Name: Punkte:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zur Vorlesung
Einführung in das symbolische Rechnen

Wintersemester 2004/05 / Prof. Dr. H.-G. Gräbe

Bemerkungen:

- **Jedes Blatt ist mit Ihrem Namen, Vornamen und Ihrer Matrikelnummer zu versehen**.
- Jede Aufgabe ist auf dem Aufgabenblatt oder dessen Rückseite zu lösen. Reicht der Platz nicht aus, so können Sie Zusatzblätter verwenden. Diese sind ebenfalls mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer zu kennzeichnen.
- Außer Papier, Schreibzeug und Zeichengeräten sind keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere keine Taschenrechner und keine Aufzeichnungen) erlaubt.
- Lösungswege müssen in logisch und grammatisch verständlichen Sätzen und in lesbarer Schrift dargestellt sein. Bei stichpunktartiger Darstellung muss der Inhalt der Antwort zweifelsfrei erkennbar sein.
- Im Aufgabenteil sind alle Aussagen zu begründen, im Fragenteil sind keine Begründungen erforderlich.
- **Handys sind während der Klausur abzuschalten.**

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a. Diskutieren und begründen Sie, unter welchen Voraussetzungen die Vereinfachungen $\tan(\arctan(x)) \mapsto x$ bzw. $\arctan(\tan(x)) \mapsto x$ zulässig sind. (4 Punkte)

b. Maxima berechnet $\arctan(\tan(25\pi/4)) = \frac{\pi}{4}$, aber $\arctan(\tan(25/7\pi)) = \frac{25\pi}{7}$.

   Geben Sie eine plausible Erklärung für dieses Verhalten. (4 Punkte)

c. Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ kann $\tan(m \arctan(x) + n \arctan(y))$ zu einem rationalen Ausdruck in x, y vereinfacht werden?

   Geben Sie ein Regelsystem an, mit welchem diese Vereinfachung erreicht werden kann. (4 Punkte)

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Aufgabe 2 (12 Punkte)

In dieser Aufgabe ist die Syntax eines der gängigen CAS zu verwenden. Geben Sie an, auf welches CAS Sie Bezug nehmen.

a. Geben Sie an, wie mit Ihrem CAS alle Lösungen des Systems

$$\{x^2 + 2y = 2, y^2 + 2x = 2\}$$

bestimmt und unter dem Bezeichner `sol` gespeichert werden können. Die Ausgabe soll keine RootOf-Symbole enthalten. (2 Punkte)

Hinweis: Die Lösungsmenge ist

$$(x, y) \in \left\{(1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}),\ (1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}),\ \left(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1\right),\ \left(-\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1\right)\right\}$$

b. Geben Sie die Struktur einer solchen vom `solve`-Operator Ihres CAS zurückgegebenen Lösungsmenge in BNF-Notation an.

Definieren Sie dazu ein Nichtterminalsymbol `Lösungsmenge`. Das Nichtterminalsymbol `Expression` für einen arithmetischen Ausdruck mit Wurzelsymbolen können Sie dabei ohne weitere Definition verwenden. (4 Punkte)

c. Geben Sie an, wie aus `sol` eine Liste der Werte $x^5 + y^5$ für die verschiedenen Lösungen zusammengestellt werden kann, wobei zur Listenmanipulation nur die Funktionen `map`, `select` und `subst` (in der Notation Ihres CAS) verwendet werden. Am Ergebnis soll erkennbar sein, ob die berechneten Werte ganzzahlig sind. (3 Punkte)

d. Welcher minimale Simplifikationsoperator Ihres CAS ist für die Fragestellung (c) ausreichend? Formulieren Sie den dabei verwendeten Simplifikations-Satz und geben Sie an, wieviele Kerne an der Simplifikation beteiligt sind. (3 Punkte)

Name:	Punkte:
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Fragenteil (16 Punkte)

a. Nennen Sie die prinzipiellen Bestandteile eines Computeralgebrasystems. (4 Punkte)

b. Erläutern Sie die Begriffe *Symbolvariable*, *Wertvariable* und deren Beziehung zum Begriff *Bezeichner*. (4 Punkte)

c. Welche Semantik ist mit der allgemeinen Regeldefinition

$$[L \;\Rightarrow\; R \;\texttt{when}\; B](u)$$

verbunden? Erläutern Sie die einzelnen Bestandteile dieser Notation. (4 Punkte)

d. Formulieren Sie den Normalformsatz zum Rechnen in $R = k[\alpha]$ über dem Körper k und der algebraischen Zahl α. (4 Punkte)