Name: Punkte:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zur Vorlesung

Einführung in das symbolische Rechnen

Wintersemester 2008/09 — apl. Prof. Dr. H.-G. Gräbe

Bemerkungen:

- **Jedes Blatt ist mit Ihrem Namen, Vornamen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen**.
- Jede Aufgabe ist auf dem Aufgabenblatt oder dessen Rückseite zu lösen. Reicht der Platz nicht aus, so können Sie Zusatzblätter verwenden. Diese sind ebenfalls mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer zu kennzeichnen.
- Außer Papier, Schreibzeug und Zeichengeräten sind keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere keine Taschenrechner und keine Aufzeichnungen) erlaubt.
- Lösungswege müssen in logisch und grammatisch verständlichen Sätzen und in lesbarer Schrift dargestellt sein. Bei stichpunktartiger Darstellung muss der Inhalt der Antwort zweifelsfrei erkennbar sein.
- Im Aufgabenteil sind alle Aussagen zu begründen, im Fragenteil sind keine Begründungen erforderlich.
- **Handys sind während der Klausur abzuschalten.**

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Der Ausdruck $T_n = \cos(n \arccos(x))$ kann für positive ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu einem Polynom vereinfacht werden.

a. Geben Sie in einem CAS Ihrer Wahl Kommandos an, mit denen sie diese Vereinfachung bewirken können. Das Ergebnis soll in rationaler Normalform ausgegeben werden. (2 Punkte)

b. Erläutern Sie, welche Umformungsregeln mit diesem Kommando angewandt werden und welche weiteren Umformungen automatisch ausgeführt werden, bis letztlich ein Polynom als Ergebnis entsteht. (3 Punkte)

c. Geben Sie in der Syntax eines CAS Ihrer Wahl an, wie sich die Beziehung

$$T_{n+m} + T_{n-m} = 2 \cdot T_n \cdot T_m$$

für $1 \leq m < n \leq 10$ überprüfen lässt. Organisieren Sie Ihre Ausgabe in einer Liste von Tripeln $[m, n, b]$ mit $b \in \{$`true`, `false`$\}$, wobei b jeweils angibt, ob die Beziehung korrekt ist. (4 Punkte)

d. Formulieren Sie die Normalformaussage, die Sie unter c) verwendet haben, und erläutern Sie das boolesche Auswerteverhalten Ihrer Lösung. (3 Punkte)

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Wir betrachten Ausdrücke der folgenden rekursiv definierten Klasse $\mathcal{A}$:

- Ausdrücke der Form $a + b\sqrt{7}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ gehören zu $\mathcal{A}$.
- Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ Ausdrücke dieser Klasse und $n \in \mathbb{N}$ eine nichtnegative ganze Zahl, so gehören ebenfalls $A_1 + A_2$, $(A_1) \cdot (A_2)$ und $(A_1)^n$ zu $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ beschreibt eine Teilmenge der reellen Zahlen, so dass Ausdrücke aus $\mathcal{A}$ der Größe nach verglichen werden können.

a. Geben Sie eine kanonische Form für Ausdrücke der Klasse $\mathcal{A}$ an und formulieren Sie einen entsprechenden Satz. (2 Punkte)

b. Wie kann der größere von zwei Ausdrücken $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ exakt bestimmt werden? (4 Punkte)

c. Geben Sie eine Folge A_n von Ausdrücken aus $\mathcal{A}$ an, für die $|A_n| < 10^{-n}$ gilt.
Hinweis: Es gilt $\sqrt{7} \approx 2.645751$. (4 Punkte)

d. Beweisen Sie den unter a) formulierten Satz. (2 Punkte)

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Fragenteil (16 Punkte)

1. Erläutern Sie die Begriffe *Symbolmodus* und *Wertmodus* von Bezeichnern. Wie kann während der Lebensdauer eines Bezeichners zwischen diesen Modi gewechselt werden? (4 Punkte)

2. `diff`$(f(x), x)$ berechnet in MuPAD die Ableitung des Ausdrucks $f(x)$ nach x.

   Ist `diff` eine Funktionstransformation oder ein Funktionsaufruf? (2 Punkte)

   Welche Evaluationsschritte werden zur Berechnung von `diff`$(\sin(x) * \cos(x), x)$ durchlaufen? (4 Punkte)

3. Was versteht man unter einem Simplifikator auf einer Menge $\mathcal{E}$ wohlgeformter Ausdrücke? (2 Punkte)

   Wann ist der zu einem Regelsystem $\mathcal{R}$ gehörende Simplifikator $S = S(\mathcal{R})$ effektiv? (2 Punkte)

   Definieren Sie den Begriff *Normalform* und geben Sie dazu die zusätzlich über $\mathcal{E}$ zu treffenden Annahmen an. (2 Punkte)