Name: Punkte:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zur Vorlesung

Einführung in das symbolische Rechnen

Sommersemester 2020 — Prof. Dr. H.-G. Gräbe

Montag, 27. Juli 2020, Beginn 10:00 Uhr, Ende 11:00 Uhr

Bemerkungen:

- **Jedes Blatt ist mit Ihrem Namen, Vornamen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen**.
- Jede Aufgabe ist auf dem Aufgabenblatt oder dessen Rückseite zu lösen. Reicht der Platz nicht aus, so können Sie Zusatzblätter verwenden. Diese sind ebenfalls mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer zu kennzeichnen.
- Außer Papier, Schreibzeug und Zeichengeräten sind keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere keine Taschenrechner und keine Aufzeichnungen) erlaubt.
- Lösungswege müssen in logisch und grammatisch verständlichen Sätzen und in lesbarer Schrift dargestellt sein. Bei stichpunktartiger Darstellung muss der Inhalt der Antwort zweifelsfrei erkennbar sein.
- Im Aufgabenteil sind alle Aussagen zu begründen, im Fragenteil sind keine Begründungen erforderlich.
- **Handys sind während der Klausur abzuschalten.**

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Das CAS "MLipsia" versteht folgende Syntax:

`:=`	Zuweisungsoperator (mit Auswertung)
`[a,b,...,c]`	Liste aus $a, b, \ldots, c$.
`Map(f,L)`	Map-Funktion mit Funktion f und Liste L.
`y → E(y)`	Funktion $y \mapsto E(y)$, wobei $E(y)$ ein von y abhängender Ausdruck ist.
`Solve(B,vars)`	löst das (als Liste gegebene) System B bzgl. der Variablenliste *vars* und gibt eine Substitutionsliste zurück.
`Subs(s,L)`	wendet die (Liste von) Substitutionen s auf den Ausdruck L an.

a. Geben Sie an, wie mit MLipsia die Lösungen `sol` des Systems `B:=[x^2-y=3, y^2=4]` bestimmt werden können. Wie sieht die zu erwartende Antwort aus? (3 Punkte)

b. Geben Sie an, wie mit MLipsia die Probe ausgeführt werden kann, die zeigt, dass jedes Element von `sol` wirklich Lösung von B ist. (2 Punkte)

c. Wie sieht die Ausgabe von Lipsia bei dieser Probe aus? Welche (sinnvollen) Annahmen über das Simplifikationsverhalten von MLipsia haben Sie dabei vorausgesetzt? (3 Punkte)

d. Geben Sie an, wie mit MLipsia eine Liste alle Lösungspaare $[x, y]$ bestimmt werden kann. (2 Punkte)

e. Welche weitere Listenfunktionalität sollte MLipsia als vollwertiges CAS zur Verfügung stellen? (2 Punkte)

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Wir betrachten Ausdrücke der folgenden rekursiv definierten Klasse $\mathcal{A}$:

- Ausdrücke der Form $a + b\sqrt{7}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ gehören zu $\mathcal{A}$.
- Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ Ausdrücke dieser Klasse und $n \in \mathbb{N}$ eine nichtnegative ganze Zahl, so gehören ebenfalls $A_1 + A_2$, $(A_1)\cdot(A_2)$ und $(A_1)^n$ zu $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ beschreibt eine Teilmenge der reellen Zahlen, so dass Ausdrücke aus $\mathcal{A}$ der Größe nach verglichen werden können.

a. Geben Sie eine kanonische Form für Ausdrücke der Klasse $\mathcal{A}$ an und formulieren Sie einen entsprechenden Satz. (2 Punkte)

b. Wie kann der größere von zwei Ausdrücken $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ exakt bestimmt werden? (4 Punkte)

c. Geben Sie eine Folge A_n von Ausdrücken aus $\mathcal{A}$ an, für die $|A_n| < 10^{-n}$ gilt.
<u>Hinweis</u>: Es gilt $\sqrt{7} \approx 2.645751$. (4 Punkte)

d. Beweisen Sie den unter a) formulierten Satz. (2 Punkte)

Name: Punkte:

Vorname:

Matrikelnummer:

Fragenteil (16 Punkte)

1. Erläutern Sie die Begriffe *Symbolmodus* und *Wertmodus* von Bezeichnern sowie den damit verbundenen Unterschied von CAS und klassischen Programmiersprachen wie Java oder C. (4 Punkte)
2. Die zentrale Aussage für ein CAS der 2. Generation lautet „Everything is an expression“. Definieren Sie den Begriff *Ausdruck* und erläutern Sie, wie die eindeutige Referenzierbarkeit atomarer Ausdrücke gewährleistet wird. (4 Punkte)
3. Definieren Sie den Begriff *Simplifikation*. Was versteht man unter einem Simplifikator auf einer Menge $\mathcal{E}$ wohlgeformter Ausdrücke? (4 Punkte)
4. a sei eine algebraische Zahl mit dem Minimalpolynom $f(x) = x^d - r(x)$. Formulieren Sie den Normalformsatz in der Klasse $\mathbb{Q}(a)$ der rationalen Ausdrücke in a. (4 Punkte)