + p_{21}\,\nu_2 + p_{31}\,\nu_3 + \cdots + p_{M1}\,\nu_M &= 0\\
p_{12}\,\nu_1 + (p_{22}-1)\,\nu_2 + p_{32}\,\nu_3 + \cdots + p_{M2}\,\nu_M &= 0\\
p_{13}\,\nu_1 + p_{23}\,\nu_2 + (p_{33}-1)\,\nu_3 + \cdots + p_{M3}\,\nu_4 &= 0\\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \ \ \vdots\\
p_{1M}\,\nu_1 + p_{2M}\,\nu_M + p_{3M}\,\nu_3 + \cdots + (p_{MM}-1)\,\nu_M &= 0
\end{aligned}$$

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Theoretische Grundlagen (3)

2. Rekursive Bestimmung der Zustandsgrößen

2.1 *Initialisierung* $n = 0$ ~> Glg. (16)

$$L_{V_m}(0) = 0 \quad \forall \quad m = 1 \ldots M$$

2.2 *Iteration* $n = 1, 2, \ldots, N$

für alle m: 1 ... M
$$T_{V_m}(n) = \begin{cases} T_{B_m}[1 + L_{V_m}(n-1)] & \text{Einbediener } (\mu = \text{const.})\\ T_{B_m} & \text{IS-Station}\end{cases} \qquad (15)$$

$$D_m(n) = \frac{n\cdot\nu_m}{\sum_{i=1}^{M}\nu_i\cdot T_{V_i}(n)} \qquad \forall\ m = 1\ldots M$$

$$L_{V_m}(n) = D_m(n)\cdot T_{V_m}(n)$$

2.3 *Berechnung zur Endpopulation*

bereits aus Iteration: T_{V_m}, D_m, L_{V_m} sowie $\eta_m(N) = T_{B_m}\cdot D_m(N)$

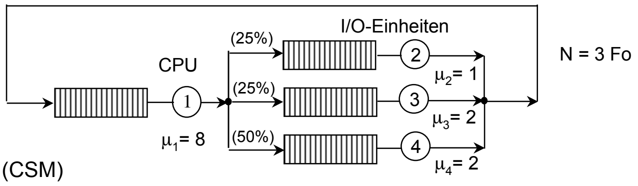
Dieser rekursive Algorithmus ist rechentechnisch einfach realisierbar
(siehe Tools BNETD, DIMPES).

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Beispiele zur Mittelwertanalyse

1. GBN mit M = 4 Anlagen und N = 3 Forderungen (siehe Buzen-Algorithmus)

Modell



Central-Server-Modell (CSM)

Bedienungsanlagen: M = 4 (Anzahl)

Typ 1 (Einbediener, Exponentialverteilung der T_B, FIFO) $\hat{=}$ Produktform

Forderungen: N = 3 (Anzahl)

1 Fo-Klasse

Verzweigungs-Wktn.:

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bedienungszeiten

T_B = (0.125, 1, 0.5, 0.5) [ZE]

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Beispiele zur Mittelwertanalyse (2)

zu 1.) GBN mit M = 4 Anlagen und N = 3 Forderungen (Fortsetzung)

Besuchskoeffizienten

Gleichungssystem der ν_i

$$\begin{aligned} -\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 &= 0 \\ 0.25\,\nu_1 - \nu_2 &= 0 \\ 0.25\,\nu_1 - \nu_3 &= 0 \\ 0.5\,\nu_1 - \nu_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem:
homogen (Koeffizientendeterminante D = 0)
Defekt d = 1, Rang r = m - d = 3
~> Existenz einer linear abhängigen Lösung
~> Vorgabe eines ν_i

Lösung:

D = 0 ~> linear abhängige Lösung

$\nu_1 = 8$ (gesetzt)
$\nu_2 = 2$
$\nu_3 = 2$
$\nu_4 = 4$

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Beispiele zur Mittelwertanalyse (3)

zu 1.) GBN mit M = 4 Anlagen und N = 3 Forderungen (Fortsetzung)

Last n	Anlage m	$T_{Vm}(n)$	$D_m(n)$	$L_{Vm}(n)$	$\eta_m(n)$	Bemerkung
	1			0		
	2	%	%	0	%	Initialisie-
0	3			0		rung
	4			0		
	1	0.125	1.3333	0.1667		
	2	1.0	0.3333	0.3333		
1	3	0.5	0.3333	0.1667	%	
	4	0.5	0.6667	0.3333		
	1	0.1458	2.0870	0.3044		
2	2	1.3333	0.5217	0.6957		
	3	0.5833	0.5217	0.3044	%	
	4	0.6667	1.0435	0.6957		
	1	0.1630	2.5556	0.4167	0.3194	
	2	1.6957	0.6389	1.0833	0.6389	End-
3	3	0.6522	0.6389	0.4167	0.3194	population
	4	0.8478	1.2778	1.0833	0.6389	

__Zustandsgrößen__
(Rekursiver Algorithmus)

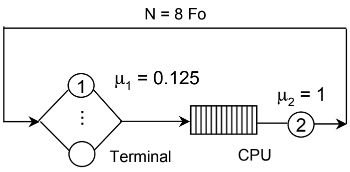
Anm.: Da alle BA vom Typ 1, ist Reihenfolge der BA im Rechenschema beliebig

Ergebnisse stimmen überein mit
- Buzen-Algorithmus (Convolution)
- LINZ-Algorithmus (MVA)

MVA: Bedienungsnetze mit 1 Forderungsklasse

Beispiele zur Mittelwertanalyse (4)

2. GBN mit M = 2 Anlagen und N = 8 Forderungen



__Modell__ (2-Anlagen-System)

Central-Server-Modell (CSM)
Bedienungsanlagen: M = 2 (Anzahl)
BA1: Typ 3 (IS-Station)
BA2: Typ 1 (Single-Server Queue)
Exponential-verteilte T_B, FIFO

$\hat{=}$ Produktform (PF)

Forderungen: N = 8 (Anzahl)
1 Fo-Klasse

Bedienungszeiten T_B = (8 , 1) [ZE]