Skript zum Kurs
Geometriebeweise mit dem Computer
Sommersemester 2003

Hans-Gert Gräbe, Univ. Leipzig

7. Juli 2003

0 Einführung

Die (synthetische) Geometrie ist eine sehr alte mathematische Disziplin und stand lange Zeit wohl für Mathematik schlechthin, ehe ihr dieser Platz durch eine stürmische Entwicklung der Mathematik in den letzten 200 Jahren von anderen Disziplinen streitig gemacht wurde. Natürlich hat sich in dieser Zeit auch die Geometrie weiter entwickelt. Teildisziplinen wie Differentialgeometrie oder Algebraische Geometrie untersuchen komplizierte geometrische Gebilde und haben zu wichtigen Einsichten über die Struktur von Raum (und Zeit) geführt. Die elementare Geometrie ist darüber, vollkommen zu unrecht, in die zweite Reihe gerückt. Das findet insbesondere seinen Ausdruck im Curriculum der Schule, in dem (elementar)geometrische Fragestellungen nur noch in geringem Umfang auftauchen.

Andererseits faszinieren solche Aufgaben immer wieder durch die Einfachheit, mit der relevante Probleme formuliert werden können, sowie den Scharfsinn und die Tiefgründigkeit der Argumentation, die zu deren Beantwortung herangezogen werden müssen. Sie sind damit für Hobbymathematiker, interessierte Schüler eingeschlossen, immer wieder eine Fundgrube von Problemen und Ideen, an denen man die eigene Argumentationskraft trainieren und verbessern kann. Die Vielfalt der Argumentationsmuster, die dabei zum Einsatz kommen, lassen eine Mechanisierung derartiger Beweisansätze als schier unmöglich erscheinen.

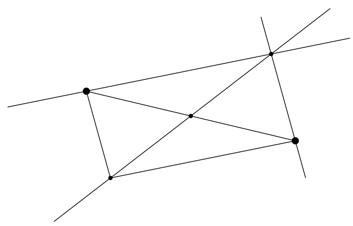
Besonders **Fragen der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal** haben Mathematiker verschiedener Epochen immer wieder fasziniert. So gehören die beiden großen Fragestellungen aus der antiken Mathematik nach der Verdopplung eines Würfels und der Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit diesen Instrumenten zu den wohl auch außerhalb der Mathematik bekanntesten geometrischen Problemen. Trotz der Einfachheit der Fragestellung ließ sich deren Unlösbarkeit erst exakt nachweisen, als ein entsprechender **algebraischer Apparat**, in diesem Fall die Körpertheorie, entwickelt wurde. Eine solche *Methode der "Symbolisierung" geometrischer Sachverhalte* in der Sprache der Algebra erlaubte es C.F. Gauß im Jahre 1796, die Konstruierbarkeit eines 17-Ecks nachzuweisen. Die entsprechenden Argumente sind heute in den meisten Standardwerken zur (höheren) Algebra als Anwendungsbeispiele dieser Theorie enthalten.

Ein exaktes Studium der mit der Konstruierbarkeit verbundenen Fragestellungen kommt um **eine ordentliche Fundierung, eine Axiomatisierung der Geometrie** nicht herum. Auch hier lassen sich die entsprechenden Ansätze bis in die Antike hinein, etwa zu den Büchern des Euklid, verfolgen. Doch auch hier wurden entscheidende Fortschritte erst in der Neuzeit erreicht, die insbesondere mit den Namen D. Hilbert und F. Klein sowie der Klassifizierung der Transformationsgruppen verschiedener Geometrien verbunden sind. Unter diesem Blickwinkel stellte es sich heraus, dass man Geometrie in verschiedener Allgemeinheit betreiben kann, wobei jeweils eigene Fragestellungen, Grundlagen und Methoden zur Verfügung stehen.

Die aus der Schule bekannte **Euklidsche** oder **Bewegungsgeometrie** setzt dabei das umfangreichste Instrumentarium voraus. Neben Punkten, Geraden, Parallelen, Streckenlängen und Winkelgrößen gibt es auch noch Strahlen und Halbebenen, wozu auf jeder Geraden g (auf konsistente Weise) eine Ordnungsrelation zur Verfügung stehen muss, die es erlaubt, für drei Punkte $A, B, C \in g$ zu entscheiden, ob C zwischen A und B liegt. Geometrische Aussagen, die von Strahlen, Halbebenen und dieser *Zwischenrelation* Gebrauch machen, werden der **Ordnungsgeometrie** zugeordnet.

Da algebraische Verfahren, die wir zum Mechanisieren ausschließlich heranziehen werden, mit solchen Ordnungsrelationen nicht gut zusammenspielen, wollen wir derartige geometrische Aussagen im Weiteren ausklammern.

Damit wird der Kreis der betrachteten geometrischen Aufgaben aber nur etwas eingeschränkt, da viele Konfigurationen, in denen Strecken vorkommen, diese Ordnungsrelation in Wirklichkeit nicht ausnutzen. So kann man etwa den Mittelpunkt einer Strecke AB bestimmen, ohne zu wissen, wo auf der Geraden $g(AB)$ links oder rechts ist, indem man z.B. einfach ein Parallelogramm mit AB als einer seiner beiden Diagonalen konstruiert. Die Mitte der Strecke ist dann genau der Diagonalenschnittpunkt.



Affine Geometrie: Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke

Wir haben dafür nicht einmal die Möglichkeit der Euklidschen Geometrie benötigt, Strecken (und Winkel) vorgegebener Größe in einem vorgegebenen Punkt anzutragen, sondern einzig die Möglichkeit, zu vorgegebenen Geraden Parallelen konstruieren zu können. Eine Geometrie, die nur mit Punkten, Geraden und Parallelen auskommt, bezeichnet man als **affine Geometrie**. Im Mittelpunkt dieser Geometrie stehen der Strahlensatz und Eigenschaften des Parallelogramms.

Noch allgemeinere Sätze der **projektiven Geometrie** erhält man, wenn man auch auf die Verwendung von Parallelen verzichtet. Derartige Sätze sind invariant unter projektiven Transformationen, d.h. solchen, die man in der Malerei bei der Übertragung einer weiten Landschaft auf die Staffelei antrifft, wenn sich die ehemals parallelen Geraden im Bild auf der *Horizontlinie* schneiden. Eine solche projektive Transformation überträgt eine geometrische Konfiguration von einer Ebene ε (im Raum) auf eine andere Ebene ε' nach folgendem Verfahren:

> Wähle ein Projektionszentrum Z außerhalb der beiden Ebenen aus. Den Bildpunkt $A' \in \varepsilon'$ zu einem Original $A \in \varepsilon$ findet man als den Schnittpunkt von $g(AZ)$ mit ε'.

Offensichtlich gehen bei dieser Konstruktion Geraden in Geraden über. In der Tat, die Geraden $g(AZ)$ für $A \in g$ spannen eine Ebene auf, so dass die Bildpunkte auf der Schnittgeraden dieser Ebene mit ε' liegen. Allerdings besitzt nicht jeder Punkt A der Urbildebene ε einen Bildpunkt, denn die Gerade $g(AZ)$ kann ja parallel zu ε' verlaufen. Die entsprechenden Punkte A mit dieser Eigenschaft liegen genau auf der Schnittgeraden von ε mit der Parallelen zu ε' durch Z. Diese Gerade bezeichnet man als die *Ausnahmegerade* auf ε. Ihre Punkte werden in die "unendlich ferne" Gerade von ε' abgebildet. Insbesondere sind die Bilder zweier Geraden, die sich in ε auf dieser Ausnahmegeraden schneiden, parallel zueinander. Genauso gibt es auf ε' eine Ausnahmegerade. Aussagen der projektiven Geometrie enthalten also typischerweise Formulierungen der Art "... die Geraden schneiden sich oder sind parallel zueinander ...".

Wie kann man nun eine solche Vielfalt von Ansätzen unter einen Hut bringen? Unsere hauptsächlichen Arbeitsmittel werden die Einführung von Koordinaten und Methoden der analytischen Geometrie sein. Es stellt sich dabei heraus, dass es ein solcher Ansatz gestattet, konstruktive, also algorithmische Ansätze auf der Seite der Geometrie mit Hilfe eines informatik-theoretischen Hilfsmittels, des Unterprogramms, in einem symbolischen Kontext in vielen Fällen so auszuwerten, dass sich daraus ein im mathematischen Sinne exakter Beweis ergibt.

Das Vorhandensein eines Koordinatensystems werden wir dabei, wie in der Schule auch, als gegeben voraussetzen. Da hierfür allein die Festlegung einer Einheitsstrecke und deren Übertragbarkeit an alle Orte und Richtungen der Ebene gewährleistet sein muss, stellt das, wenigstens für Problemstellungen innerhalb der Euklidschen Geometrie, keine Einschränkung dar.

Es stellt sich allerdings heraus, dass man das Vorhandensein eines Koordinatensystems aus noch viel allgemeineren Annahmen heraus ableiten kann. Diese Frage steht im Zentrum der axiomatischen Einführung der Geometrie und wird deshalb in den entsprechenden Lehrbüchern umfassend abgehandelt. Insbesondere in der Monographie [5] von W.-T. Wu sind dazu interessante Ausführungen enthalten, in denen auch Koordinatensysteme über nichtkommutativen Zahlbereichen eine Rolle spielen. Wir werden darauf nicht näher eingehen.

1 Einige Sätze aus der ebenen Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir zunächst einige einfache und weniger einfache Sätze aus der ebenen Geometrie kennenlernen bzw. uns wieder ins Gedächtnis zurückrufen.

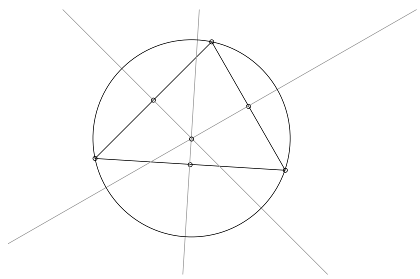
Dies soll zum einen ausreichendes Material für die weiteren Betrachtungen zur Verfügung stellen, an dem sich zu entwickelnde algorithmische Ansätze werden demonstrieren lassen, und zum anderen die Vielfalt geometrischer Argumente noch einmal demonstrieren, die im Rahmen einer Mechanisierung unter einen gemeinsamen Hut zu bringen sind.

Außerdem sollen wichtige Begriffe, die beim Beweisen geometrischer Sachverhalte eine Rolle spielen, beispielhaft demonstriert werden.

1.1 Sätze über die Ecktransversalen im Dreieck

Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

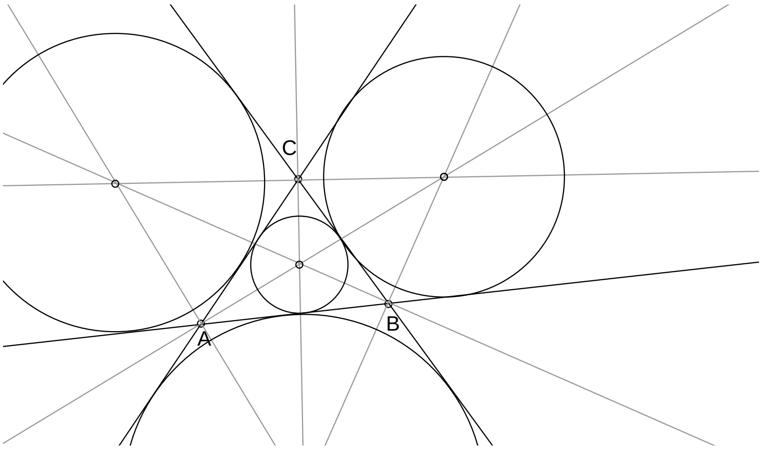
Verwendet den Begriff der *Ortslinie*: Eine Mittelsenkrechte besteht aus genau den Punkten, die von zwei gegebenen Punkten A, B den gleichen Abstand haben. Aus dem Beweis ergibt sich dann außerdem, dass der Schnittpunkt O von allen drei Eckpunkten gleichweit entfernt ist, also der Umkreismittelpunkt sein muss.
Eine Ortslinie verbindet eine geometrische (Mittelsenkrechte als Gerade) mit einer logischen (P mit $|AP| = |BP|$) Eigenschaft. Ihre Beweiskraft entwickeln Ortslinien aus dem Zusammenspiel beider Seiten.



Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt

Satz vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Auch hier spielen Ortslinien eine Rolle: Eine Winkelhalbierende besteht aus genau den Punkten, die von zwei gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben. Aus dem Beweis ergibt sich dann außerdem, dass der Schnittpunkt W von allen drei Dreiecksseiten gleichweit entfernt ist, also der Inkreismittelpunkt sein muss.



Inkreis und Ankreise eines Dreiecks

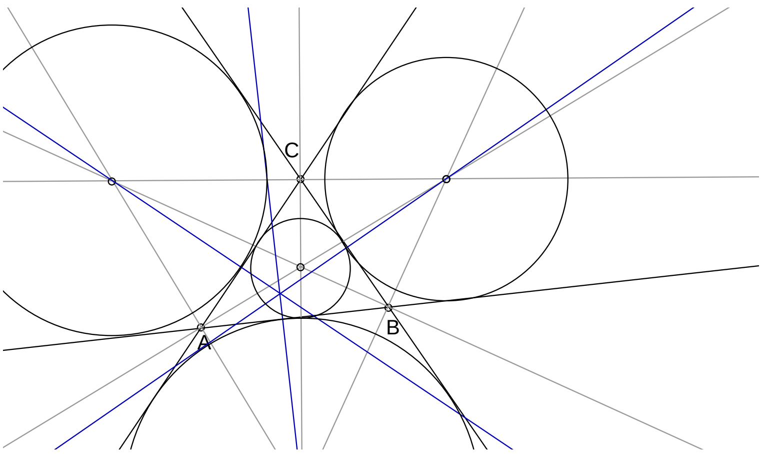
Allerdings ist das ungenau, denn der genannte geometrische Ort besteht aus den Punkten auf dem Geraden-*Paar*, das die Halbierenden von Innen- und Außenwinkel bilden. Innenwinkel und Außenwinkel sind allerdings Begriffe der Ordnungsgeometrie und deshalb von unserem Standpunkt aus nicht zu unterscheiden. Die drei Winkelhalbierendenpaare haben neben dem Inkreismittelpunkt noch die drei Mittelpunkte der Ankreise gemeinsam.

Man beachte die Ähnlichkeit zum Begriff des *Parallelenpaars* als dem geometrischen Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Gerade einen vorgegebenen Abstand haben.

Zwei Geraden schneiden sich (normalerweise) immer in genau einem Punkt. Wenn drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen, so liegt schon eine besondere Situation vor. Solche Geraden nennt man *konkurrent*.

Umgekehrt geht durch zwei Punkte (normalerweise) immer genau eine Gerade. Wenn drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so liegt ebenfalls eine besondere Situation vor. Solche Punkte nennt man *kollinear*.

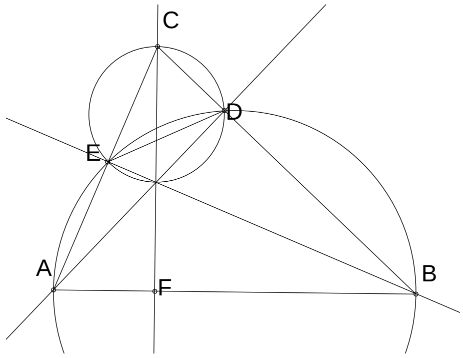
Ein nicht so einfaches Beispiel für Geraden am Dreieck, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen, kann man als Nebeneffekt der Konstruktion der Ankreise beobachten: Um einen Kreis zu zeichnen brauchen wir neben dem Mittelpunkt einen Punkt auf der Peripherie, im Fall des Ankreises also den Lotfußpunkt aus dem Ankreismittelpunkt auf die zugehörige Dreiecksseite. Diese drei Lote gehen durch einen gemeinsamen Punkt!



Die Lote aus den Ankreiszentren gehen durch einen gemeinsamen Punkt

Satz vom Höhenschnittpunkt

Beweis über Mehrfachanwendung von Thaleskreis und Peripheriewinkelsatz.
Anwendung des Sehnensatzes liefert die zusätzliche Eigenschaft, dass der Höhenschnittpunkt die Höhen so teilt, dass die Produkte aus den beiden Höhenabschnitten jeweils gleichgroß sind.



1.2 Der Satz von Ceva

All diese Sätze kann man aus einem allgemeinen Prinzip über Teilverhältnisse von Transversalen am Dreieck herleiten.

Satz 1 (Satz des Ceva) *Drei Ecktransversalen des Dreiecks $\Delta\, ABC$ mögen die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten D, E, F schneiden. Diese drei Ecktransversalen gehen genau dann durch einen Punkt, wenn*

$$\frac{l(BD)}{l(DC)} \cdot \frac{l(CE)}{l(EA)} \cdot \frac{l(AF)}{l(FB)} = 1$$

gilt.

Als Folgerung erhält man neue Beweise der Sätze vom Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und vom Höhenschnittpunkt.

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass man aus dem Satz des Ceva auch den Satz vom Höhenschnittpunkt herleiten kann, indem Sie die Längen der Seitenabschnitte durch geeignete trigonometrische Formeln ausdrücken.

b) Zeigen Sie, dass die Transversalen zu den Berührungspunkten des Inkreises sich in einem Punkt schneiden. (Hinweis: Berechnen Sie die Länge der einzelnen Tangentenabschnitte.)

Weitere Folgerung:

Die Transversalen zu den drei Berührungspunkten der Ankreise schneiden sich in einem Punkt. (Dieser Punkt heißt auch Nagelscher Punkt*)*

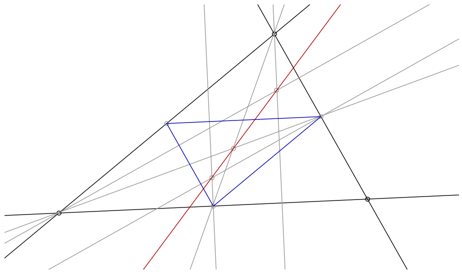
Betrachte dazu verschiedene Beziehungen zwischen den Tangentenabschnitten zu den Berührungspunkten der drei Ankreise:

$$\begin{array}{cccc} & x+y+z & = & r+s+t \\ & x+y+t & = & z+r+s \\ \hline \Rightarrow & z & = & t \end{array}$$

Analog gilt $x = r,\ y = s$.

1.3 Weitere Sätze am Dreieck

Satz 2 (Eulersche Gerade) *In einem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Geraden. S teilt HM im Verhältnis 2:1.*

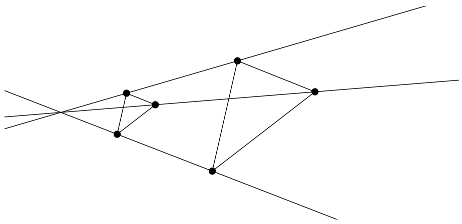


Die Eulersche Gerade

Im Beweis werden Dreiecke in Ähnlichkeitslage verwendet.
Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen in Ähnlichkeitslage, wenn einander entsprechende Seiten jeweils zueinander parallel sind.
Dann kann man schlussfolgern, dass das eine Dreieck aus dem anderen durch eine Zentralstreckung hervorgeht. Diese Aussage ist Gegenstand des folgenden Satzes.

Satz 3 (Der affine Satz von Desargue)

1. *Sind ΔABC und $\Delta A'B'C'$ in Ähnlichkeitslage, d.h. $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$ und $BC \| B'C'$, so sind AA', BB' und CC' konkurrent oder parallel.*
2. *Sind umgekehrt AA', BB' und CC' konkurrent oder parallel und $AB \| A'B', AC \| A'C'$, so gilt auch $BC \| B'C'$.*



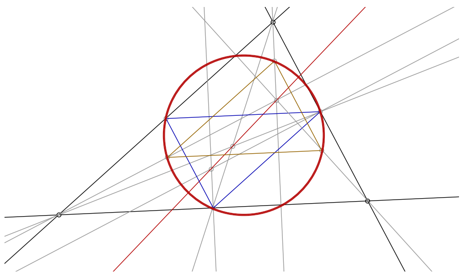
Der (affine) Satz von Desargue

Aufgabe: Leiten Sie diesen Satz aus dem Strahlensatz her.

Der Satz von Desargue spielt in der Fundierung der Geometrie als "schwache Version des Strahlensatzes" eine wichtige Rolle. Er ist schwächer als der Strahlensatz und führt damit zu einer umfassenderen als der affinen Geometrie. Details finden sich im Buch [5].

Satz 4 (Der Satz vom Feuerbachschen Kreis) *Der Mittelpunkt N von HM ist der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem neun ausgezeichnete Punkte des Dreiecks ΔABC liegen, und zwar*

- *die drei Seitenmitten,*
- *die drei Höhenfußpunkte und*
- *die drei Mitten der oberen Höhenabschnitte*



Der Feuerbachsche Kreis

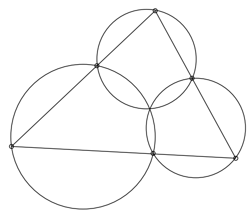
Beweis : Die beiden Dreiecke, die durch die Seitenmitten bzw. die Mitten der oberen Höhenabschnitte aufgespannt werden, sind in Ähnlichkeitslage mit dem Faktor (-1), also zueinander kongruent. Da dabei H als Höhenschnittpunkt des Höhendreiecks in M als Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks übergeht, ist die Mitte N der Strecke MH gerade das Zentrum dieser Punktspiegelung, d.h. Drehung um 180^o. Das Dreieck ABC geht bei Streckung um den Faktor $(-1/2)$ mit Zentrum S in das Mittendreieck über, dessen Umkreismittelpunkt M also in den Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks. Bild von M bei dieser Streckung ist aber gerade N. Also geht ein Kreis mit Zentrum in N die genannten 6 Punkte. Weiter entsprechen sich bei der Punktspiegelung mit Zentrum in N Seitenmitte und gegenüberliegende Mitte des oberen Höhenabschnitts. Die Verbindungsgerade geht also durch das Streckungszentrum N und ist ein Durchmesser des Feuerbachkreises. Aus dem Satz des Thales folgt schließlich, dass auch der Höhenfußpunkt auf dem Feuerbachkreis liegt. □

Der Feuerbachkreis hat eine weitere, mit elementargeometrischen Mitteln nur schwer zu beweisende Eigenschaft: Er berührt den Inkreis des Dreiecks $\Delta\,ABC$ und dessen drei Ankreise.

1.4 Sätze am Dreieck aus der neueren Forschung

Wir erwähnen hier nur zwei Sätze, die im Zusammenhang mit dem mechanisierten Theorembeweisen in der Geometrie immer wieder als Beispiele herangezogen werden.

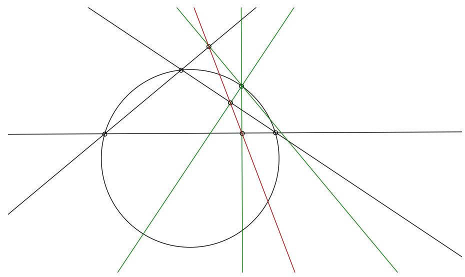
Satz 5 (Der Miquelsche Punkt) *Nimmt man auf jeder Seite eines Dreiecks $\Delta\,ABC$ einen Punkt beliebig an und zeichnet durch jede Ecke und die beiden Punkte, die auf den zu dieser Ecke inzidenten Seiten liegen, Kreise, so gehen diese durch einen gemeinsamen Punkt.*



Der Miquelsche Punkt

Der Beweis folgt fast unmittelbar aus dem Satz über das Sehnenviereck und dessen Umkehrung.

Satz 6 (Die Simsonsche Gerade) *Fällt man von einem Punkt P außerhalb eines Dreiecks $\Delta\,ABC$ die Lote auf die Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen, so liegen die drei Fußpunkte der Lote genau dann auf einer Geraden, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks $\Delta\,ABC$ liegt.*



Die Simsonsche Gerade

Beweis : Seien die drei Fußpunkte mit A_1, B_1, C_1 bezeichnet (d.h. A_1 ist der Fußpunkt des Lots von P auf $g(BC)$ usw.). Der Thaleskreis über PC liefert $\angle\, B_1A_1P = \angle\, B_1CP$. Der Thaleskreis über PA liefert $\angle\, B_1C_1P = \angle\, B_1AP$. Im Sehnenviereck $ABCP$ ist $\angle\, APC = 180^o - \beta$. Wegen zweier rechter Winkel ist aber auch $\angle\, A_1PC_1 = 180^o - \beta$. Folglich ist $\angle\, A_1B_1C_1 = \angle\, AB_1C = 180^o$, A_1, B_1, C_1 also kollinear. □

Zu beiden Sätzen gäbe es noch eine Menge zu sagen. So kann man etwa zu jedem Punkt P im Inneren des Dreiecks $\Delta\,ABC$ Punkte A_1, B_1, C_1 so auf den Dreiecksseiten finden, dass P der zugehörige Miquelsche Punkt ist. Ein solches Dreieck bekommt man (Thalessatz!) insbesondere dann, wenn man von P aus die Lote auf die drei Dreiecksseiten fällt. Dieses Dreieck wird auch als das zum Punkt P gehörende *Fußpunktdreieck* bezeichet.

Aufgabe 2:

a) [2, 1.91] Zeigen Sie, dass die Seiten des Fußpunktdreiecks von P die Längen

$$\frac{a\,x}{2\,r}, \frac{b\,y}{2\,r}, \frac{c\,z}{2\,r}$$

haben, wobei $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ die Längen der Seiten des Dreiecks $\Delta\,ABC$, r dessen Umkreisradius und $x = |AP|$, $y = |BP|$, $z = |CP|$ die Abstände von den Eckpunkten zu P sind.

b) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt des Fußpunktdreiecks $A_1B_1C_1$ bzgl. P

$$F(A_1B_1C_1) = \frac{r^2 - |MP|^2}{4\,r^2} \cdot F(ABC)$$

gilt, wobei M der Umkreismittelpunkt ist.

Das eben betrachtete Fußpunktdreieck entartet zu einer Geraden, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks $\Delta\, ABC$ liegt und ergibt dann genau die Simsonsche Gerade. Von Satz über die Simsonsche Gerade gilt übrigens auch die Umkehrung:

Satz 7 (Simsonsche Gerade II) *Sind die Lotfußpunkte A_1, B_1, C_1 von einem Punkt P auf die Seiten des Dreiecks $\Delta\, ABC$ oder deren Verlängerungen kollinear, so liegt P auf dem Umkreis des Dreiecks.*

Aufgabe 3:

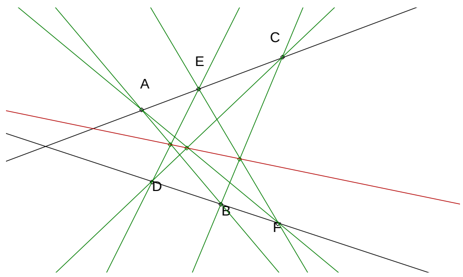
a) Leiten Sie aus der Flächeninhaltsformel für das Fußpunktdreieck (vorige Aufgabe) einen zweiten Beweis für den Satz über die Simsonsche Gerade her.

b) Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes von der Simsonschen Geraden.

Weitere interessante Sätze, die an dieser Stelle vielleicht noch zu nennen wären (alle aus [2]): das Schmetterlings-Theorem oder der Satz von Morley.

1.5 Sätze der projektiven Geometrie

Wir wollen dieses Kapitel mit einigen Sätzen aus der projektiven Geometrie beschließen, die ob der verwendeten Mittel (meist nur genügend verzwickte Geradenkonfigurationen) einen ganz speziellen Reiz besitzen.



Pappus-Gerade

Satz 8 (Theorem von Pappus) *Sind A, C, E und B, D, F jeweils kollineare Punkte, so sind auch die Schnittpunkte $AB \wedge DE, BC \wedge EF$ und $CD \wedge AF$ kollinear. Die entstehende Gerade wird als* Pappus-Gerade *bezeichnet.*

Beweis : Wir beweisen diesen Satz zuerst in einer speziellen Situation, in der zwei der drei Verbindungegeraden zueinander parallel sind:

$$AB \| DE, BC \| EF \Rightarrow CD \| AF$$

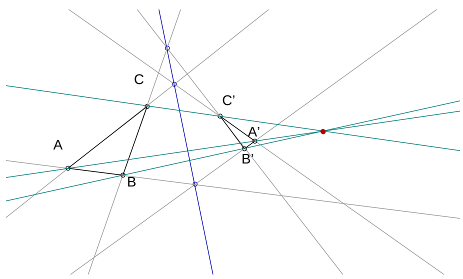
Der Beweis ergibt sich hier unmittelbar aus dem Strahlensatz und seinen Umkehrungen.

Für den allgemeinen Beweis verwenden wir eine projektive Transformation, bei der die Gerade $g(AB \wedge DE, BC \wedge EF)$ die Ausnahmegerade ist, d.h. in der Bildebene in die Ferngerade übergeht. Damit sind für das Bild unserer Geradenkonfiguration die Voraussetzungen des bewiesenen Spezialfalls erfüllt und die Bilder von $g(CD)$ und $g(AF)$ sind zueinander parallel. Die Urbilder schneiden sich damit auf der Ausnahmegeraden, so dass die drei Schnittpunkte kollinear sind. □

Übrigens ist auch der Satz von Desargue eigentlich ein projektiver Satz.

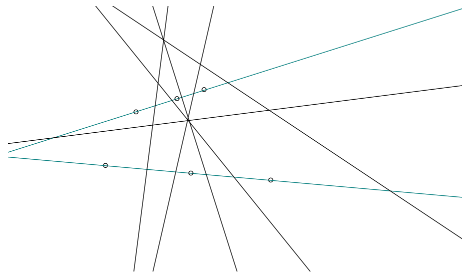
Satz 9 (Allgemeiner Satz von Desargue) *Sind die Schnittpunkte $AB \wedge A'B'$, $AC \wedge A'C'$ und $BC \wedge B'C'$ kollinear, so gehen die drei Geraden AA', BB' und CC' durch einen gemeinsamen Punkt.*

Beweis : Wir betrachten eine projektive Transformation, die die Gerade durch die drei Schnittpunkte auf die Ferngerade abbildet. Dann haben wir gerade die Situation des affinen Satzes von Desargue vorliegen. □



Allgemeiner Satz von Desargue

Eine interessante Fragestellung, die wir zum selben Thema hier nur aufwerfen wollen, entsteht aus dem Vergleich verschiedener Pappus-Geraden. Sind A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 jeweils kollinear, so führen die verschiedenen Permutationen der Punkte B_1, B_2, B_3 zu insgesamt 6 solchen Geraden (Permutationen der Punkte auf der anderen Geraden haben keinen Einfluss: Ist (σ, τ) ein Paar von Permutationen der Punkte (A) und (B), so liefert die Permutation $(1, \sigma^{-1}\tau)$ dieselbe Pappus-Gerade). Es stellt sich heraus, dass drei dieser Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen.



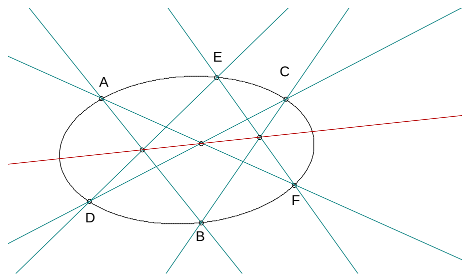
Die 6 Pappusgeraden zu einer Punktkonfiguration

Der Satz von Pappus ist ein Spezialfall eines noch allgemeineren Satzes der projektiven Geometrie. Wir betrachten dazu eine Konfiguration aus sechs Punkten der Ebene A, B, C, D, E, F, für die $X = AB \wedge DE, Y = BC \wedge EF$ und $Z = CD \wedge AF$ kollinear sind. In einer solchen Konfiguration sind die ersten fünf Punkte frei wählbar, wobei auch die Lage von X bestimmt wird. Die Richtung der Geraden $g = g(EF)$ bestimmt Y eindeutig und somit auch $Z = CD \wedge XY$. F ergibt sich dann als $F = AZ \wedge g$. Eine solche Punktekonfiguration bezeichnet man als ein *Pascalsches Sechseck.*

Führt man Koordinaten ein, so stellt sich heraus, dass sich solche Punktekonfigurationen analytisch recht einfach charakterisieren lassen. Es gilt der folgende

Satz 10 (Satz von Pascal) *Sechs Punkte spannen genau dann ein Pascalsches Sechseck auf, wenn sie auf einer Kurve zweiten Grades liegen.*

Auf einen vollständigen Beweis dieses Satzes muss hier verzichtet werden, da hierfür noch Kurven zweiten Grades einzuführen wären. Man kann aber wie im Beweis des Satzes von Pappus einen wesentlichen Teil durch eine projektive Transformation aus einer spezielleren Situation herleiten, die Gegenstand der folgenden Aufgabe ist.



Pascalsches Sechseck

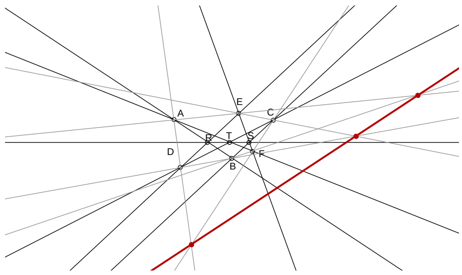
Aufgabe 4:

> Beweisen Sie den folgenden Spezialfall des Satzes von Pascal:
> Liegen die Punkte A, B, C, D, E, F auf einem Kreis und gilt $AB \| CD$ und $BC \| EF$, so ist auch $CD \| EF$.

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Pascal ist die aus der ursprünglichen Definition nicht ersichtliche Tatsache, dass jede Permutation von Punkten, die ein Pascalsches Sechseck aufspannen, wieder ein solches bilden. Das liefert Aussagen der ebenen Geometrie, zu deren Formulierung keine Kurven zweiter Ordnung benötigt werden. Solche Sätze heißen in [5] *Sätze vom Pascal-Typ.* Ein solcher wäre z.B. die folgende Aussage:

Sind $R = AB \wedge DE, S = BC \wedge EF, T = CD \wedge AF$ kollinear, so sind auch $X = AD \wedge CF, Y = BD \wedge CE, Z = BF \wedge AE$ kollinear.

Um dieses Bild zu zeichnen müssen die Punkte in geeigneter Reihenfolge eingeführt werden: R, T und A können frei gewählt werden. Die Punkte $S \in RT, B \in AR, C \in BS, D \in CT$ und $E \in DR$ ergeben sich als (semifreie) Gleiter auf Geraden, der letzte Punkt $F = ES \wedge AT$ als Schnittpunkt zweier Geraden.



Satz vom Pascal-Typ

1.6 Zur Dualität von Punkten und Geraden in der projektiven Geometrie

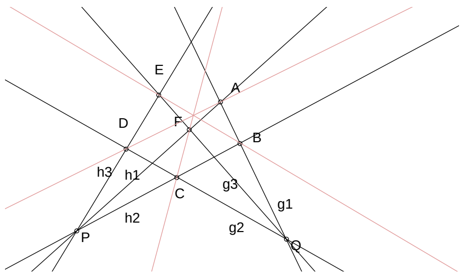
In vielen geometrischen Aussagen über Punkte und Geraden kann man die Worte „Punkt“ und „Gerade“ vertauschen und bekommt einen ebenfalls gültigen geometrischen Satz. Die einfachsten Aussagen dieser Art sind

- Es gibt genau eine Gerade durch zwei (voneinander verschiedene) Punkte.
- Zwei voneinander verschiedene Geraden haben genau einen Schnittpunkt (oder sind parallel).

Die Sonderrolle zueinander paralleler Geraden kann man aufheben, wenn man von der affinen zur projektiven Ebene übergeht, die man durch Hinzufügen der Punkte auf einer Ausnahmegeraden erhält, die „unendlich weit“ entfernt liegen, so dass zwei parallele Geraden genau einen gemeinsamen Punkt auf dieser Ferngeraden haben.

Als Beispiele für solche „dualen“ Sätze betrachten wir zunächst den folgenden Satz:

Satz 11 (Dualer Satz von Pappus) *Seien g_1, g_2, g_3 und h_1, h_2, h_3 jeweils konkurrente Geraden, die sich in P bzw. Q schneiden und $A, ..., F$ die Schnittpunkte $A = h_1 \wedge g_1, B = g_1 \wedge h_2, C = h_2 \wedge g_2, D = g_2 \wedge h_3, E = h_3 \wedge g_3$ und $F = g_3 \wedge h_1$. Die drei Verbindungsgeraden AD, BE und CF gehen durch einen gemeinsamen Punkt.*



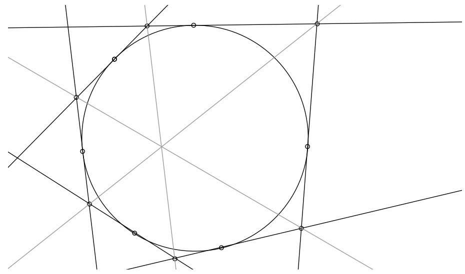
Dualer Satz von Pappus

Aufgabe 5:

> Durch eine projektive Transformation kann man die Punkte P und Q auf die Ferngerade legen und bekommt so einen (gleichwertigen) Satz über zwei Tripel paralleler Geraden. Formulieren und beweisen Sie diese Aussage.

Da bei projektiven Transformationen zwar keine Kreise erhalten bleiben, aber Quadriken in Quadriken übergehen, ist auch der Satz von Pascal eine Aussage der projektiven Geometrie. Vertauscht man hier die Rolle von „Punkt“ und „Gerade“, so erhält man den Satz von Brianςon.

Satz 12 (Satz von Brianćon) *Die Geraden a, b, c, d, e, f mögen eine Quadrik berühren, so dass sich „benachbarte“ Geraden in den Punkten A, B, C, D, E, F schneiden (d.h. $ABCDEF$ ist ein Tangentensechseck). In jedem solchen Tangentensechseck gehen die Diagonalen AD, BE und CF zwischen gegenüber liegenden Eckpunkten durch einen gemeisamen Punkt.*



Der Satz von Brianćon

2 Die Koordinatenmethode und geometrische Sätze vom konstruktiven Typ

2.1 Grundlegende geomtrische Zusammenhänge in koordinatengeometrischer Interpretation

Für die Visualisierung geometrischer Konfigurationen spielt die Darstellung durch Koordinaten eine zentrale Rolle. Im klassischen Zugang der ebenen Geometrie werden dazu Punkte P durch Koordinaten (p_1, p_2) im Punktraum $\mathbf{A}_2$ dargestellt und Darstellungen anderer geometrischer Objekte daraus abgeleitet. Geraden können etwa durch zwei Punkte, ein kreis durch Zentrum und Peripheriepunkt gegeben werden.

Eine kompakte Geradendarstellung ergibt sich durch Tripel $g = (g_1, g_2, g_3)$, das für die Gerade aus den Punkten $\{\ (x_1, x_2)\ :\ g_1x_1 + g_2x_2 + g_3 = 0\ \}$ steht. Ein solches Tripel bezeichnet man als *homogene Koordinaten* der Geraden g. Zueinander proportionale Tripel beschreiben dieselbe Gerade g und für (echte) Geraden dürfen g_1 und g_2 nicht gleichzeitig verschwinden.

Die wichtigsten geometrischen Eigenschaften von Punkten und Geraden spiegeln sich dann in den folgenden Formeln wider:

- A, B, C sind *kollinear*, d.h. liegen auf einer gemeinsamen Geraden g genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

  $$\begin{aligned} g_1a_1 + g_2a_2 + g_3 &= 0 \\ g_1b_1 + g_2b_2 + g_3 &= 0 \\ g_1c_1 + g_2c_2 + g_3 &= 0 \end{aligned}$$

  eine (nichttriviale) Lösung in (g_1, g_2, g_3) besitzt, d.h. wenn

  $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

  gilt.

- Analog gehen drei Geraden g, h, k durch einen gemeinsamen Punkt genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem

  $$\begin{aligned} g_1x_1 + g_2x_2 + g_3 &= 0 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + h_3 &= 0 \\ k_1x_1 + k_2x_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

  eine Lösung in (x_1, x_2) besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn die zugehörige Koeffizientenmatrix denselben Rang wie die erweiterte Koeffizientenmatrix hat. Da dieser Rang höchstens 2 sein kann, muss also

$$det \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} = 0$$

gelten. Ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich 2, so hat das System dann eine (eindeutig bestimmte) Lösung. Ist ihr Rang dagegen gleich 1, d.h. sind ihre drei Zeilen (g_1, g_2), (h_1, h_2) und (k_1, k_2) zueinander proportional, so sind die drei Geraden g, h, k zueinander parallel, schneiden sich also "im Unendlichen" oder fallen zusammen.

Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder zueinander parallel sind, bezeichnet man als *konkurrente Geraden.*

- Für die Parameter einer Geraden durch zwei Punkte A, B erhalten wir aus der Zwei-Punkte-Gleichung
$$(g_1, g_2, g_3) = (b_2 - a_2,\, a_1 - b_1,\, a_2 b_1 - a_1 b_2)$$
- Zwei Geraden g, h sind parallel genau dann, wenn $g_1 h_2 - h_1 g_2 = 0$ gilt, d.h. ihre Normalenvektoren (g_1, g_2) und (h_1, h_2) zueinander parallel sind.
- Die Parameter der Parallelen h zu g durch einen Punkt P ergeben sich durch Adjustieren des Absolutglieds von g als
$$(h_1, h_2, h_3) = (g_1, g_2, -(g_1 p_1 + g_2 p_2)).$$
- Die Koordinaten des Schnittpunkts P zweier Geraden g, h berechnet sich als Lösung des entsprechenden Gleichungssystems nach der Cramerschen Regel zu
$$(p_1, p_2) = \left(\frac{g_2 h_3 - g_3 h_2}{d}, \frac{g_3 h_1 - g_1 h_3}{d}\right) \quad \text{mit} \quad d = g_1 h_2 - h_1 g_2$$
- Ein Punkt X auf der Geraden $g(AB)$ hat bei bekanntem Teilverhältnis $u = \frac{l(AX)}{l(AB)}$ die Koordinaten
$$(x_1, x_2) = ((1-u)\, a_1 + u\, b_1,\, (1-u)\, a_2 + u\, b_2)$$

Auch Begriffe aus der Euklidschen Geometrie lassen sich symbolisch durch entsprechende Koordinaten ausdrücken:

- So ergibt sich der Abstand zwischen den Punkten A, B aus der Formel
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$
Da es sich dabei nicht um einen arithmetischen Ausdruck handelt, wollen wir statt dessen mit dem *Abstandsquadrat* $sqrdist(A, B) = d(A, B)^2$ arbeiten.
- Zwei Geraden g, h sind orthogonal genau dann, wenn ihre Normalenvektoren (g_1, g_2) und (h_1, h_2) senkrecht aufeinander stehen, d.h. für das entsprechende Skalarprodukt
$$g_1 h_1 + g_2 h_2 = 0$$
gilt.
- Schließlich lässt sich das Lot h von P auf die Gerade g ausdrücken als
$$(h_1, h_2, h_3) = (g_2, -g_1, g_1 p_2 - g_2 p_1).$$

2.2 Koordinatentransformationen und homogene Punktkoordinaten

Geometrische Eigenschaften hängen nicht von der konkreten Koordinatendarstellung ab, sind also *invariant unter Koordinatentransformationen.* Im zweidimensionalen Punktraum $\mathbf{A}_2$ lassen sich solche Transformationen $\phi_A : (x_1, x_2)^T \mapsto (x_1', x_2')^T$ schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Dabei bedeutet $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ einen Translationsanteil. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ muss eine reguläre Matrix ($det(A) \neq 0$) sein. Für spezielle Transformationen (etwa solche, die Längen und Winkelgrößen erhalten), sind weitere Forderungen an A zu stellen (etwa $A^T A = E$). Kompakt können wir auch schreiben

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\tilde{A}$. Eine solche Transformation bezeichnet man als *affine Transformation.*

Die Bilder dreier nicht kollinearer Punkte beschreiben eine affine Abbildung eindeutig (führt auf ein lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen in 6 Variablen).

Wie transformieren sich dabei Geradenvektoren?

$$\phi^* : (g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_1', g_2', g_3')$$

Da $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g_1' & g_2' & g_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix}$ dieselbe Punktmenge beschreibt, gilt offensichtlich

$$\begin{pmatrix} g_1' & g_2' & g_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} \tilde{A}^{-1}$$

Die Transformationsmatrix ist also (in Spaltenschreibweise) gerade $\tilde{A}^{-T}$ (die invers-transponierte Matrix) oder einfacher (da Geradenkoordinaten homogen sind) $\tilde{A}^*$, die Adjunktenmatrix von $\tilde{A}$.

Homogene Geradenkoordinaten haben also einen großen Vorteil: man kann nennerfrei rechnen und muss sich nicht um Division durch 0 kümmern.

Deshalb rechnet man auch gern mit *homogenen Punktkoordinaten* im Punktraum.

Definition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ bezeichnet man als homogene Koordinaten des Punkts $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, wenn $x_3 \neq 0$.

Homogene Puntkoordinaten sind für Punkte nur bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt. Eine Geradengleichung sieht dann so aus:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; : \; g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = 0 \right\}$$

Alle Punkte mit $x_3 = 0$ liegen auf der Geraden $(0 : 0 : 1)$, die bisher als Gerade nicht zugelassen war und die offensichtlich als die *Ferngerade* zu interpretieren ist, die die affine Ebene $\mathbf{A}_2$ zur projektiven Ebene $\mathbf{P}_2$ erweitert.

In dieser Notation kommt die Dualität von Punkten und Geraden deutlicher zum Vorschein. Bezeichnen wir dazu mit $\mathbf{P}_2^*$ den Raum der projektiven Geraden. Dann gilt

- A, B, C in homogenen Punktkoordinaten sind kollinear $\Leftrightarrow$

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Notation: $|A\ B\ C| = 0$ (Spatprodukt)

- Analog sind drei Geraden g, h, k konkurrent $\Leftrightarrow$ $|g\ h\ k| = 0$

- Punkt P und Gerade g sind inzident $\Leftrightarrow$

$$g^T P = p_1 g_1 + p_2 g_2 + p_3 g_3 = 0$$

  Notation: $P * g = 0$ (Skalarprodukt)

- Für den Schnittpunkt P zweier Geraden g, h können wir die frühere Formel nennerfrei interpretieren:

$$P = (g_2h_3 - g_3h_2, g_3h_1 - g_1h_3, g_1h_2 - g_2h_1) = \left(\begin{vmatrix} g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} g_3 & g_1 \\ h_3 & h_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (g_1, g_2, g_3) \times (h_1, h_2, h_3) = g \times h$$

  Das sind genau die Koordinaten des Vektorprodukts zweier Vektoren im $\mathbf{R}^3$.

- Die Gleichung einer Geraden durch zwei in homogenen Koordinaten gegebene (verschiedene) Punkte A, B lautet analog

$$g = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = A \times B$$

- A, B, C sind kollinear $\Leftrightarrow$ A ist inzident zur Geraden durch B und C $\Leftrightarrow$ $A * (B \times C) = 0$. dies stimmt wegen des bekannten Zusammenhangs

$$|A\ B\ C| = A * (B \times C)$$

  zwischen Spat-, Vektor- und Skalarprodukt im $\mathbf{R}^3$ mit obiger Determinantenformel überein.

Homogene Punkt- bzw. Geradenkoordinaten sind genau dann *nicht zulässig*, wenn sich $(0:0:0)$ ergibt. Aus der Formel für die Koordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden g, h ist ersichtlich, dass sich nicht zulässige Koordinaten genau dann ergeben, wenn die Koordinaten von g und h proportional sind, d.h. wenn g und h identisch sind.

Analog ergeben sich nicht zulässige Geradenkoordinaten für die Verbindungsgerade zweier Punkte A und B genau dann, wenn $A = B$ gilt.

Auch Parallelität und Teilverhältnisse kann man ausdrücken, wenn berücksichtigt wird, dass diese Größen nicht projektiv invariant sind, d.h. bei ihrer Definition die Ferngerade $l_0 = (0:0:1)$ eine Rolle spielen muss:

- Zwei Geraden g, h sind parallel $\Leftrightarrow$ sie schneiden sich auf der Ferngeraden, d.h. $|g\ h\ l_0| = 0$. Das stimmt mit unserer weiter oben hergeleiteten Formel überein.

- Die Gerade h durch P, die parallel zu g verläuft, ergibt sich als Verbindung von $g \times l_0$ und P: $h = P \times (g \times l_0)$.

- Mit Parallelen kann man aus einem Standardframe ein ganzes affines Koordinatensystem gewinnen. Als *Standardframe* bezeichnet man die Punkte $e_1 = (1:0:0), e_2 = (0:1:0), e_3 = (0:0:1), u = (1:1:1)$. Geometrisch sind e_3 der Ursprung des (affinen) Koordinatensystems, e_1, e_2 die Fernpunkte in x- bzw. y-Richtung (diese bestimmen zusammen mit e_3 die x- und y-Richtung) und u der Einheitspunkt mit den (affinen) Koordinaten $(1, 1)$. Parallelen zur x- bzw. y-Achse durch u schneiden die y- bzw. x-Achse in den Koordinaten-Einheiten und auch andere Teilpunkte auf den Achsen mit ganzzahligen Koordinaten lassen sich leicht konstruieren.

- Teilverhältnisse: Die Mittelpunktsformel

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

gilt für homogene Koordinaten nicht mehr, da sie selbst nicht homogen ist. Die richtige Modifikation lautet

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \frac{b_3}{2}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \frac{a_3}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

und allgemeiner für Teilverhältnis u

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = (1-u)\, b_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + u\, a_3 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Die Ferngerade bildet dabei eine Art „schwarzes Loch“, denn liegt einer der beiden Randpunkte dort, so auch M (es gilt stets $m_3 = a_3 b_3$). Wenn beide Randpunkte A und B auf der Ferngeraden liegen, so ergeben sich für M unzulässige Koordinaten.

Das Teilverhältnis u der Punkte A, B, M lässt sich auf das projektiv invariante Doppelverhältnis zurückführen (das wir später einführen), wenn der Fernpunkt F der Geraden AB verwendet wird. Dieser ergibt sich für $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als $F = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = B - A$. Dann gilt

$$u = (A\ F \mid M\ B) = (A\ F \mid (A + uF)\ (A + F))$$

Teilverhältnisse auf der Ferngeraden lassen sich nicht sinnvoll definieren, da dort kein Fernpunkt spezifiziert werden kann.

2.3 Zur Algorithmisierung geometrischer Konstruktionen. Analytische Geometrie mit dem Computer

Wir können auf der Basis der im Abschnitt 2.1 hergeleiteten Beziehungen nun in einer klassischen imperativen Programmiersprache (die an dieser Stelle noch nicht über die Fähigkeit zur Symbolverarbeitung verfügen muss) Funktionen schreiben, die in der Lage sind, Beziehungen in durch konkrete Koordinatenwerte vorgegebenen geometrischen Konfigurationen zu überprüfen oder gesuchte Größen auszurechnen. Entsprechende Funktionen sind auch die Grundlage für dynamische Geometriesysteme, mit denen entsprechende Konfigurationen grafisch dargestellt werden können

Die elementaren geometrischen Objekte Punkt und Gerade setzen wir dazu als Klassen `Point` und `Line` um, die in Java etwa als

```
public class Point {
    public Scalar x,y;

    public Point () { }
    public Point(Scalar x, Scalar y) { this.x=x; this.y=y; }
    ...
};

public class Line {
    public Scalar a,b,c;

    public Line () {}
```

```
    public Line(Scalar a, Scalar b,Scalar c) {
        if (iszero(a) & iszero(b) & iszero(c))
            throw new GeoException("Gerade mit Nullkoordinaten");
        this.a=a; this.b=b; this.c=c;
    }
        ...
};
```

definiert werden können und Punkte $P(x_1, x_2)$ bzw. Geraden $g = \{(x_1, x_2) : g_1x_1 + g_2x_2 + g_3 = 0\}$ darstellen. `Scalar` ist dabei ein Körper, aus dem die Werte der Koordinaten kommen, also in Java etwa der interne Typ `double` oder etwas Selbstgestricktes wie `Rational` oder `Complex`. Wir wollen annehmen, dass für diesen Datentyp die arithmetischen Operationen $+\ -\ *\ /$ sowie ein boolesches Prädikat `boolean iszero()` definiert sind.

Geometrische Grundkonstruktionen können wir in diesem Kontext als Funktionen auffassen, die aus gegebenen Objekten neue konstruieren, und in einer weiteren Klasse `GeoFunctions` als Klassenfunktionen bündeln.

1) Die Gerade durch zwei Punkte P und Q

```
public static Line pp_line(Point p, Point q) {
  return new Line(q.y-p.y, p.x-q.x, p.y*q.x-p.x*q.y);
}
```

P und Q sind dabei formale Parameter vom Typ `Point`, der Rückgabewert der Funktion vom Typ `Line`.

2) Analog können wir den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen, wobei die zu definierende Funktion mit einer Ausnahme abbricht, wenn kein bzw. kein eindeutig bestimmter Schnittpunkt existiert.

```
public static Point intersection_point(Line g, Line h) {
  Scalar d = g.a*h.b-g.b*h.a;
  if (iszero(d)) throw new GeoException("Geraden sind parallel");
  return new Point((g.b*h.c - g.c*h.b)/d,(g.c*h.a - g.a*h.c)/d);
}
```

Auch hier sind g und h formale Parameter, diesmal vom Typ `Line`.

3) Für das Lot l von einem Punkt P auf eine Gerade g erhalten wir analog

```
public static Line ortho_line(Point p, Line g) {
  return new Line(g.b, -g.a, g.a*p.y - g.b*p.x);
}
```

und für die Parallele zu einer Geraden g durch einen Punkt P

```
public static Line par_line(Point p, Line g) {
  return new Line(g.a, g.b, -(g.a*p.x + g.b*p.y));
}
```

Das *Abstandsquadrat* ergibt sich schließlich als

```
public static Scalar sqrdist(Point p, Point q) {
  return new Scalar((p.x-q.x)*(p.x-q.x) + (p.y-q.y)*(p.y-q.y));
}
```

4) Neben freien Punkten, die mit dem Punktkonstruktor erzeugt werden können sind auch Punkte auf vorgegebenen Geraden (*Geradengleiter*) oder Kreisen (*Kreisgleiter*) interessant. Einen Geradengleiter auf einer durch zwei Punkte gegebenen Geraden kann man etwa durch ein variables Teilverhältnis festlegen:

```
public static Point varpoint(Point P, Point Q, Scalar u) {
  return new Point((1-u)*p.x+u*q.x,(1-u)*p.y+u*q.y);
}
```

Insbesondere liefert

```
Point midpoint(Point P,Point Q) { return varpoint(P,Q,new Scalar(1/2)); }
```

den Mittelpunkt der Strecke PQ.

5) Komplexere geometrische Konstruktionen (Makros) können aus nacheinander ausgeführten Grundkonstruktionen zusammengesetzt werden. Dem entsprechen auf der Seite der Programmiersprachen zusammengesetzte Funktionen. So findet man etwa den Fußpunkt des Lots vom Punkt P auf die Gerade a als

```
public static Point pedalpoint(Point P, Line a) {
  return intersection_point(ortho_line(P,a),a);
}
```

Aufgabe 6:

Geben Sie entsprechende Funktionen an

- `Line p_bisector(Point A, Point B)` für die Mittelsenkrechte (perpendicular bisector) auf der Seite AB,
- `Line altitude(Point A, Point B, Point C)` für die Höhe durch A im Dreieck ABC,
- `Line median(Point A, Point B, Point C)` für die Seitenhalbierende, die durch A im Dreieck ABC verläuft.

6) Schließlich kann man testen, ob für gewisse Konfigurationen geometrische Bedingungen erfüllt sind. So kann man etwa testen, ob zwei gegebene Geraden g und h parallel oder orthogonal sind, indem man prüft, ob $g_1h_2 - g_2h_1$ bzw. $g_1h_1 + g_2h_2$ verschwindet, oder ob ein Punkt P auf einer Geraden g liegt. Entsprechende Funktionen haben folgende Spezifikation:

```
public static boolean is_parallel(Line g, Line h) {
  return iszero(g.a*h.b-h.a*g.b);
}
```

bzw.

```
public static boolean is_orthogonal(Line g, Line h) {
  return iszero(g.a*h.a+g.b*h.b);
}

public static boolean is_point_on_line(Point P, Line g) {
  return iszero(g.a*P.x+g.b*P.y+g.c);
}
```

Auch kompliziertere Bedingungen, die wir im letzten Paragraph hergeleitet hatten, kann man auf diese Weise prüfen, so z.B., ob drei gegebene Punkte P, Q, R *kollinear* oder drei gegebene Geraden a, b, c d.h. *konkurrent* sind. Die entsprechenden Funktionen `is_collinear` und `is_concurrent` lassen sich leicht angeben.

AUFGABE 7:

> Führen Sie die Implementierung entsprechender Funktionen wie oben begonnen in Java zu Ende.

Mit diesem Arsenal kann man die Koordinaten auch komplizierterer geometrischer Objekte bestimmen und entsprechende geometrische Sätze in konkreten Konfigurationen überprüfen.

Beispiel 1: Der Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Die Funktion

```
static boolean CircumCenter_Test1(Point A, Point B, Point C) {
  return is_concurrent(p_bisector(A,B), p_bisector(B,C), p_bisector(C,A));
}
```

prüft, ob für ein Dreieck, das durch seine Eckpunkt(koordinaten) A, B, C gegeben ist, die drei Mittelsenkrechten durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Alternativ kann man wie im elementargeometrischen Beweis dieses Satzes auch zuerst die Koordinaten des Schnittpunkt zweier der Mittelsenkrechten bestimmen und dann zeigen, dass dieser Punkt auf der dritten Mittelsenkrechten liegt:

```
static boolean CircumCenter_Test2(Point A, Point B, Point C) {
  Point M = intersection_point(p_bisector(A,B), p_bisector(B,C));
  return on_line(M, p_bisector(C,A));
}
```

Letztere Funktion lässt sich zu eine Test erweitern, der zeigt, dass dieser Schnittpunkt der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $\Delta\, ABC$ ist. Dazu ist

$$sqrdist(M, A) = sqrdist(M, B) = sqrdist(M, C)$$

zu testen, d.h. die letzte Zeile durch

```
  return iszero(sqrdist(M,A) - sqrdist(M,B)) &
      iszero(sqrdist(M,B) - sqrdist(M,C));
```

zu ersetzen.

AUFGABE 8:

> Geben Sie analoge Testfunktionen für die Sätze vom Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierdenden. Lassen Sie auch testen, dass die Produkte aus den Höhenabschnitten im Dreieck gleich sind bzw. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden diese im Verhältnis 2:1 teilt.

Beispiel 2: Der Satz von der Eulerschen Geraden:

```
static boolean EulerLine_Test(Point A, Point B, Point C) {
  Point M = intersection_point(p_bisector(A,B), p_bisector(B,C));
  Point H = intersection_point(altitude(A,B,C), altitude(B,C,A));
  Point S = intersection_point(median(A,B,C), median(B,C,A));
  return is_collinear(M,H,S);
}
```

Aufgabe 9:

> Modifizieren Sie diese Testfunktion so, dass sie den Satz vom Feuerbachschen Kreis testet. (`Feuerbach_Test(Point A, Point B, Point C)`)
>
> Testen Sie den (affinen) Satz von Desargue.(`Desargue_Test(Point A, Point B, Point C)`)

2.4 Symbolische analytische Geometrie

Dieselben Funktionen, die wir im letzten Abschnitt in einer klassischen Programmiersprache betrachtet haben, die es gestattet, Konfigurationen der analytischen Geometrie mit konkreten Koordinaten durchzurechnen, kann man auch in einem System implementieren, das symbolische Formelmanipulationen erlaubt.

Entsprechende Implementierungen stehen für Maple, MuPAD, Reduce und Mathematica mit dem GeoProver-Paket [3] zur Verfügung. Die Pakete implementieren einen gemeinsamen Sprachstandard für Geometriebeweise, dessen Syntax in der GeoCode-Tabelle des SymbolicData-Projekts [4] fixiert ist. Kleinere Syntaxunterschiede zwischen den Sprachen der Target-CAS machen noch ein gemeinsames Oberformat und entsprechende Übersetzwerkzeuge erforderlich. Hier ist in Zukunft eine Migration nach XML vorgesehen.

Aber weiter in unserem Text: Ein solches System bietet zusätzlich die Möglichkeit, die formalen Parameter in unseren Funktionen durch *Symbole* zu ersetzen. Da alle von uns bisher implementierten Funktionen mit einem Nulltest `iszero()` abschließen oder Punkte oder Geraden zurückliefern, deren Komponenten sich rational in den Komponenten der Eingabeparameter zusammensetzen, erhalten wir als Ergebnis unserer Rechnungen (eine Fehlermeldung oder) *rationale* Ausdrücke in diesen Symbolen. Dieser rationale Ausdruck stellt eine *universelle Formel* in dem Sinne dar, dass jede konkrete Belegung der Variablen mit Werten aus dem Grundbereich, also etwa den reellen Zahlen, zu den Parametern der abgeleiteten geometrischen Größe führt.

Der Aufruf einer solchen Funktion mit (konkreten) Parametern, die ihrerseits wieder aus Funktionsaufrufen gewonnen werden, bedeutet in diesem Kontext, dass die Variablen eines rationalen Ausdrucks durch andere rationale Ausdrücke zu substituieren sind. Im Ergebnis erhalten wir wieder rationale Ausdrücke, die sich natürlich simplifizieren lassen. Bestimmen wir etwa die Koordinaten des Umkreismittelpunkts des Dreiecks ABC als Schnittpunkt der entsprechenden Mittelsenkrechten m, n, so bedeutet dies auf dem betrachteten symbolischen Niveau, dass beim Aufruf von `intersection_point(p_bisector(B,C), p_bisector(C,A))` in der Formel

$$\left(\frac{m_2n_3 - m_3n_2}{m_1n_2 - m_2n_1}, \frac{m_3n_1 - m_1n_3}{m_1n_2 - m_2n_1}\right),$$

nach der sich die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden m, n berechnen, die Komponenten von m, n durch die entsprechenden rationalen Ausdrücke

$$\texttt{p\_bisector}(B, C) = \{b_1 - c_1,\ b_2 - c_2,\ \tfrac{-b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 + c_2^2}{2}\}$$

bzw.

$$\texttt{p\_bisector}(C, A) = \{-a_1 + c_1,\ -a_2 + c_2,\ \tfrac{a_1^2 + a_2^2 - c_1^2 - c_2^2}{2}\}$$

zu ersetzen sind. Diese Ausdrücke sind ihrerseits während des Aufrufs

```
p_bisector(B,C) == ortho_line(midPoint(B,C),pp_line(B,C))
```

in einem Substitutions- und Simplifikationsprozess (der Tiefe 2) nach demselben Prinzip entstanden. Wir erhalten in diesem Fall als Formel für den Umkreismittelpunkt

$$M := \left(\frac{\begin{array}{l} {a_1}^2 b_2 - {a_1}^2 c_2 + {a_2}^2 b_2 - {a_2}^2 c_2 - \\ a_2 {b_1}^2 - a_2 {b_2}^2 + a_2 {c_1}^2 + a_2 {c_2}^2 + \\ {b_1}^2 c_2 + {b_2}^2 c_2 - b_2 {c_1}^2 - b_2 {c_2}^2 \end{array}}{\begin{array}{l} 2\, a_1 b_2 - 2\, a_1 c_2 - 2\, a_2 b_1 + 2\, a_2 c_1 + \\ 2\, b_1 c_2 - 2\, b_2 c_1 \end{array}}, \frac{\begin{array}{l} -{a_1}^2 b_1 + {a_1}^2 c_1 + a_1 {b_1}^2 + a_1 {b_2}^2 - \\ a_1 {c_1}^2 - a_1 {c_2}^2 - {a_2}^2 b_1 + {a_2}^2 c_1 - \\ {b_1}^2 c_1 + b_1 {c_1}^2 + b_1 {c_2}^2 - {b_2}^2 c_1 \end{array}}{\begin{array}{l} 2\, a_1 b_2 - 2\, a_1 c_2 - 2\, a_2 b_1 + 2\, a_2 c_1 + \\ 2\, b_1 c_2 - 2\, b_2 c_1 \end{array}} \right)$$

Der Simplifikationsprozess rationaler Funktionen liefert eine einfachere rationale Funktion, die für alle Parameterbelegungen mit komplexen Zahlen, die für die unsimplifizierte Funktion nicht zu einem Fehlerabbruch führen, denselben Wert hat wie diese. Die zurückgegebene rationale Funktion stellt somit eine *Funktionstransformation* gegenüber dem vorherigen geschachtelten Funktionsaufruf dar, mit dessen Hilfe sich die genannten Parameter *direkt* berechnen lassen. Der Definitionsbereich der simplifizierten rationalen Funktion kann allerdings größer sein als der der Ausgangsfunktion.

Wir können diese Rechnungen nun für die Aufgaben aus dem vorigen Abschnitt mit symbolischen Eingabewerten ausführen (siehe das Maple-Arbeitsblatt `geo-1.mws`).

In all diesen Beispielen simplifizierte der zusammengesetzte rationale Ausdruck, manchmal mit einiger Mühe, zu Null. Wir können in diesem Fall also schlussfolgern, dass diese Bedingung für alle zulässigen Parameterspezifikationen, d.h. solche, wo in den auftretenden Nennern nicht durch 0 geteilt wird, erfüllt ist. Auf diesem Wege erhalten wir bereits allgemeingültige Beweise für eine Reihe der oben betrachteten Geometrie-Theoreme.

Für geometrische Sachverhalte, die sich analytisch in die beschriebene Form bringen lassen, gibt es also die folgenden Alternativen:

1) Der Funktionsaufruf bricht mit einer Fehlermeldung ab.

In allen oben beschriebenen Fällen tritt dies allerdings nur auf, wenn ein rationaler (Zwischen-)Ausdruck, der zulässig zu einem Wert verschieden Null spezifizieren muss, als rationale Funktion identisch Null ist.

2) Die durch den Funktionsaufruf zurückgegebene rationale Funktion simplifiziert zu Null.

Dann gilt der geometrische Satz für alle zulässigen Parameterspezifikationen.

3) Die durch den Funktionsaufruf zurückgegebene rationale Funktion simplifiziert nicht zu Null.

Dann gilt der geometrische Satz für fast alle zulässigen Parameterspezifikationen nicht. Der Satz gilt nur unter einer Zusatzbedingung, die analytisch durch das Zählerpolynom des simplifizierten Ausdrucks beschrieben wird.

Bei diesen Überlegungen bleibt der Begriff der *zulässigen Parameterspezifikation* offen. Dies bedeutet, dass die Parameter so zu wählen sind, dass alle konstruktiven Zwischenschritte analytisch ausführbar sind, d.h. in unserem Fall insbesondere, dass bei konkreten Parameterbelegungen gewisse Nenner rationaler Funktionen nicht verschwinden. Es reicht dabei sicher nicht aus, den Nenner des Endergebnisses zu betrachten, weil eine Reihe von Simplifikationszwischenschritten bei konkreten Parameterspezifikationen auf Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ führen können, deren Unbestimmtheit sich im weiteren Prozess der Vereinfachung des entsprechenden rationalen Ausdrucks weghebt. Andererseits ist man daran interessiert, unzulässige Parameterspezifikationen zu erkennen, weil deren Kenntnis es erlaubt, die geometrischen Voraussetzungen, unter denen die untersuchte Aussage gültig ist, weiter zu präzisieren.

Diese Bedingungen auf die Zulässigkeit von Parameterspezifikationen müssen im Laufe des Simplifikationsprozesses der rationalen Funktion aufgesammelt werden und haben die Form $f \neq 0$ für eine geeignete *polynomiale* Bedingung f. In der Liste der bisher definierten (elementaren) Funktionen können nur an zwei Stellen solche *Nichtdegenerationsbedingungen* auf die Parameterspezifikation entstehen, nämlich in den Funktionen `intersection_point` und `line_slider`, wo die entsprechenden Nenner nicht verschwinden dürfen. Eine Modifikation der Funktionen erlaubt es, die (Zähler der) entsprechenden Nichtdegenerationsbedingungen in einer global definierten Liste aufzusammeln.

Eine Parameterspezifikation ist auch dann unzulässig, wenn sich aus ihr eine nicht zulässige Gerade $(0:0:0)$ ergibt. Diese Bedingung lässt sich schwerer kontrollieren. Sind $(f_1(t):f_2(t):f_3(t))$ die symbolischen homogenen Koordinaten mit gemeinsamem Teiler $\gcd(f_1, f_2, f_3) = g(t)$, so sind die Geradenkoordinaten für alle Nullstellen von $g(t)$ nicht zulässig. Für alle anderen Parameterwerte t können wir dagegen die Koordinaten durch $g(t)$ kürzen, ohne unzulässige Geradenkoordinaten zu erhalten. Wir können also homogene Koordinaten durch den gcd teilen (und damit Rechnungen oft vereinfachen), wenn wir diesen zu den Nichtdegenerationsbedingungen hinzu nehmen.

2.5 Der Mechanisierungssatz für geometrische Sätze vom konstruktiven Typ

Wir wollen nun geometrische Konfigurationen, auf die man das bisher beschriebene Mechanisierungsprinzip anwenden kann, genauer beschreiben. Die wichtigste gemeinsame Eigenschaft, die dabei ausgenutzt worden ist, war die Tatsache, dass sich die betrachtete geometrische Konfiguration mit einfachen Konstruktionsschritten auf einem "leeren Blatt Papier" Schritt für Schritt erzeugen ließ. Neben deterministischen Konstruktionsschritten gab es dabei auch solche, die gewisse Freiheiten bei der Auswahl von Punkten oder Geraden lassen. Um den Beweis allgemeingültig zu führen, sind alle diese Auswahlen zu untersuchen. Formal ist also ein solcher *Konstruktionsschritt* als Abbildung einer Menge geometrischer Konfigurationen in eine andere solche Menge zu betrachten.

In all unseren Beispielen ergaben sich diese geometrischen Konfigurationen alle aus einer einzigen *allgemeinen geometrischen Konfiguration* durch Spezifikation der Parameter, so dass gewisse degenerierte Lagebeziehungen vermieden wurden.

In diesen geometrischen Konfigurationen spielten geometrische Objekte (Punkte und Geraden) eine Rolle, die sich durch Parameterspezifikation aus *allgemeinen geometrischen Objekten* ergeben haben.

Um diese Begriffe genauer zu fassen, sei im folgenden $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Satz algebraisch unabhängiger Parameter, $R = \mathbf{C}[u_1, \ldots, u_n]$ der Polynomring in $u_1, \ldots, u_n$ und $K = \mathbf{C}(u_1, \ldots, u_n)$ dessen Quotientenkörper. Weiterhin betrachten wir *Spezifikationen* $\phi : u_i \mapsto c_i$, die den Parametern komplexe Zahlen $c_i \in \mathbf{C}$ zuordnen. Eine solche Spezifikation definiert einen Ringhomomorphismus $\phi_R : R \to \mathbf{C}$ sowie einen partiellen Morphismus $\phi_K : K \to \mathbf{C}$, der genau für alle $r \in K$, die sich als $r = \frac{f}{g} \in K$ mit $\phi_R(g) \neq 0$ darstellen lassen, definiert ist.

Definition: 1) Als *allgemeine geometrische Objekte* (AGO) bezeichnen wir Paare $P = (p_1, p_2)$ (genannt *Punkte*) und Tripel $g = (g_1, g_2, g_3)$ (genannt *Geraden*) von Elementen $p_1, p_2, g_1, g_2, g_3 \in K$. Letztere bezeichnen wir auch als die *Komponenten* des AGO. Wir sagen, dass dieses AGO unter der Spezifikation ϕ *korrekt spezifiziert*, wenn ϕ_K für alle beteiligten Komponenten definiert ist.

2) Als *allgemeine geometrische Konfiguration* (AGK) bezeichnen wir ein Paar (M, f), bestehend aus einer Menge M von AGO's und einer *Nichtdegenerationsbedingung* $f \in R,\ f \neq 0$, so dass für jede Spezifikation ϕ, für die $\phi_R(f) \neq 0$ gilt, die AGO's aus der Menge M korrekt spezifizieren.

3) Als (elementaren) *Konstruktionsschritt* bezeichnen wir eine Vorschrift, die aus einer gegebenen AGK (M, f) ein neues AGO g und eine Nichtdegenerationsbedingung $f' \in R$ konstruiert, so dass entweder $f' = 0$ gilt oder aber $(M \cup \{g\}, f')$ eine neue AGK ist.

4) Als *geometrische Behauptung vom konstruktiven Typ* (gBkT) bezeichnen wir eine AGK (M, f) zusammen mit einem polynomialen Ausdruck g in den Komponenten der verschiedenen AGO's aus der Menge M, welcher somit zugleich ein rationaler Ausdruck aus K ist.

Die Angabe des neuen AGO g in einem Konstruktionsschritt erfolgt meist durch einen rationalen Ausdruck, in den die Komponenten der einzelnen AGO's aus M eingehen. Die Anzahl der dabei neu verwendeten Parameter bezeichnet man als den *Freiheitsgrad* des entsprechenden Konstruktionsschritts. Ist $f' = 0$ als Polynom in R, so sprechen wir von *widersprüchlichen Voraussetzungen*, d.h. der gewünschte Konstruktionsschritt ist in der gegebenen AGK nicht ausführbar. Ein Vergleich mit 4) zeigt, dass die Widersprüchlichkeit der Voraussetzungen ihrerseits eine geometrische Behauptung vom konstruktiven Typ ist.

Definition: Wir sagen, dass die betrachtete gBkT (M, f, g) *gilt*, wenn bei jeder Spezifikation ϕ der Parameter mit $\phi_R(f) \neq 0$ (und damit die Koordinaten der AGO's aus M korrekt spezifizieren) $\phi_K(g) = 0$ gilt.

Dies entspricht der Vorstellung, die wir von AGO's als Platzhalter konkreter geometrischer Konfigurationen haben: Für jede (zulässige) Belegung der Parameter mit komplexen Zahlen entsteht eine konkrete geometrische Konfiguration, in der die untersuchte geometrische Aussage auch tatsächlich erfüllt ist.

Betrachten wir die Liste unserer bisher programmierten elementaren geometrischen Konstruktionen, so erkennen wir, dass sie alle die geforderte Spezifikation erfüllen. Wir können also mit ihrer Hilfe geometrische Sätze vom konstruktiven Typ formulieren.

Satz 13 *(Über das mechanisierte Beweisen geometrischer Sätze vom konstruktiven Typ): Eine geometrische Behauptung g vom konstruktiven Typ in einer AGK (M, f), die in endlich vielen Konstruktionsschritten aus der leeren AGK $(\emptyset, 1)$ gewonnen worden ist, gilt genau dann, wenn g als rationale Funktion in K identisch Null ist.*

Beweis : Offensichtlich verschwindet für $g = 0 \in K$ jede zulässige Spezifikation $\phi_K(g)$. Ist umgekehrt $g = \frac{p}{q} \neq 0$ mit $p, q \in R \setminus (0)$, so ist $p \cdot q \cdot f \neq 0$ und es gibt eine zulässige Spezifikation ϕ mit $\phi_R(p) \cdot \phi_R(q) \neq 0$, d.h. $\phi_K(g) \neq 0$. $\square$

Die Aussage des Satzes, dass eine rationale Funktion, die "fast" überall verschwindet, zu $0 \in K$ simplifiziert, ist nicht sehr überraschend. Die Hürden dieses Konzepts sind in Punkt 3) enthalten, wo die Definition eines elementaren Konstruktionsschrittes nur durch Eigenschaften, die garantiert werden müssen, eingeschränkt wird. Hier sind bei jeder Erweiterung unseres bisher entwickelten Instrumentariums Beweise zu erbringen.

3 Geometrische Sätze vom Gleichungstyp

Der bisher betrachtete Mechanisierungsansatz für Geometrietheoreme ging davon aus, dass man einen gegebenen Satz der Geometrie in eine konstruktive Form überführen kann. Das ist aber eine für geometrische Aussagen eher untypische Situation. Die meisten geometrischen Sätze gehen von einer bestimmten (konstruktiv gegebenen) geometrischen Konfiguration aus und behaupten dann:

> *Wenn* gewisse geometrische Voraussetzungen erfüllt sind, *dann* ergeben sich daraus gewisse Konsequenzen.

So behauptet etwa der *Satz des Ceva*:

> Gegeben sei ein Dreieck ABC und Punkte P, Q, R auf den Dreiecksseiten mit Teilverhältnissen u, v, w.
>
> Die Ecktransversalen AP, BQ und CR gehen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn $u\,v\,w = (1-u)\,(1-v)\,(1-w)$ gilt.

Eine wortwörtliche Übertragung der Formulierung in die im vorigen Abschnitt entwickelte Sprache lautet:

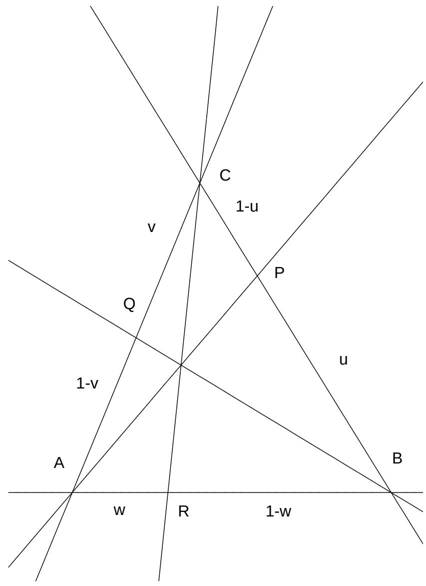
```
A:=Point(a1,a2); B:=Point(b1,b2); C:=Point(c1,c2);
P:=varpoint(B,C,u); Q:=varpoint(C,A,v); R:=varpoint(A,B,w);

pre:=is_concurrent(pp_line(A,P),pp_line(B,Q),pp_line(C,R));
con:=u*v*w-(1-u)*(1-v)*(1-w);
```

In der gegebenen Konfiguration, die generisch durch die 6 Koordinaten von A, B, C und die Teilverhältnisse u, v, w beschrieben wird, ist also zu zeigen, dass jede Nullstelle des Polynoms *pre* (der Voraussetzung = presumtio) auch eine Nullstelle des Polynoms *con* (der Schlussfolgerung = conclusio) ist. In diesem Fall lässt sich *pre* in die drei Faktoren

$$\begin{aligned}
f_1 &= -a_1\, b_2 + a_1\, c_2 + a_2\, b_1 - a_2\, c_1 - b_1\, c_2 + b_2\, c_1,\\
f_2 &= a_1\, b_2 - a_1\, c_2 - a_2\, b_1 + a_2\, c_1 + b_1\, c_2 - b_2\, c_1,\\
f_3 &= 2\, u\, v\, w - u\, v - u\, w + u - v\, w + v + w - 1
\end{aligned}$$

zerlegen, von denen nur der dritte mit *con* übereinstimmt, so dass es auch Spezifikationen gibt, in denen *pre* verschwindet, *con* jedoch nicht.



Analysiert man die beiden anderen Faktoren genauer, so erkennt man, dass sie genau der Bedingung `is_collinear(A,B,C)` entsprechen. Eine Spezifikation, in der dieses Polynom verschwindet, wäre also eine *degenerierte Lage*, so dass wir sehen, dass die beiden Polynome *pre* und *con* "im Wesentlichen" übereinstimmen. Der Satz des Ceva gilt also für alle (nicht degenerierten) Dreiecke.

Ähnlich können wir auch die Aussage des Satzes von Desargue formulieren. Hier sind 6 Punkte A, B, C, A', B', C' gegeben. Die Voraussetzung besteht aus drei geometrischen Bedingungen, dass in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ einander entsprechende Geraden zueinander parallel sind. Die Behauptung lautet, dass dann die Geraden AA', BB' und CC' konkurrent sind:

```
A:=Point(a1,a2); B:=Point(b1,b2); C:=Point(c1,c2);
A_:=Point(d1,d2); B_:=Point(e1,e2); C_:=Point(f1,f2);

pre:={  is_parallel(pp_line(A,B),pp_line(A_,B_)),
        is_parallel(pp_line(B,C),pp_line(B_,C_)),
        is_parallel(pp_line(A,C),pp_line(A_,C_))};

con:=is_concurrent(pp_line(A,A_),pp_line(B,B_),pp_line(C,C_));
```

Die Voraussetzung entspricht hier also einer Menge von drei Polynomen

$$\begin{aligned}
&\{a_1\, d_2 - a_1\, e_2 - a_2\, d_1 + a_2\, e_1 - b_1\, d_2 + b_1\, e_2 + b_2\, d_1 - b_2\, e_1,\\
&b_1\, e_2 - b_1\, f_2 - b_2\, e_1 + b_2\, f_1 - c_1\, e_2 + c_1\, f_2 + c_2\, e_1 - c_2\, f_1,\\
&a_1\, d_2 - a_1\, f_2 - a_2\, d_1 + a_2\, f_1 - c_1\, d_2 + c_1\, f_2 + c_2\, d_1 - c_2\, f_1\},
\end{aligned}$$

die Behauptung dem deutlich komplizierteren Polynom

$$\begin{aligned}
&-a_1\, b_1\, c_2\, d_2 + a_1\, b_1\, c_2\, e_2 + a_1\, b_1\, d_2\, f_2 - a_1\, b_1\, e_2\, f_2 + a_1\, b_2\, c_1\, d_2 - a_1\, b_2\, c_1\, f_2 - a_1\, b_2\, c_2\, e_1 +\\
&a_1\, b_2\, c_2\, f_1 - a_1\, b_2\, d_2\, f_1 + a_1\, b_2\, e_1\, f_2 - a_1\, c_1\, d_2\, e_2 + a_1\, c_1\, e_2\, f_2 + a_1\, c_2\, d_2\, e_1 - a_1\, c_2\, e_2\, f_1 -\\
&a_1\, d_2\, e_1\, f_2 + a_1\, d_2\, e_2\, f_1 - a_2\, b_1\, c_1\, e_2 + a_2\, b_1\, c_1\, f_2 + a_2\, b_1\, c_2\, d_1 - a_2\, b_1\, c_2\, f_1 - a_2\, b_1\, d_1\, f_2 +\\
&a_2\, b_1\, e_2\, f_1 - a_2\, b_2\, c_1\, d_1 + a_2\, b_2\, c_1\, e_1 + a_2\, b_2\, d_1\, f_1 - a_2\, b_2\, e_1\, f_1 + a_2\, c_1\, d_1\, e_2 - a_2\, c_1\, e_1\, f_2 -
\end{aligned}$$

$a_2\,c_2\,d_1\,e_1 + a_2\,c_2\,e_1\,f_1 + a_2\,d_1\,e_1\,f_2 - a_2\,d_1\,e_2\,f_1 + b_1\,c_1\,d_2\,e_2 - b_1\,c_1\,d_2\,f_2 - b_1\,c_2\,d_1\,e_2 +$
$b_1\,c_2\,d_2\,f_1 + b_1\,d_1\,e_2\,f_2 - b_1\,d_2\,e_2\,f_1 + b_2\,c_1\,d_1\,f_2 - b_2\,c_1\,d_2\,e_1 + b_2\,c_2\,d_1\,e_1 - b_2\,c_2\,d_1\,f_1 -$
$b_2\,d_1\,e_1\,f_2 + b_2\,d_2\,e_1\,f_1 - c_1\,d_1\,e_2\,f_2 + c_1\,d_2\,e_1\,f_2 + c_2\,d_1\,e_2\,f_1 - c_2\,d_2\,e_1\,f_1$

Dass jede gemeinsame Nullstelle der Polynome *pre* eine Nullstelle von *con* ist, ist hier nicht mehr so einfach zu erkennen. Wählen wir ein spezielles Koordinatensystem

```
A:=Point(0,0); B:=Point(0,1); C:=Point(1,0);
```

so erhalten wir als Voraussetzung

$$pre = \{d_1 - e_1, -e_1 - e_2 + f_1 + f_2, -d_2 + f_2\}$$

und als Behauptung

$$con = -d_1\,e_1\,f_2 - d_1\,e_2\,f_2 + d_1\,f_2 + d_2\,e_1\,f_1 + d_2\,e_1\,f_2 - d_2\,e_1.$$

Das (lineare) Gleichungssystem *pre* lässt sich einfach lösen (Maple)

```
sol:=solve(pre);
```

$$\{d_2 = f_2, e_1 = f_1 + f_2 - e_2, d_1 = f_1 + f_2 - e_2, e_2 = e_2, f_1 = f_1, f_2 = f_2\}$$

In die Behauptung eingesetzt erhalten wir

```
normal(subs(sol,con));
```

$$0$$

woran wir erkennen, dass jede gemeinsame Nullstelle von *pre* auch eine Nullstelle von *con* ist.

Aufgabe 10:

Formulieren und untersuchen Sie auf dieselbe Weise den Satz des Pappus.

Wir sehen also, dass die algebraische Formulierung geometrischer Sätze normalerweise auf eine Situation führt, wo die Voraussetzungen einer Menge $pre = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset R$ von Polynomen und die Behauptung in einem Polynom $con = g \in R$ codiert werden können, so dass für jede Spezifikation ϕ, die eine gemeinsame Nullstelle von *pre* beschreibt (und evtl. noch einer Nichtdegenerationsbedingung $\phi_R(g) \neq 0$ mit oft vorher nicht bekanntem g genügt), auch $\phi_R(h) = 0$ gilt.

3.1 Nichtlineare geometrische Bedingungen

Mit diesem Ansatz können wir nun auch nichtlineare geometrische Bedingungen erfassen. Diese Bedingungen treten auf, wenn sich schneidende geometrische Linien mehrere Schnittpunkte haben (Schnitt zweier Kreise, Schnitt von Kreis und Gerade) oder wenn es mehrere Geraden mit einer gegebenen Eigenschaft gibt (Parallelenpaar zu einer gegebenen Geraden in gegebenem Abstand, Winkelhalbierendenpaar eines gegebenen Winkels). Diese können ihrem Wesen nach nicht konstruktiver Natur sein, da dort in jedem Schritt ein *eindeutig bestimmtes* geometrisches Objekt konstruiert wurde.

Betrachten wir zunächst, wie sich die eben aufgelisteten geometrischen Bedingungen durch die Koordinaten der an ihnen beteiligten geometrischen Objekte beschreiben lassen.

Punkte auf einem Kreis

Ähnlich wie eine Gerade kann man einen Kreis durch die Koordinaten seines Mittelpunkts und seinen Radius beschreiben. Wir wollen im folgenden, wenn wir einen Kreis als geometrisches Objekt explizit angeben werden, statt des Radius dessen Quadrat, den *Sq-Radius*, verwenden, um nicht bereits an dieser Stelle Wurzelausdrücke zu erzeugen.

Als Objekt der analytischen Geometrie wird ein solcher Kreis durch seine Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = (x^2 + y^2) + c_2\, x + c_3\, y + c_4$$

mit $c_2 = -2\, x_0,\ c_3 = -2\, y_0,\ c_4 = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ gegeben, die durch die drei Parameter $c = (c_2, c_3, c_4)$ eindeutig charakterisiert werden kann. Umgekehrt lassen sich aus den Kreisparametern (c_2, c_3, c_4) auch Zentrum (x_0, y_0) und Sqradius r^2 unmittelbar polynomial zurückgewinnen.

Im GeoProver-Paket stehen dafür die Funktionen

`circle_center(c:Circle):Point` und
`circle_sqradius(c:Circle):Scalar`

sowie der Konstruktor

```
pc_circle(M:Point, A:Point):Circle
```

für den Kreis mit Zentrum M und Punkt A auf der Peripherie zur Verfügung.

Bestimmen wir nun den Kreis, der durch drei vorgegebene Punkte A, B, C verläuft. Formeln für die Koordinaten des Mittelpunkts $M = (m_1, m_2)$ dieses Kreises können wir aus den Gleichungen

```
A:=Point(a1,a2); B:=Point(b1,b2); C:=Point(c1,c2); M:=Point(m1,m2);
polys:={sqrdist(M,A)-sqrdist(M,B), sqrdist(M,A)-sqrdist(M,C)};
```

bestimmen, wenn wir für A, B, C entsprechende *allgemeine* Punkte (AGO's) einsetzen. Das entsprechende Gleichungssystem

$$2 \cdot m_1 \cdot (-a_1 + b_1) + 2 \cdot m_2 \cdot (-a_2 + b_2) + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 0,$$

$$2 \cdot m_1 \cdot (-a_1 + c_1) + 2 \cdot m_2 \cdot (-a_2 + c_2) + a_1^2 + a_2^2 - c_1^2 - c_2^2 = 0$$

ist linear in (m_1, m_2) und besitzt eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die zugehörige Determinante, die wieder einmal genau mit der Kollinearitätsbedingung `is_collinear(A,B,C)` übereinstimmt, verschieden von 0 ist.

```
solve(polys,{m1,m2});
```

ergibt dann die gesuchten Mittelpunktskoordinaten, die wir nun fest als Prozedur zur weiteren Verwendung einbrennen können. Alternativ hätten wir den Mittelpunkt natürlich auch wie bisher berechnen können:

```
M:=intersection_point(p_bisector(B,C), p_bisector(C,A));
```

Für den Kreis durch drei vorgegebene Punkte A, B, C erhalten wir

$$\left(\frac{\begin{matrix} -{a_1}^2\, b_2 + {a_1}^2\, c_2 - {a_2}^2\, b_2 + {a_2}^2\, c_2 + a_2\, {b_1}^2 + a_2\, {b_2}^2 - a_2\, {c_1}^2 - a_2\, {c_2}^2 - {b_1}^2\, c_2 - \\ {b_2}^2\, c_2 + b_2\, {c_1}^2 + b_2\, {c_2}^2 \end{matrix}}{D}, \right.$$

$$\left.\frac{\begin{array}{c}{a_1}^2\,b_1-{a_1}^2\,c_1-a_1\,{b_1}^2-a_1\,{b_2}^2+a_1\,{c_1}^2+a_1\,{c_2}^2+{a_2}^2\,b_1-{a_2}^2\,c_1+{b_1}^2\,c_1-\\ b_1\,{c_1}^2-b_1\,{c_2}^2+{b_2}^2\,c_1\end{array}}{D},\;\frac{\begin{array}{c}-{a_1}^2\,b_1\,c_2+{a_1}^2\,b_2\,c_1+a_1\,{b_1}^2\,c_2+a_1\,{b_2}^2\,c_2-a_1\,b_2\,{c_1}^2-a_1\,b_2\,{c_2}^2-{a_2}^2\,b_1\,c_2+\\ {a_2}^2\,b_2\,c_1-a_2\,{b_1}^2\,c_1+a_2\,b_1\,{c_1}^2+a_2\,b_1\,{c_2}^2-a_2\,{b_2}^2\,c_1\end{array}}{D}\right)$$

mit $D = a_1\,b_2 - a_1\,c_2 - a_2\,b_1 + a_2\,c_1 + b_1\,c_2 - b_2\,c_1 =$ `is_collinear(A,B,C)`. Die Parameter dieses Kreises sind rationale Funktionen der Parameter der Punkte A, B, C, wobei im Nenner wiederum ein Polynom D auftritt. Um solche Nenner zu vermeiden, wollen wir ähnlich wie für Geraden, auch für Kreise homogene Koordinaten verwenden, d.h. einen Kreis durch ein Tupel $c = (c_1 : c_2 : c_3 : c_4)$ charakterisieren, das für die Punktmenge

$$\{(x, y)\ :\ c_1(x^2 + y^2) + c_2\,x + c_3\,y + c_4 = 0\}$$

steht.

Wir wollen als nächstes charakterisieren, wann 4 Punkte A, B, C, D auf einer gemeinsamen Kreislinie liegen. Mit den oben berechneten Koordinaten des Umkreismittelpunkts M von ABC ergibt sich die gesuchte Bedingung aus

```
D:=Point(d1,d2);
con:=sqrdist(M,A)-sqrdist(M,D);
```

als Zähler $p =$ `numer(con)` der (gekürzten) rationalen Funktion *con*. Dieses Zählerpolynom p ist ein Polynom vierten Grades, das die entsprechende Bedingung beschreibt. Wir können auch dieses Polynom extrahieren und als Prozedur zur weiteren Verwendung in unsere Programmsammlung aufnehmen.

Satz 14 *Vier Punkte $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2), D = (d_1, d_2)$ liegen genau dann auf einem gemeinsamen Kreis, wenn*

$$\begin{array}{l}{a_1}^2\,b_1\,c_2-{a_1}^2\,b_1\,d_2-{a_1}^2\,b_2\,c_1+{a_1}^2\,b_2\,d_1+{a_1}^2\,c_1\,d_2-{a_1}^2\,c_2\,d_1-a_1\,{b_1}^2\,c_2+a_1\,{b_1}^2\,d_2-\\ a_1\,{b_2}^2\,c_2+a_1\,{b_2}^2\,d_2+a_1\,b_2\,{c_1}^2+a_1\,b_2\,{c_2}^2-a_1\,b_2\,{d_1}^2-a_1\,b_2\,{d_2}^2-a_1\,{c_1}^2\,d_2-a_1\,{c_2}^2\,d_2+\\ a_1\,c_2\,{d_1}^2+a_1\,c_2\,{d_2}^2+{a_2}^2\,b_1\,c_2-{a_2}^2\,b_1\,d_2-{a_2}^2\,b_2\,c_1+{a_2}^2\,b_2\,d_1+{a_2}^2\,c_1\,d_2-{a_2}^2\,c_2\,d_1+\\ a_2\,{b_1}^2\,c_1-a_2\,{b_1}^2\,d_1-a_2\,b_1\,{c_1}^2-a_2\,b_1\,{c_2}^2+a_2\,b_1\,{d_1}^2+a_2\,b_1\,{d_2}^2+a_2\,{b_2}^2\,c_1-a_2\,{b_2}^2\,d_1+\\ a_2\,{c_1}^2\,d_1-a_2\,c_1\,{d_1}^2-a_2\,c_1\,{d_2}^2+a_2\,{c_2}^2\,d_1-{b_1}^2\,c_1\,d_2+{b_1}^2\,c_2\,d_1+b_1\,{c_1}^2\,d_2+b_1\,{c_2}^2\,d_2-\\ b_1\,c_2\,{d_1}^2-b_1\,c_2\,{d_2}^2-{b_2}^2\,c_1\,d_2+{b_2}^2\,c_2\,d_1-b_2\,{c_1}^2\,d_1+b_2\,c_1\,{d_1}^2+b_2\,c_1\,{d_2}^2-b_2\,{c_2}^2\,d_1\end{array}$$

gilt.

Diese Bedingung kann man auch als Determinante schreiben: Vier Punkte $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2), D = (d_1, d_2)$ liegen genau dann auf einem gemeinsamen Kreis, wenn es eine nichttriviale Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1(a_1^2 + a_2^2) + x_2\,a_1 + x_3\,a_2 + x_4 &= 0\\ x_1(b_1^2 + b_2^2) + x_2\,b_1 + x_3\,b_2 + x_4 &= 0\\ x_1(c_1^2 + c_2^2) + x_2\,c_1 + x_3\,c_2 + x_4 &= 0\\ x_1(d_1^2 + d_2^2) + x_2\,d_1 + x_3\,d_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

gibt, d.h. wenn

$$\begin{vmatrix} (a_1^2 + a_2^2) & a_1 & a_2 & 1 \\ (b_1^2 + b_2^2) & b_1 & b_2 & 1 \\ (c_1^2 + c_2^2) & c_1 & c_2 & 1 \\ (d_1^2 + d_2^2) & d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

Damit können wir bereits den **Satz von der Simsonschen Geraden** beweisen. Seien A, B, C, D vier Punkte wie eben betrachtet und

```
R:=pedalpoint(D,pp_line(B,C));
S:=pedalpoint(D,pp_line(A,C));
T:=pedalpoint(D,pp_line(A,B));
```

die Fußpunkte der Lote aus D auf die drei Seiten des Dreiecks ABC oder deren Verlängerungen. Der Satz von der Simsonschen Geraden behauptet, dass für einen Punkt D auf dem Umkreis von ABC die Lotfußpunkte R, S, T kollinear sind. Die Voraussetzung wird genau durch das oben hergeleitete Polynom p 4. Grades charakterisiert. Die Behauptung

```
con:=is_collinear(R,S,T);
```

ist eine rationale Funktion, deren Zähler ein Polynom 8. Grades mit 576 Summanden enthält und dessen Nenner aus dem Produkt

$$sqrdist(A, B) * sqrdist(B, C) * sqrdist(A, C)$$

besteht. Das Zählerpolynom lässt sich seinerseits in das Produkt

$$collinear(A, B, C)^2 * p$$

zerlegen, woraus der geforderte Beweis nunmehr leicht abzuleiten ist. Aus dem Beweis folgt, dass nicht nur der Satz selbst richtig ist, sondern auch dessen Umkehrung gilt: Sind die Lotfußpunkte R, S, T kollinear, so liegt D auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Auf ähnliche Weise kann man auch den folgenden Satz herleiten.

Satz 15 (Satz des Ptolemäus) *Das Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn für die Seitenlängen p, q, r, s und die Diagonalenlängen t, u die Beziehung*

$$p\,r + q\,s = t\,u$$

gilt.

Dieser Satz macht in seiner Formulierung zum einen von der speziellen Lage der Punkte auf der Kreislinie Gebrauch (ansonsten kann man die Vierecksseiten nicht von den Diagonalen unterscheiden) und verwendet zum anderen mit den Seitenlängen Größen, die sich nicht polynomial durch die Koordinaten der Eckpunkte ausdrücken lassen. Eine zur Ausgangsbedingung äquivalente Aussage, die besser in unser Konzept passt, erhält man, wenn man die Behauptung wie folgt umformt:

$$\begin{array}{l} (p\,r)^2 + (q\,s)^2 - (t\,u)^2 = 2\,p\,q\,r\,s \\ ((p\,r)^2 + (q\,s)^2 - (t\,u)^2)^2 - (2\,p\,q\,r\,s)^2 = 0 \end{array}$$

Ausmultiplizieren liefert die Gleichung

$$p^4 r^4 - 2\,p^2 q^2 r^2 s^2 - 2\,p^2 r^2 t^2 u^2 + q^4 s^4 - 2\,q^2 s^2 t^2 u^2 + t^4 u^4 = 0,$$

in der nur noch Quadrate von Seitenlängen vorkommen und die zudem nunmehr symmetrisch in den drei Paaren gegenüberliegender Strecken ist. Ersetzen wir diese Quadrate durch die entsprechenden Abstandsquadrate (Maple)

```
poly:=((p*r)^2+(q*s)^2-(t*u)^2)^2 - (2*p*q*r*s)^2;

A:=Point(a1,a2); B:=Point(b1,b2); C:=Point(c1,c2); D:=Point(d1,d2);

rules:={
p^2 = sqrdist(A,B), q^2 = sqrdist(B,C), r^2 = sqrdist(C,D),
s^2 = sqrdist(D,A), t^2 = sqrdist(A,C), u^2 = sqrdist(B,D)};

p1:=simplify(poly,rules);
```

so erhalten wir ein Polynom p_1 8. Grades mit 962 Summanden, das im Wesentlichen das Quadrat des Polynoms p ist ($p_1 = -4\,p^2$).

Betrachten wir schließlich noch den **Satz vom Miquelschen Punkt**. Die zugehörige allgemeine geometrische Konfiguration (Dreieck ABC mit Punkten R, S, T auf den Dreiecksseiten) lässt sich wie folgt angeben:

```
A:=Point(a1,a2); B:=Point(b1,b2); C:=Point(c1,c2);
R:=varpoint(B,C,u1); S:=varpoint(A,C,u2); T:=varpoint(A,B,u3);
```

Zum Beweis des Satzes bestimmen wir (zur Vereinfachung wieder mit einem speziell positionierten Koordinatensystem) die Koordinaten des Schnittpunkts $P = (x_1, x_2)$ zweier der Kreise und zeigen, dass dieser Punkt auch auf dem dritten Kreis liegt:

```
A:=Point(0,0); B:=Point(0,b2); C:=Point(c1,c2);
R:=varpoint(B,C,u1); S:=varpoint(A,C,u2); T:=varpoint(A,B,u3);

P:=Point(x1,x2);
polys:={is_concyclic(A,S,T,P), is_concyclic(B,R,T,P)};

sol:=solve(polys,{x1,x2});
```

Wir erhalten zwei Lösungen, deren Koordinaten jeweils rationale Funktionen in den Parametern sind. Eine der beiden Lösungen ist der Punkt T, von dem wir bereits wissen, dass er zu beiden Kreisen gehört. Der zweite Punkt ist der gesuchte Schnittpunkt P (seine rationalen Koordinaten haben 38 bzw. 17 Zählerterme und 42 Nennerterme). Er liegt auf dem dritten Kreis, wie die folgende Rechnung zeigt.

```
P0:=subs(sol[2],P);
is_concyclic(C,R,S,P0);
```

Es ist nicht verwunderlich, dass die Schnittpunktkoordinaten von P rationale Funktionen in den Parametern sind, wenn einer der beiden Schnittpunkte bekannt ist, da die Schnittpunktbedingung auf eine Gleichung zweiten Grades hinausläuft.

AUFGABE 11:

Finden Sie allgemein Formeln für folgende Funktionen:

- `other_cl_point(c:Circle,l:Line,P:Point):Point`, die zu gegebenem Kreis c und gegebener Gerade l den zweiten Schnittpunkt von c und l findet, wenn P der andere Schnittpunkt ist.
- `other_cc_point(c1:Circle,c2:Circle,P:Point):Point`, die zu zwei gegebenen Kreisen c_1 und c_2 den zweiten Schnittpunkt von c_1 und c_2 findet, wenn P der andere Schnittpunkt ist.

Im Gegensatz zu obigem Beispiel lassen sich im Allgemeinen die Schnittpunktkoordinaten zweier Kreise oder von Kreis und Gerade nicht rational durch die Ausgangskoordinaten ausdrücken. So erhalten wir etwa für die Schnittpunkte zweier Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und dem Mittelpunktsabstand $2u$ als Bedingung an die Koordinaten des Schnittpunkts $P = (x_1, x_2)$ das Gleichungssystem

```
P:=Point(x1,x2);
polys:={
    on_circle(P,pc_circle(Point(-u,0),Point(-u-r1,0))),
    on_circle(P,pc_circle(Point(u,0),Point(u+r2,0)))};
```

$$\{-{r_1}^2 + u^2 + 2\,u\,x_1 + {x_1}^2 + {x_2}^2, -{r_2}^2 + u^2 - 2\,u\,x_1 + {x_1}^2 + {x_2}^2\},$$

zu dessen Lösung (Maple)

```
solve(polys,{x1,x2});
 map(allvalues,%);
```

$$x_1 = \frac{{r_1}^2 - {r_2}^2}{4\,u},\ x_2 = \pm\frac{\sqrt{-{r_1}^4 + 2\,{r_1}^2\,{r_2}^2 + 8\,{r_1}^2\,u^2 - {r_2}^4 + 8\,{r_2}^2\,u^2 - 16\,u^4}}{4\,u}$$

bereits Wurzelausdrücke erforderlich sind.

Winkel und Winkelhalbierende

Nichtlineare Bedinungen erhalten wir ebenfalls im Zusammenhang mit Winkelhalbierenden, da es zu zwei gegebenen Geraden g, h stets zwei (zueinander senkrechte) Winkelhalbierende gibt.

Um eine Bedingung herzuleiten, die beschreibt, wann ein Punkt P auf einer der beiden Winkelhalbierenden liegt, betrachten wir die beiden Anstiege der Geraden $g = (g_1, g_2, g_3)$ und $h = (h_1, h_2, h_3)$. Der Tangens des entsprechenden Winkels lässt sich durch das Verhältnis $\frac{g_2}{g_1}$ bzw. $\frac{h_2}{h_1}$ ausdrücken. Für den Tangens des Winkels zwischen diesen beiden Geraden erhalten wir dann

$$\tan(\angle(g,h)) = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan(\alpha_2) - \tan(\alpha_1)}{1 + \tan(\alpha_1)\tan(\alpha_2)} = \frac{g_1\,h_2 - g_2\,h_1}{g_1\,h_1 + g_2\,h_2}$$

Dieser Ausdruck ist nicht definiert, wenn der Nenner verschwindet, also die beiden Geraden g und h senkrecht aufeinander stehen.

P ergibt sich damit aus der Bedingung

```
A:=Point(a1,a2); B:=Point(b1,b2); C:=Point(c1,c2);
u:=l2_angle(pp_line(A,B),pp_line(P,B));
v:=l2_angle(pp_line(P,B),pp_line(C,B));

u - v;
```

von der wiederum nur der Zähler `poly:=numer(u-v)` von Interesse ist, ähnlich der Unterscheidung zwischen geometrisch und algebraisch parallelen Geraden. Die entsprechende Bedingung ist ein Polynom vom Grad 2 in x und y, das für allgemeine Punkte A, B, C 56 Terme enthält.

Dieser Ausdruck beschreibt zwei zueinander senkrechte Geraden v und w, deren Parameter sich allerdings, wie die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Kreise, im Allgemeinen nicht rational durch die Koordinaten der Punkte A, B, C ausdrücken lassen. Setzen wir dazu `B:=Point(0,0)`, also

$$poly = (a_2\,c_1 + c_2\,a_1)\,{x_1}^2 + (2\,a_2\,c_2 - 2\,a_1\,c_1)\,x_2\,x_1 + (-c_2\,a_1 - a_2\,c_1)\,{x_2}^2,$$

so ergeben sich für die Koordinaten eines Punktes P auf der Winkelhalbierenden

```
solve(poly,x1);
```

$$x_1 = \frac{a_1\,c_1 - a_2\,c_2 \pm \sqrt{{a_2}^2{c_2}^2 + {a_1}^2{c_1}^2 + {a_2}^2{c_1}^2 + {c_2}^2{a_1}^2}}{a_2\,c_1 + c_2\,a_1}\; x_2 .$$

Das GeoProver-Paket enthält deshalb nur eine Prozedur

```
on_bisector:=proc(P,A,B,C)
  local u,v;
  u:=l2_angle(pp_line(A,B),pp_line(P,B));
  v:=l2_angle(pp_line(P,B),pp_line(C,B));
  return (numer(u)*denom(v)-denom(u)*numer(v));
  end;
```

mit der geprüft werden kann, ob ein gegebener Punkt P auf einer der beiden Winkelhalbierenden liegt.

Aufgabe 12:

> Vier Punkte A, B, C, D liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf einem Kreis, wenn B und D auf demselben Bogen AC liegen und $\angle ABC = \angle ADC$ gilt.
>
> Zeigen Sie, dass diese Bedingung genau auf das oben hergeleitete Polynom vierten Grades führt.
>
> Diskutieren Sie den Fall, dass B und D auf unterschiedlichen Bögen AC liegen. (Hinweis: Beachten Sie, dass $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ gilt, also mit *orientierten* Winkeln zu rechnen ist.)

Um trotzdem den **Satz vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden** zu beweisen, können wir wieder zunächst die Koordinaten des Schnittpunkts $P = (x_1, x_2)$ von zwei der drei Winkelhalbierenden bestimmen und dann prüfen, ob P auch auf der dritten Winkelhalbierenden liegt. Zur Vereinfachung der Rechnung fixieren wir ein spezielles Koodinatensystem, in dem die Eckpunkte des Dreiecks die folgenden Koordinaten haben:

```
A:=Point(1,0); B:=Point(0,0); C:=Point(c1,c2); P:=Point(x1,x2);

polys:={on_bisector(P,B,A,C), on_bisector(P,C,B,A)};
```

Zur Bestimmung der Koordinaten von P erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &-{x_1}^2 c_2 + 2\,x_2\,c_1\,x_1 + c_2\,{x_2}^2 &&= 0 \\ &-2\,x_2 + 2\,x_2\,c_1 + 2\,x_2\,x_1 - 2\,x_2\,c_1\,x_1 - c_2\,{x_2}^2 + c_2 - 2\,x_1\,c_2 + {x_1}^2 c_2 &&= 0 \end{aligned}$$

aus zwei Gleichungen zweiten Grades, für welche Maple als Lösung einen zweimal geschachtelten Wurzelausdruck zurückgibt, der hier einmal nicht in LaTeX-Notation angegeben ist, weil Maples LaTeX-Konversion die schönen Ersetzungen mit %1 und %2 nicht übernimmt.

```
sol:=solve(polys,{x1,x2});
P1:=subs(sol[1],P);
                      1/2       1/2      /              1/2       1/2\
             %3     %1        %2         |  %3        %1        %2   |
       c2 + ---- - ----- - ----- + 2 |- ----- + ----- + -----| c1
            8 c2    c2        c2         \  16 c2    2 c2      2 c2 /
P1 := [-----------------------------------------------------------,
```

```
                       /               1/2     1/2\
                       |      %3     %1      %2   |
                     2 |c2 + ----- - ----- - -----|
                       \     16 c2   2 c2    2 c2 /

                1/2     1/2
       %3     %1      %2
    - ----- + ----- + -----]
      16 c2   2 c2    2 c2

        4     2   2       3       2        2     2
%1 := c1  + c1  c2  - 2 c1  - 2 c2  c1 + c1  + c2

           1/2   2   2       3       2          4   2       4   2       4
%2 := (3 %1    c1  c2  - 2 c1  - 2 c2  c1 + 4 c1  c2  + 2 c2  c1  - 2 c2  c1

           3   2       2   2       4       6       5       1/2   2
     - 8 c1  c2  + 6 c1  c2  + 6 c1  + 2 c1  - 6 c1  - 2 %1    c2  c1

         1/2   4       1/2   2     1/2   2       1/2   4       1/2   3    /
     + %1    c2  + 2 %1    c1  + %1    c2  + 2 %1    c1  - 4 %1    c1 )  /
                                                                        /

      1/2
    %1

           2       2
%3 := -8 c1  - 8 c2  + 8 c1
```

Jeden der vier so berechneten Werte können wir nun in die Bedingung `on_bisector(P,A,C,B)` einsetzen und überprüfen, ob der so entstehende (nicht mehr nur rationale) Ausdruck zu Null vereinfacht:

```
seq(on_bisector(subs(sol[i],P),A,C,B),i=1..4);
```

$$0, 0, 0, 0$$

Allerdings lassen sich geschachtelte Wurzeln nicht immer so problemlos vereinfachen. Außerdem steht eine Interpretation des Ergebnisses ähnlich dem Mechanisierungssatz für Geometriesätze vom konstruktiven Typ noch aus.

Ein ähnliches Ergebnis erhält man mit Mathematica:

```
A=point[1,0]; B:=point[0,0]; C:=point[c1,c2]; P:=point[x1,x2];
polys={onbisector[P,B,A,C], onbisector[P,C,B,A]}
sol=Solve[polys==0,{x1,x2}]
onbisector[P/. sol[[#]],A,C,B]& /@ {1,2,3,4}
```

MuPAD liefert dagegen an dieser Stelle

$$x_1 = -\frac{2\,{x_2}^3}{(2\,c_1\,c_2 - c_2)} - \frac{(1-c_1)}{(2\,c_1-1)} - \frac{x_2\,\left(2\,c_1 - 2\,{c_1}^2 - 2\right)}{(2\,c_1\,c_2 - c_2)} - \frac{{x_2}^2\,\left(4\,c_1 - 4\,{c_1}^2 - 2\,{c_2}^2\right)}{\left(2\,c_1\,{c_2}^2 - {c_2}^2\right)},$$

$$x_2 = \mathrm{RootOf}(4\,X_2\,{c_2}^2 - {c_2}^3 - 4\,{X_2}^2\,c_2 + 8\,{X_2}^3\,c_1 + 4\,{X_2}^4\,c_2 - 4\,{X_2}^2\,c_1\,c_2 - 8\,{X_2}^3\,{c_1}^2$$
$$+ 4\,{X_2}^2\,{c_2}^3 - 8\,{X_2}^3\,{c_2}^2 + 4\,{X_2}^2\,{c_1}^2\,c_2, X_2)$$

x_2 ist also eine der vier Wurzeln einer Gleichung 4. Grades, die nicht mehr explizit berechnet werden. x_1 ergibt sich jeweils aus dem zugehörigen Wert von x_2 eindeutig als rationaler Ausdruck in x_2 und den anderen Parametern. Ein ähnliches Ergebnis war auch zu erwarten, denn die zwei *Paare* von Winkelhalbierenden durch A bzw. B haben insgesamt genau 4 Punkte gemeinsam, die Mittelpunkte des Inkreises und der drei Ankreise des Dreiecks ABC. Mit diesem Ergebnis können wir allerdings nicht mehr weiterrechnen.

Es ergibt sich nun die Frage, ob auch ohne explizite Auflösung der Gleichung für x_2 in Wurzelausdrücke nachgewiesen werden kann, dass jede der vier Lösungen auch Nullstelle der Gleichung

```
on_bisector(P,A,C,B);
```

$$2\,{c_1}^3\,x_2 - {c_1}^3 - 2\,{c_1}^2\,c_2\,x_1 - 2\,{c_1}^2\,x_1\,x_2 + 2\,{c_1}^2\,x_1 + 2\,c_1\,{c_2}^2\,x_2 - c_1\,{c_2}^2 + 2\,c_1\,c_2\,{x_1}^2 - 2\,c_1\,c_2\,{x_2}^2 - c_1\,{x_1}^2 + c_1\,{x_2}^2 - 2\,{c_2}^3\,x_1 + 2\,{c_2}^2\,x_1\,x_2 + 2\,{c_2}^2\,x_1 - 2\,c_2\,x_1\,x_2$$

ist. Derartige Fragen wollen wir im nächsten Abschnitt genauer formulieren und studieren.

Hier sei noch angemerkt, dass man Winkelhalbierende mit einem anderen Konzept auch als geometrische Objekte vom konstruktiven Typ einführen kann.

AUFGABE 13:

> Zeigen Sie auf folgende Weise, dass sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden:
> A und B seien gegeben und D sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden aus A und B. Dann ist C der Schnittpunkt der Geraden, die aus AB durch Spiegelung an AD bzw. BD hervorgehen. CD ist genau dann Winkelhalbierende, wenn AC bei Spiegelung an CD in BC übergeht.
>
> Sie können dazu die GEOPROVER-Funktion `sym_line` verwenden.

3.2 Geometrische Sätze vom Gleichungstyp

Alle unsere Geometrietheoreme hatten die folgende Gestalt: Gegeben ist

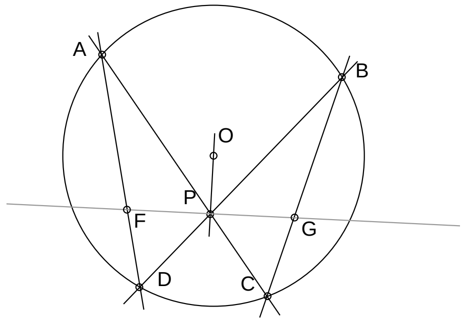
> eine allgemeine geometrische Konfiguration AGK mit Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$,
>
> eine Menge von Polynomen $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset R := k[x_1, \ldots, x_n]$, die algebraische Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Elementen der gegebenen AGK beschreiben und die wir als *allgemeine geometrische Voraussetzung* (AGV) bezeichnen wollen,
>
> eine (oft nicht explizit gegebene) Nichtdegenerationsbedingung $h(\mathbf{x}) \in R$ sowie
>
> ein Polynom $g(\mathbf{x}) \in R$, das die geometrische Folgerung algebraisch kodiert.

Als *Geometriesatz vom Gleichungstyp* bezeichnen wir dann eine Aussage der folgenden Gestalt:

> Jede gemeinsame Nullstelle $\mathbf{a}$ der Polynome $f \in F$, die eine nicht degenerierte (d.h. $h(\mathbf{a}) \neq 0$) *spezielle* geometrische Konfiguration beschreibt, in der die durch F gegebenen (zusätzlichen) geometrischen Voraussetzungen erfüllt sind, ist auch eine Nullstelle von g, d.h. erfüllt die geometrische Folgerung.
>
> $$\forall\, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n \; \Big(\bigwedge_{f \in F} f(\mathbf{a}) = 0 \Big) \wedge (\, h(\mathbf{a}) \neq 0 \,) \;\Rightarrow\; (\, g(\mathbf{a}) = 0\,)$$

Wir schreiben für einen solchen Satz auch kurz $(F/h \Rightarrow g)$.

Betrachten wir zum Abschluss dieses Punktes einen weiteren geometrischen Satz, den wir als Satz vom Gleichungstyp formulieren können. Es handelt sich um das folgende



Schmetterlingstheorem [2, S. 31]:
Auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt O seien vier Punkte A, B, C, D gegeben. P sei der Schnittpunkt von AC und BD. Die Senkrechte auf der Verbindungslinie OP schneide die Seiten AD und BC (die "Schmetterlingsflügel") in den Punkten F und G. Dann gilt $|PF| = |PG|$.

Wir wollen bei der Herleitung einer algebraischen Form dieses Satzes zugleich zwischen (in einem später zu präzisierenden Sinne) "unabhängigen" Variablen u_i, deren Wert frei wählbar ist, und "abhängigen" Variablen x_i, deren Wert sich eindeutig oder endlich vieldeutig aus den algebraischen Bedingungen und bereits fixierten Werten ergibt, unterscheiden.

Sei dazu O der Koordinatenursprung und $A = (u_4, 0)$ auf der x-Achse gelegen. Die x-Koordinate stimmt damit zugleich mit dem Radius des Kreises überein. B, C und D seien drei weitere Punkte auf dem Kreis. Je eine Koordinate kann frei gewählt werden, die andere ergibt sich aus der Kreisgleichung. Die Punkte seien also $B = (u_1, x_1)$, $C = (u_2, x_2)$ und $D = (u_3, x_3)$. $P = (x_4, x_5)$ ergibt sich dann eindeutig als Schnittpunkt, ebenso wie die Senkrechte h und die Punkte $F = (x_6, x_7)$ und $G = (x_8, x_9)$. Insgesamt erhalten wir folgende algebraische Formulierung

```
# ==> Butterfly_a
O_:=Point(0,0); A_:=Point(u4,0);
B_:=Point(u1,x1); C_:=Point(u2,x2); D_:=Point(u3,x3);
P_:=Point(x4,x5);
F_:=Point(x6,x7); G_:=Point(x8,x9);
c0_:=pc_circle(O_,A_);
h_:=ortho_line(P_,pp_line(O_,P_));

polys:= { on_circle(B_,c0_), on_circle(C_,c0_), on_circle(D_,c0_),
      is_collinear(B_,D_,P_), is_collinear(A_,C_,P_),
      on_line(F_,h_), is_collinear(A_,D_,F_),
      on_line(G_,h_), is_collinear(B_,C_,G_)};

con:=sqrdist(P_,F_)-sqrdist(P_,G_);
```

$$\begin{aligned}
polys = \Big\{ & {u_1}^2 + {x_1}^2 - {u_4}^2,\ {u_2}^2 + {x_2}^2 - {u_4}^2,\ {u_3}^2 + {x_3}^2 - {u_4}^2, \\
& u_1\, x_3 - u_1\, x_5 - u_3\, x_1 + u_3\, x_5 + x_4\, x_1 - x_4\, x_3,\ u_4\, x_2 - u_4\, x_5 + u_2\, x_5 - x_4\, x_2, \\
& -x_4\, x_6 - x_5\, x_7 + {x_5}^2 + {x_4}^2,\ u_4\, x_3 - u_4\, x_7 + u_3\, x_7 - x_6\, x_3, \\
& -x_4\, x_8 - x_5\, x_9 + {x_5}^2 + {x_4}^2,\ u_1\, x_2 - u_1\, x_9 - u_2\, x_1 + u_2\, x_9 + x_8\, x_1 - x_8\, x_2 \Big\}
\end{aligned}$$

$$con = {x_6}^2 - 2\, x_4\, x_6 + {x_7}^2 - 2\, x_5\, x_7 - {x_8}^2 + 2\, x_4\, x_8 - {x_9}^2 + 2\, x_5\, x_9$$

Das Gleichungssystem hat eine recht überschaubare Struktur. Die Anzahl der abhängigen Variablen x_i entspricht genau der Anzahl der Gleichungen in der Menge *polys*, die linear in $x_4, \ldots, x_9$ und quadratisch in x_1, x_2, x_3 sind. Maple liefert entsprechend eine „Lösung“ mit drei RootOf-Symbolen

```
vars:={seq(cat(x,i),i=1..9)};
```

```
sol:=[solve(polys,vars)];
nops(sol);
```

mit der es aber diesmal nichts mehr anfangen kann:

```
map(u->normal(subs(u,con)),sol);
```

Fordert man explizite Lösungen für die $x_i, i = 1, \ldots, 9$ als Ausdrücke in den $u_i, i = 1, 2$, die sich in diesem Fall als einfache Quadratwurzeln berechnen lassen, so liefert Maple zwar 8 Lösungen zurück, kann aber auch mit ihnen nichts mehr anfangen, selbst wenn der mächtige Simplifikationsalgorithmus `evala` für algebraische Ausdrücke angeworfen wird.

```
sol1:=map(allvalues,sol);
nops(sol1);
map(u->normal(subs(u,con)),sol1);
map(u->evala(subs(u,con)),sol1);
```

Der lineare Teil des Gleichungssystems kann „per Hand“ gelöst, aber auch durch eine stärker konstruktiv formulierte AGK eliminiert werden. Wählen wir etwa F und G als Geradengleiter und P als Schnittpunkt der Geraden AC und BD sowie F und G als Schnittpunkte mit h, so benötigen wir nur 3 Gleichungen, um das Problem zu formulieren

```
# ==> Butterfly_b
O_:=Point(0,0); A_:=Point(u4,0);
B_:=Point(u1,x1); C_:=Point(u2,x2); D_:=Point(u3,x3);

P_:=intersection_point(pp_line(A_,C_), pp_line(B_,D_));
c0_:=pc_circle(O_,A_);
h_:=ortho_line(P_,pp_line(O_,P_));
F_:=intersection_point(pp_line(A_,D_),h_);
G_:=intersection_point(pp_line(B_,C_),h_);

polys:= { on_circle(B_,c0_), on_circle(C_,c0_), on_circle(D_,c0_)};

con:=numer(sqrdist(P_,F_)-sqrdist(P_,G_));
```

Allerdings verlagert sich damit das Problem nur, denn der Ausdruck für *con* ist nun deutlich komplizierter geworden und enthält (nach Maple-Zählung) `length(con)` = 548465 Terme.

```
vars:={x1,x2,x3};
sol:=[solve(polys,vars)];
nops(sol);
map(u->normal(subs(u,con)),sol);
sol1:=map(allvalues,sol);
nops(sol1);
map(u->normal(subs(u,con)),sol1);
```

Maple kann auch in dieser einfachen Formulierung die Behauptung nicht verifizieren, obwohl die Lösungsmenge sol_1 nur einfache Quadratwurzeln enthält.

Dasselbe gilt für Mathematica und erst recht MuPAD. Einzig Reduce kann eine leicht modifizierte Algebraisierung mit 5 Gleichungen (F und G werden als Geradengleiter auf AD bzw. BC angesetzt, siehe `Butterfly_c`) in vernünftiger Zeit zu einem Ende bringen.

Das Schmetterlingstheorem lässt allerdings auch eine konstruktive Formulierung zu, wenn wir zur Definition der Punkte B, C, D eine (rationale) Parametrisierung des Kreises verwenden. Diese ergibt sich, wenn wir durch einen bekannten Punkt auf der Kreislinie Sekanten zeichnen und die

Koordinaten des jeweils zweiten Schnittpunkts in Abhängigkeit vom Anstieg dieser Sekante ausdrücken. Wir hatten das weiter oben bereits am Beispiel der Funktion `other_cl_point` besprochen. Für den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und den Referenzpunkt $(-1, 0)$ ergibt sich für die Koordinaten eines Kreisgleiters folgende Formel

```
O_:=Point(0,0);
A_:=Point(-1,0);
kreis:=pc_circle(O_,A_);
line:=pp_line(A_,Point(0,r));
other_cl_point(A_,kreis,line);
```

$$\left[\frac{r^2-1}{r^2+1}, \frac{2\,r}{r^2+1}\right]$$

Sind O und A Punkte in allgemeiner Lage, so ergeben sich nur leicht kompliziertere Formeln, die in der GeoProver-Funktion `circle_slider(O,A,u)` implementiert sind. Das entsprechende algebraische Problem kann mit dem GeoProver-Paket und jedem der Target-CAS gelöst werden.

```
O_:=Point(0,0);
A_:=Point(u4,0);

B_:=circle_slider(O_,A_,u1);
C_:=circle_slider(O_,A_,u2);
D_:=circle_slider(O_,A_,u3);
P_:=intersection_point(pp_line(A_,C_), pp_line(B_,D_));
c0_:=pc_circle(O_,A_);
h_:=ortho_line(P_,pp_line(O_,P_));
F_:=intersection_point(pp_line(A_,D_),h_);
G_:=intersection_point(pp_line(B_,C_),h_);

con:=normal(sqrdist(P_,F_)-sqrdist(P_,G_));
```

3.3 Geometrietheoreme vom linearen Typ

Untersuchen wir zunächst den einfachsten Fall von Geometrietheoremen vom Gleichungstyp – solche, die auf lineare Gleichungssyteme in den abhängigen Variablen führen. Sätze vom konstruktiven Typ lassen sich als solche Geometrietheoreme formulieren und meist gilt auch die umgekehrte Aussage.

Betrachten wir als Beispiel den **Satz von Desargue**:

```
A:=Point(u1,u2); B:=Point(u3,u4); C:=Point(u5,u6);
P:=Point(u7,u8); Q:=Point(u9,x1); R:=Point(x2,x3);

pre:={  is_parallel(pp_line(A,C),pp_line(P,R)),
        is_parallel(pp_line(B,C),pp_line(Q,R)),
        is_parallel(pp_line(A,B),pp_line(P,Q))};

con:=   is_concurrent(pp_line(A,P),pp_line(B,Q),pp_line(C,R));
```

Die drei Gleichungen zur Bestimmung der abhängigen Parameter sind linear in x_1, x_2, x_3. Als Lösung ergeben sich rationale Funktionen in $\mathbf{u}$, die, in die Behauptung *con* eingesetzt, diese zu Null vereinfachen.

```
sol:=solve(pre,{x1,x2,x3});
```

```
subs(sol,con);
normal(%);
```

Bei der Auswahl der unabhängigen und abhängigen Parameter sind wir dem kostruktiven Ansatz gefolgt. Statt dessen könnte man auch versuchen, drei andere der Parameter als abhängig zu deklarieren, etwa

```
P:=Point(u7,x1); Q:=Point(u8,x2); R:=Point(u9,x3);
pre1:={  is_parallel(pp_line(A,C),pp_line(P,R)),
        is_parallel(pp_line(B,C),pp_line(Q,R)),
        is_parallel(pp_line(A,B),pp_line(P,Q))};
```

Auch hier erhalten wir drei Gleichungen, die linear in den als abhängig deklarierten Variablen x_1, x_2, x_3 sind. Allerdings ist die entsprechende Lösungsmenge leer:

```
sol:=solve(pre1,{x1,x2,x3});
```

Geht man etwas vorsichtiger zu Werke, löst zunächst die beiden ersten Gleichungen nach x_1 und x_2 auf und setzt diese Werte dann in die dritte Gleichung ein, um diese schließlich nach x_3 aufzulösen, so erkennt man, dass dort x_3 bereits nicht mehr enthalten ist, sondern eine Gleichung vierten Grades in $\mathbf{u}$ entstanden ist, die Parameter also nicht algebraisch unabhängig sind wie angenommen.

```
sol:=solve({pre1[1],pre1[2]},{x1,x2});
normal(subs(sol,pre1[3]));
```

$$-\frac{\left(\begin{array}{l} u_2\,u_7\,{u_3}^2+u_4\,{u_5}^2u_8+{u_1}^2u_6\,u_9-u_6\,u_7\,{u_3}^2+{u_3}^2u_6\,u_9-{u_1}^2u_4\,u_9-u_2\,u_9\,{u_3}^2-u_4\,u_7\,{u_5}^2+\\ u_4\,{u_1}^2u_8-u_6\,{u_1}^2u_8+u_2\,u_7\,{u_5}^2-2\,u_4\,u_1\,u_8\,u_5+u_6\,u_1\,u_8\,u_3-u_2\,{u_5}^2u_8+u_1\,u_6\,u_5\,u_8-\\ u_3\,u_6\,u_5\,u_8-u_2\,u_3\,u_1\,u_8+u_2\,u_5\,u_1\,u_8+u_2\,u_5\,u_3\,u_8-u_3\,u_1\,u_4\,u_7+u_3\,u_4\,u_7\,u_5-\\ 2\,u_3\,u_2\,u_7\,u_5+u_3\,u_1\,u_6\,u_7-2\,u_3\,u_1\,u_6\,u_9+u_3\,u_1\,u_2\,u_9+u_5\,u_1\,u_4\,u_7-u_5\,u_1\,u_6\,u_7-\\ u_5\,u_1\,u_2\,u_9+u_5\,u_6\,u_7\,u_3+u_5\,u_2\,u_9\,u_3+u_1\,u_3\,u_4\,u_9+u_1\,u_5\,u_4\,u_9-u_3\,u_5\,u_4\,u_9 \end{array}\right)}{(u_3-u_5)\,(u_1-u_5)}$$

Untersuchen wir nun allgemein, was man über Geometrietheoreme vom Gleichungstyp aussagen kann, in denen die abhängigen Parameter $\mathbf{x}$ linear von den unabhängigen Parametern $\mathbf{u}$ abhängen. Solche Geometrietheoreme wollen wir als *Sätze vom linearen Typ* bezeichnen.

Das entsprechende Gleichungssystem hat die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(\mathbf{u})x_j + c_{i0}(\mathbf{u}) = 0,\ i = 1,\ldots,m$$

Seine Lösbarkeit hängt ganz wesentlich von der Determinante

$$D(\mathbf{u}) := det|c_{ij}(\mathbf{u})|_{i,j=1,\ldots,m}$$

ab. Genauer hat das Gleichungssystem für jede Belegung der Parameter $\mathbf{u}$, für die $D(\mathbf{u}) \neq 0$ gilt, eine eindeutige Lösung, die man nach der Cramerschen Regel in der Form $x_i = D_i(\mathbf{u})/D(\mathbf{u}) \in k(\mathbf{u})$ ausdrücken kann.

Wie im Fall der Sätze vom konstruktiven Typ können wir diese rationalen Funktionen in die Behauptung einsetzen und schauen, ob sich die einzelnen Terme gegenseitig wegheben. Wir erhalten ähnliche Alternativen:

1) Führt die Simplifikation auf das Nullpolynom, so ist für alle zulässigen Spezifikationen der unabhängigen Variablen (d.h. solche, für die $D(\mathbf{u}) \neq 0$ gilt) der Satz richtig.

2) Ergibt die Simplifikation eine nicht verschwindende rationale Funktion $\frac{P(\mathbf{u})}{Q(\mathbf{u})} \neq 0$, so ist der Satz für fast alle Spezifikationen falsch und höchstens unter der zusätzlichen Voraussetzung $P(\mathbf{u}) = 0$ richtig. Er gilt also dann nur, wenn zwischen den als unabhängig angenommenen Variablen eine Abhängigkeit besteht.

3) Ist schließlich bereits $D(\mathbf{u})$ identisch Null, so gibt es eine $k(\mathbf{u})$-lineare Kombination der Zeilen der Koeffizientenmatrix zum Nullvektor

$$\sum_i \alpha_i(\mathbf{u}) c_{ij}(\mathbf{u}) = 0, \ j = 1, \ldots, m$$

Dann ist entweder $\sum_i \alpha_i(\mathbf{u}) c_{i0}(\mathbf{u}) \neq 0$ eine nichttriviale algebraische Relation zwischen den unabhängigen Variablen oder aber auch die erweiterte Koeffizientenmatrix hat über $k(\mathbf{u})$ einen Rang kleiner als m, d.h. eine der abhängigen Variablen x_i kann frei gewählt werden. In beiden Fällen sind die Voraussetzungen nicht eingehalten.

Satz 16 *(Über das mechanisierte Beweisen geometrischer Sätze vom linearen Typ):*
Sei $(F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ ein Satz vom linearen Typ. Ist $D(\mathbf{u})$ nicht identisch Null, so ist $\mathbf{u}$ eine maximale Menge unabhängiger Variablen und der Satz gilt unter der Nichtdegenerationsbedingung $D(\mathbf{u}) \neq 0$ genau dann, wenn $g(x(\mathbf{u}), \mathbf{u})$, die rationale Funktion in $k(\mathbf{u})$, die durch Substitution der eindeutig bestimmten Lösung $x = x(\mathbf{u}) \in k(\mathbf{u})^m$ von F in $g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ entsteht, identisch Null ist.

AUFGABE 14:

> Beweisen Sie auf diesem Weg den Satz des Apollonius: In einem rechtwinkligen Dreieck liegen die drei Seitenmitten und der Höhenfußpunkt auf die Hypotenuse auf einem gemeinsamen Kreis.

AUFGABE 15:

> Beweisen Sie auf diese Weise den Satz von Pappus.

3.4 Ideale und Nullstellenmengen. Korrespondenzsatz und Zerlegungssatz

Zur Untersuchung der Nullstellenmengen (nicht linearer) polynomialer Gleichungssysteme $F = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\}$ geht man – ähnlich zum Untervektorraum, der von den Zeilenvektoren der Koeffizientenmatirx eines linearen Gleichungssystems erzeugt wird – zu invarianten Objekten, den Idealen im Ring $R = k[\mathbf{x}]$, über.

DEFINITION: Als von den Polynomen $f \in F$ erzeugtes Ideal $Id(F)$ bezeichnet man die Menge aller polynomialen Linearkombinationen

$$Id(F) = \{\sum_{f \in F} r_f\, f \ : \ r_f \in R\}$$

von Elementen aus F.

Da R ein Ring ist, kann man alle angegebenen Operationen ausführen. Es entsteht eine Menge, die abgeschlossen ist bzgl. Addition, Subtraktion und Vervielfachung mit Elementen $r \in R$. Diese Eigenschaft charakterisiert Ideale zugleich. Zur Bestimmung der Nullstellenmenge ist es unerheblich, ob man von der Menge F oder aber vom Ideal $Id(F)$ ausgeht.

Auf den Idealen eines Ringes R sind folgende Operationen möglich:

Summe zweier Ideale $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(R)$:

$$I_1 + I_2 = \{a + b \in R \ : \ a \in I_1,\ b \in I_2\}$$

Produkt zweier Ideale $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(R)$:

$$I_1 \cdot I_2 = \{\sum_k a_k \cdot b_k \in R \ : \ a_k \in I_1,\ b_k \in I_2\}$$

Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ zweier Ideale $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(R)$.
Idealquotient eines Ideals $I \in \mathcal{I}(R)$ bzgl. eines Polynoms $f \in R$:

$$I : f = \{g \in R \ : \ f \cdot g \in I\}$$

Stabiler Idealquotient eines Ideals $I \in \mathcal{I}(R)$ bzgl. eines Polynoms $f \in R$:

$$I : f^\infty = \{g \in R \ : \ \exists n \ f^n \cdot g \in I\}$$

Eine Menge, die sich als Nullstellengebilde

$$V(F) = V(Id(F)) = \{\, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n \ : \ \forall f \in F \ f(\mathbf{a}) = 0 \,\}$$

eines Sytems von Polynomen F darstellen lässt, bezeichnen wir als *affine Varietät*.

Im Gegensatz zur linearen Algebra können *verschiedene* Ideale dieselbe affine Varietät definieren. Das hängt damit zusammen, dass Ideale eigentlich Nullstellenmengen mit deren Vielfachheiten verkörpern. So besteht etwa aus Sicht der Nullstellen kein Unterschied zwischen den Mengen $F_1 = \{x+1, y-1\}$ und $F_2 = \{(x+1)^2, (y-1)^3\}$, aus Sicht der Ideale schon. Sei deshalb $rad(I)$ das größte Ideal, welches dieselbe Nullstellenmenge $V(I)$ wie I (über einem algebraisch abgeschlossenem Körper) hat. Dieses Ideal bezeichnet man auch als das *Radikal* von I. Ideale, die mit ihrem Radikal übereinstimmen, bezeichnen wir auch als *Radikalideale*. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gilt

$$rad(I) = \{f \in R \ : \ \exists\, k > 0 \ f^k \in I\}.$$

Ist umgekehrt $Z \subset \mathbf{A}^n$ eine Teilmenge des affinen Raums, so bezeichnen wir mit

$$I(Z) = \{f \in R \ : \ \forall\, z \in Z \ f(z) = 0\}$$

das Radikalideal der Polynome, die auf Z verschwinden.

Zwischen affinen Varietäten und Radikalidealen besteht eine eineindeutige inklusionsumkehrende Korrespondenz, die in der Vorlesung "Gröbnerbasen und deren Anwendungen" als Korrespondenzsatz bewiesen wird:

Satz 17 *(Korrespondenzsatz) V und I sind zueinander inverse, inklusionsumkehrende Korrespondenzen zwischen den affinen Varietäten im $\mathbf{A}^n$ und den Radikalidealen in R, die Durchschnitte der Nullstellenmengen in Idealsummen und Vereinigungen der Nullstellenmengen in Idealdurchschnitte überführen, d.h.*

1. *die Bilder unter V sind genau die affinen Varietäten im $\mathbf{A}^n$,*

2. *die Bilder unter I sind genau die Radikalideale in R,*

3. *für jede Teilmenge $W \in \mathbf{A}^n$ ist $V(I(W))$ die kleinste affine Varietät, die W umfasst (deren* affiner Abschluss*),*

4. *für jedes Ideal $J \subset R$ gilt $I(V(J)) = rad(J)$,*

5. $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow V(I_1) \supseteq V(I_2)$,

6. $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow I(V_1) \supseteq I(V_2)$.

7. $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \bigcap V(I_2)$ *und*

8. $V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \bigcap I_2) = V(I_1) \bigcup V(I_2)$.

Ohne Beweis. Siehe Vorlesung “Gröbnerbasen und deren Anwendungen”.

Definition: Eine affine Varietät V heißt *irreduzibel*, wenn sie sich nicht als Vereinigung zweier echt kleinerer Varietäten darstellen lässt, d.h. wenn

$$V = V_1 \cup V_2 \;\Rightarrow\; V = V_1 \text{ oder } V = V_2$$

gilt.

Ist V eine solche irreduzible Varietät und verschwindet das Produkt $f\,g$ auf ganz V, so muss bereits einer der Faktoren auf V verschwinden. In der Tat, wegen

$$(V \cap V(f)) \cup (V \cap V(g)) = V \,\cap\, (V(f) \cup V(g)) = V \,\cap\, V(fg) = V$$

wäre das eine Zerlegung in kleinere Varietäten. Das Verschwindungsideal $I = I(V)$ ist also ein Primideal.

Satz 18 *In einem Polynomring lässt sich jedes Radikalideal als Durchschnitt endlich vieler Primideale darstellen.*

Jede affine Varietät V ist die Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Varietäten $V = \cup V_i$.

Ohne Beweis. Siehe Vorlesung “Gröbnerbasen und deren Anwendungen”.

Die Teilvarietäten V_i bezeichnet man auch als die *irreduziblen Komponenten* von V. Wird etwa die Varietät $V = V(f)$ durch eine Gleichung f gegeben und ist $f = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ die Zerlegung dieses Polynoms in Primfaktoren, so lässt sich V zerlegen als

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^{k} V(p_i).$$

Es kann sein, dass geometrische Sätze nur auf einigen Komponenten eines Nullstellengebildes gültig sind, während andere Komponenten degenerierten Lagen entsprechen.

Eine vollständige Zerlegung in irreduzible Komponenten ist meist schwierig. Oft genügt eine teilweise Zerlegung in degenerierte und nicht degenerierte Teile.

3.5 Idealtest, Normalformen und Gröbnerbasen

Die Frage, ob ein Polynom g auf den gemeinsamen Nullstellen der Polynome $f \in F$ verschwindet, lässt sich also als Idealenthaltenseinsproblem „$g \in Id(F)$?“ umformulieren, da Ideale $Id(F)$, die aus geometrischen Fragestellungen entstehen, meist bereits Radikalideale sind.

Bei der algorithmischen Umsetzung solcher Idealenthaltenseinstests spielen Normalformen und Gröbnerbasen eine zentrale Rolle. Fixieren wir dazu zunächst wieder die erforderliche Begrifflichkeit:

Sei $R = k[x_1, \ldots, x_n] = k[\mathbf{x}]$ ein Polynomring und $T := T(\mathbf{x}) = T(x_1, \ldots, x_n)$ das zugehörige Termmonoid, welches mit einer Termordnung, also einer linearen, monotonen, noetherschen Ordnungsrelation versehen ist. Die Terme eines Polynoms $0 \neq f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{N} c_i \mathbf{x}^{\alpha_i} \in R$ seien so angeordnet, dass in der fixierten Termordnung $\mathbf{x}^{\alpha_i} > \mathbf{x}^{\alpha_j}$ für $i < j$ gilt. Bezeichne weiter $T(f) := \{\mathbf{x}^{\alpha_i}, i = 0, \ldots, N\}$ die Menge der in der Darstellung von f auftretenden Terme. Dann können wir die folgenden Begriffe definieren:

- den Leitterm $lt(f) := \mathbf{x}^{\alpha_0}$,
- den Leitkoeffizienten $lc(f) := c_0$,
- das Leitmonom $lm(f) := lc(f) \cdot lt(f)$,
- das Reduktum $red(f) := f - lm(f)$.

Für eine Menge $B \subset R$ von Polynomen bilden die Vielfachen der Leitterme $lt(b), b \in B$, das Monoid-Ideal $\Sigma(B) := (lt(b) : b \in B) \subset T$. Mit diesen Begriffen kann man eine Erweiterung der Division mit Rest von Polynomen einführen, indem ein Polynom $f \in R$ so lange reduziert wird, so lange einer der Terme durch den Leitterm eines der Polynome $b \in B$ teilbar ist. Das Ergebnis dieser Reduktion bezeichnet man als (vollständige) *Normalform* $r = NF(f, B)$ des Polynoms f bzgl. B. Die Terme $t \in \Sigma(B)$ bezeichnet man dabei auch als *Nichtstandardterme*, da sie weiter reduziert werden können.

Satz 19 *Sei $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynomring über einerm Körper k, $<$ eine Termordnung auf $T(x_1, \ldots, x_n)$ und $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset R$ eine endliche Menge von Polynomen. Dann gibt es einen Algorithmus, der für jedes Polynom $f \in R$ nach endlich vielen Schritten eine Darstellung*

$$f = v_1\, b_1 + \ldots + v_m\, b_m + r$$

mit $v_1, \ldots, v_m, r \in R$ produziert, in der $r = 0$ gilt oder r eine Linearkombination von Standardtermen bzgl. B ist und $lt(f) \geq lt(v_i b_i)$ für alle i gilt.

Dieser Normalform-Algorithmus ist in den verschiedenen CAS unter folgenden Namen (teilweise nur für eine eingeschränkte Auswahl von Termordnungen) implementiert:

CoCoA	`NR(f,B)` oder `NF(f,Ideal(B))` (bzgl. Currentring)
Maple	`normalf(f,B,TO)`
Mathematica	`PolynomialReduce[f,B,vars]`
MuPAD	`normalf(f,B,TO)`
Reduce	`preduce(f,B)` (bzgl. TORDER)
Reduce (CALI)	`f mod B` (bzgl. Currentring)

Bei der Berechnung einer Normalform wird f nur um ein Element aus dem Ideal $I = Id(B)$ abgeändert. Dafür können wir die aus der Zahlentheorie bekannte Notation der Restklassen verallgemeinern:

DEFINITION: Zwei Polynome $f, g \in R$ heißen *kongruent* modulo dem Ideal I, wenn $f - g \in I$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $f \equiv g \ (mod\ I)$.

Mit Kongruenzen kann man genauso rechnen, wie wir das von Restklassen ganzer Zahlen gewohnt sind. Insbesondere gilt $f \in Id(B)$, wenn wir $NF(f, B) = 0$ nachweisen können. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht allgemein, da für beliebige B eine solche Normalform nicht eindeutig bestimmt ist, sondern vom Reduktionsweg abhängen kann.

Diese Mehrdeutigkeit wird beseitigt, wenn man von B zu einer Gröbnerbasis $G = GB(B)$ übergeht. Gröbnerbasen zeichnen sich durch eine Reihe zueinander äquivalenter Eigenschaften aus:

Satz 20 *(Charakterisierungssatz für Gröbnerbasen) Die folgenden Bedingungen an eine Basis G eines Ideals $I \subset R$ sind äquivalent:*

1. *G ist eine Gröbnerbasis von I, d.h. es gilt $\Sigma(I) = \Sigma(G)$.*
2. *Für jedes Element $f \in I$ und jede Reduktionsstrategie gilt $NF(f, G) = 0$.*
3. *Jedes Element $f \in I$ hat eine Darstellung*

$$f = \sum_{g_i \in G} h_i g_i \quad mit \quad \forall\, i\ (lt(f) \geq lt(h_i g_i)).$$

4. *Die Standardterme $N(G)$ bilden eine Vektorraumbasis des Faktorrings R/I, d.h. jedes Element $f \in R$ besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$f \equiv \sum_{m \in N(G)} c_m m \ (mod\ I)$$

mit $c_m \in k$.

Ohne Beweis. Siehe Vorlesung “Gröbnerbasen und deren Anwendungen”.

Für derartige Basen gilt also $NF(f,G) = 0 \Leftrightarrow f \in I$ und das Ergebnis der Normalformberechnung ist unabhängig vom gewählten Reduktionsweg.

Die Berechnung von Gröbnerbasen ist ebenfalls in den verschiedenen CAS (für eine eingeschränkte Auswahl von Termordnungen) implementiert:

CoCoA	`GBasis(B)` (bzgl. Currentring)
Maple	`gbasis(B,TO)`
Mathematica	`GroebnerBasis[B,vars]`
MuPAD	`gbasis(B,TO)`
Reduce	`groebner(B)` (bzgl. TORDER)
Reduce (CALI)	`gbasis(B)` (bzgl. Currentring)

Wenden wir diese Algorithmen zum Beweis eines geometrischen Satzes vom Gleichungstyp an.

> Arnon-Beispiel ([1, S. 267]): Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und der Punkt P auf der Parallelen zu BD durch C mit $|BP| = |BD|$. Sei ferner Q der Schnittpunkt von CD und BP. Man zeige, dass dann $|DP| = |DQ|$ gilt.

Eine Lösung in einem speziellen Koordinatensystem geht von drei Variablen aus:

```
A:=Point(0,0); B:=Point(1,0); C:=Point(1,1); D:=Point(0,1);
P:=Point(x1,x2); Q:=varpoint(C,D,x3);

polys:={ on_line(P,par_line(C,pp_line(B,D))),
      sqrdist(B,D)-sqrdist(B,P), on_line(Q,pp_line(B,P))};
con:=sqrdist(D,Q)-sqrdist(D,P);
```

Wir erhalten als Idealbasis

$$polys = \{x_1 + x_2 - 2, -{x_1}^2 + 2\,x_1 - {x_2}^2 + 1, -x_1 + x_2\,x_3 - x_2 + 1\}$$

und als Behauptung

$$con = -{x_1}^2 - {x_2}^2 + 2\,x_2 + {x_3}^2 - 1$$

Die folgende Rechnung zeigt den Unterschied zwischen der Verwendung der Ausgangspolynome und einer Gröbnerbasis (Maple):

```
TO:=plex(x1,x2,x3);
normalf(con,polys,TO);
```

$$-2\,{x_2}^2 + 6\,x_2 + {x_3}^2 - 5$$

da bzgl. der lexikografischen Termordnung im Ausgangssystem *polys* nur Vielfache von x_1 als Leitterme auftreten. Mit der zugehörigen Gröbnerbasis

```
gb:=gbasis(polys,TO);
```

$$\{{x_3}^2 + 2\,x_3 - 2, 2\,x_2 - x_3 - 2, 2\,x_1 + x_3 - 2\}$$

liefert die entsprechende Normalform

```
normalf(con,gb,TO);
```

Null und damit einen Beweis der Behauptung.

Allerdings ist es schwierig, die genauen Koordinaten der Punkte P und Q zu bestimmen, denn das Polynom ${x_3}^2 + 2\,x_3 - 2$ aus der Gröbnerbasis hat *zwei* Nullstellen für x_3 (aus denen sich dann jeweils x_1 und x_2 aus den beiden folgenden Gleichungen eindeutig ergibt). Hat diese zweite Lösung eine geometrische Bedeutung oder ist sie degeneriert? Ein genauerer Blick auf die geometrische Konfiguration zeigt, dass wir die zweite Lösung schlichtweg übersehen haben.

Allerdings war dieses Beispiel besonders einfach, weil in ihm alle Variablen durch Gleichungen gebunden waren. Für allgemeinere Beweisschemata läuft der vorgestellte Ansatz meist nicht so glatt durch.

Beispiel: Betrachten wir noch einmal den *Satz vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.* In dessen Beweisschema treten vier Variable auf.

```
A:=Point(0,0); B:=Point(1,0); C:=Point(c1,c2); P:=Point(x1,x2);
polys:={on_bisector(P,A,B,C), on_bisector(P,B,C,A)};
con:=on_bisector(P,C,A,B);
```

Eine Gröbnerbasis (bgzl. der Ordnung DegRevLex)

```
TO:=tdeg(x1,x2,c1,c2);
gb:=gbasis(polys,TO);
```

enthält 5 Polynome. Leider kann damit nicht bewiesen werden, dass der Satz gilt, denn die Normalform von *con* reduziert nicht zu Null.

```
normalf(con,gb,TO);
```

$$2\,c_1\,x_2 - 2\,x_2 + 2\,x_1\,x_2 + c_2 - 2\,c_2\,x_1$$

Allerdings reduziert das folgende Produkt zu Null:

```
normalf(((c1-1)^2+c2^2)*con,gb,TO);
```

Damit gilt der Satz $(F/h \Rightarrow g)$ unter der Nichtdegenerationsbedingung $h = (c_1 - 1)^2 + c_2^2$. Deren Herkunft bleibt an dieser Stelle natürlich im Dunkeln. Über den reellen Zahlen entspricht $h = 0$ dem Fall $c_1 = 1, c_2 = 0$, also der degenerierten Situation $B = C$, in welcher die Gerade BC als Schenkel der beiden Winkel in *polys* entartet.

Eine spezielle Anwendung von Gröbnerbasen ergibt sich aus folgender Überlegung: Ist $g(\mathbf{x})$ ein Polynom, das auf allen gemeinsamen Nullstellen von $F(\mathbf{x})$ verschwindet und t eine neue Variable, so hat offensichtlich das System $F = 1 - t \cdot g = 0$ keine gemeinsamen Lösungen. Das ist aber nach dem Hilbertschen Nullstellensatz genau dann der Fall, wenn das von diesen Polynomen erzeugte Ideal das Einsideal ist, was wiederum durch eine Gröbnerbasisberechnung geprüft werden kann. Dieser **indirekte Beweisansatz** ergibt für obiges Beispiel mit

```
TO:=plex(t,x1,x2,c1,c2);
gb:=gbasis([op(polys),1-t*con],TO);
```

jedoch nicht das Einsideal, sondern eine Gröbnerbasis mit sechs Elementen. Diese enthält aber wenigstens das Polynom $h = (c_1 - 1)^2 + c_2^2$, so dass für gemeinsame Lösungen von $F = 1 - t \cdot g = 0$ stets $h = 0$ gilt. Das kann durch h als Nichtdegenerationsbedingung ausgeschlossen werden, so dass wieder $(F/h \Rightarrow g)$ bewiesen ist.

3.6 Der Gröbnerfaktorisierer

Enthält ein Ideal I ein Polynom $f = f_1 \cdot f_2$, das sich in zwei Faktoren zerlegen lässt, die beide nicht im Ideal I enthalten sind, so entspricht dem die Aufspaltung der Nullstellenmenge $Z = V(I)$ in die beiden Teile $V(I+Id(f_1)) \cup V(I+Id(f_2))$. Auch wenn jeder der beiden Teile noch aus mehreren Komponenten von Z bestehen kann, so kann eine solche partielle Zerlegung hilfreich sein, da wir das Geometrietheorem auf jeder einzelnen Komponente verifizieren können bzw. vielleicht eine Komponente (und den Grund dafür) entdecken, auf der das Theorem nicht gültig ist. Führt man solche Probefaktorisierungen auf den Basiselementen und auch während der Rechnungen des Gröbneralgorithmus aus, so erhält man im Ergebnis aus dem Ausgangssystem F eine Liste von Gröbnerbasen G_i, so dass $V(F) = \cup_i V(G_i)$ gilt. Diese Variante des Gröbneralgorithmus bezeichnet man als den *Gröbnerfaktorisierer*. Er ist in einigen der CAS ebenfalls implementiert. Da in einer optimierten Variante auf dem zweiten Zweig $f_1 \neq 0$ berücksichtigt wird, kann man in einigen Implementierungen dem Gröbnerfaktorisiererer bereits beim Start (optional) Nichtdegenerationsbedingungen übergeben.

Maple	`gsolve(polys,vars)`
MuPAD	`groebner::factor(gbasis(polys,TO),TO)` (eingeschränkt)
Reduce	`groebnerf(B[,nondegs])` (bzgl. TORDER)
Reduce (CALI)	`groebfactor(polys,nondegs)` (bzgl. Currentring)

Obwohl dies nicht garantiert werden kann, ist die dabei produzierte Zerlegung für eine lexikografische Termordnung in praktischen Anwendungen oft nahe an der Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden (Rechnungen mit Reduce):

```
A:=Point(0,0); B:=Point(1,0); C:=Point(c1,c2); P:=Point(x1,x2);
polys:={on_bisector(P,A,B,C), on_bisector(P,B,C,A)};
con:=on_bisector(P,C,A,B);

vars:={x1,x2,c1,c2};
res:=geo_groebfactor(polys,vars,{});
for each x in res collect con mod x;
```

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\, 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_1\,c_2 + 2\,x_2\,c_1 - 2\,x_2 + c_2, \\
&\quad {x_1}^2\,c_2 - 2\,x_1\,c_1\,c_2 - {x_2}^2\,c_2 + 2\,x_2\,{c_1}^2 - 2\,x_2\,c_1 + c_1\,c_2, \\
&\quad 4\,{x_2}^4\,c_2 - 8\,{x_2}^3\,{c_1}^2 + 8\,{x_2}^3\,c_1 - 8\,{x_2}^3\,{c_2}^2 + 4\,{x_2}^2\,{c_1}^2\,c_2 - 4\,{x_2}^2\,c_1\,c_2 + 4\,{x_2}^2\,{c_2}^3 \\
&\qquad\quad - 4\,{x_2}^2\,c_2 + 4\,x_2\,{c_2}^2 - {c_2}^3, \\
&\quad 2\,x_1\,c_1\,{c_2}^2 - x_1\,{c_2}^2 + 2\,{x_2}^3\,c_2 - 4\,{x_2}^2\,{c_1}^2 + 4\,{x_2}^2\,c_1 - 2\,{x_2}^2\,{c_2}^2 - 2\,x_2\,{c_1}^2\,c_2 \\
&\qquad\quad + 2\,x_2\,c_1\,c_2 - 2\,x_2\,c_2 - c_1\,{c_2}^2 + {c_2}^2 \Big\}, \\
&\Big\{\, {c_1}^2 - 2\,c_1 + {c_2}^2 + 1, \\
&\quad {x_1}^2\,c_2 - 2\,x_1\,x_2\,c_1 + 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_1\,c_2 - {x_2}^2\,c_2 + 2\,x_2\,c_1 - 2\,x_2 + c_2 \Big\}
\end{aligned}
$$

Die faktorisierte Gröbnerbasis besteht aus zwei Komponenten, wovon auf der ersten $con \equiv 0$ gilt. Die andere enthält in der Gröbnerbasis u.a. wieder das Polynom $h = {c_1}^2 - 2\,c_1 + {c_2}^2 + 1$, entspricht also dem degenerierten Fall, in dem $B = C$ gilt.

3.7 Unabhängige und abhängige Variablen

In obigen Beispielen haben wir bereits begonnen, auf einer heuristischen Basis zwischen unabhängigen und abhängigen Variablen zu unterscheiden. Dies wollen wir nun präzisieren. Im konstruktiven Fall war eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit des entsprechenden Mechanisierungssatzes die algebraische Unabhängigkeit der Variablen gewesen. Ist $I \subset R = k[x_1, \ldots, x_n] = R[\mathbf{x}]$ ein Relationenideal, so wollen wir eine Teilmenge $\mathbf{u} \subset \mathbf{x}$ als *unabhängig* modulo I bezeichnen, wenn

$$I \cap k[\mathbf{u}] = (0)$$

gilt, d.h. wenn es keine polynomiale Relation in I zwischen den ausgewählten Variablen gibt. Der Nachweis, dass eine vorgegebene Variablenmenge unabhängig ist, wird somit auf ein Eliminationsproblem reduziert, das mit der Berechnung entsprechender Gröbnerbasen beantwortet werden kann. Aus einer Gröbnerbasis kann man umgekehrt auch auf unabhängige Variablenmengen schließen.

Ist I ein Primideal, so haben alle maximalen unabhängigen Variablenmengen die gleiche Kardinalität. Diese Anzahl (der unabhängigen Parameter) bezeichnet man auch als die Dimension des Ideals I bzw. der Nullstellenmenge $V(I)$. Ist $\mathbf{u}$ eine solche maximale unabhängige Variablenmenge und x_i eine weitere Variable, so hängt x_i über I algebraisch von den Variablen $\mathbf{u}$, d.h. es existiert ein Polynom

$$f_i(x_i, \mathbf{u}) = \sum_j c_{ij}(\mathbf{u}) x_i^j \in I$$

x_i kann man dann zwar im Allgemeinen nicht rational durch die unabhängigen Parameter ausdrücken, jedoch ergibt sich für fast alle Parameterbelegungen (genauer: solche, für die $c_{ij}(\mathbf{u}) \neq 0$ gilt) eine Bestimmungsgleichung für x_i und damit nur endlich viele zulässige Parameterspezifikationen $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ für eine vorgegebene Spezifikation $\mathbf{u}_0 = \phi(\mathbf{u})$.

3.8 Generisch gültige Geometrietheoreme

Im Fall der Geometrietheoreme vom konstruktiven und vom linearen Typ haben wir lineare Algebra über dem Körper $k(\mathbf{u})$ der rationalen Funktionen in den unabhängigen Parametern getrieben. Wir wollen deshalb nun auch für den allgemeinen Fall im Ring $S' = k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$ der Polynome in $\mathbf{x}$ mit rationalen Funktionen in $\mathbf{u}$ als Koeffizienten rechnen statt wie bisher im Ring $S = k[\mathbf{u}, \mathbf{x}]$.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 1 : Satz vom Miquelschen Punkt

```
A:=Point(0,0); B:=Point(1,0); C:=Point(u1,u2);
R:=varpoint(B,C,u3); S:=varpoint(A,C,u4); T:=varpoint(A,B,u5);
P:=Point(x1,x2);

polys:={ is_concyclic(A,S,T,P), is_concyclic(B,R,T,P)};
con:= is_concyclic(C,R,S,P);
```

Wir wollen die Gröbnerbasis von $I = Id(polys)$ im Ring $S' = k(\mathbf{u})[x_1, x_2]$ berechnen:

```
TO:=plex(x1,x2);
gb:=gbasis(polys,TO);
map(collect,gb,{x1,x2});
```

Diese Gröbnerbasis hat eine recht einfache Struktur

$$\{p_1(\mathbf{u})x_2^2 + p_2(\mathbf{u})x_2,\ p_3(\mathbf{u})x_2 - u_2u_5\},$$

so dass das zugehörige Gleichungssystem zwei Lösungen $(x_1,x_2)\in \mathbf{A}^2_{k(\mathbf{u})}$ mit $x_{2.1}=0$ und $x_{2.2}=-\frac{p_2(\mathbf{u})}{p_1(\mathbf{u})}$ besitzt. Die erste Lösung entspricht dem Schnittpunkt F der beiden Kreise, die zweite dem Punkt P und erfüllt die Gleichung *con*:

```
sol:=solve({op(gb)},{x1,x2});
map(u->normal(subs(u,con)),[sol]);
```

Beispiel 2 : Satz vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

```
A:=Point(0,0); B:=Point(0,1); C:=Point(u1,u2); P:=Point(x1,x2);
polys:={on_bisector(P,B,A,C), on_bisector(P,C,B,A)};
con:= on_bisector(P,A,C,B);

TO:=plex(x1,x2);
gb:=gbasis(polys,TO);
normalf(con,gb,TO);
```

Als Gröbnerbasis erhalten wir hier

$$\{(4u_2)\,x_2^4-(8u_1^2-8u_1+8u_2^2)\,x_2^3+(4u_1^2u_2-4u_1u_2+4u_2^3-4u_2)\,x_2^2+(4u_2^2)\,x_2-u_2^3,$$
$$(2u_1u_2^2-u_2^2)\,x_1+(2u_2)\,x_2^3-(4u_1^2-4u_1+2u_2^2)\,x_2^2-(2u_1^2u_2-2u_1u_2+2u_2)\,x_2-(u_1u_2^2-u_2^2)\}$$

In $k(\mathbf{u})[x_1,x_2]$ ist das davon erzeugte Ideal nulldimensional und hat genau 4 Nullstellen in $\mathbf{A}^2_K$, dem zweidimensionalen affinen Raum über $K=\overline{k(\mathbf{u})}$, dem algebraischen Abschluss von $k(\mathbf{u})$. Diese entsprechen den vier ("generischen") Schnittpunkten der möglichen Auswahlen der Halbierenden von Innen- und Außenwinkel von $\angle\,ABC$ und $\angle\,BCA$. Jeder von ihnen liegt auf der ("generischen") Halbierenden entweder des Innen- oder des Außenwinkels von $\angle\,CAB$, da $NF(con,gb)=0$ und folglich $con\in Id(polys)\subset k(\mathbf{u})[x_1,x_2]$ gilt. Die Probleme mit der degenerierten Situation $B=C$ treten nicht auf.

Es bleibt zu untersuchen, was das mit der ursprünglichen geometrischen Fragestellung zu tun hat.

Beispiel 3 : Die Simsonsche Gerade

```
M:=Point(0,0);
A:=Point(0,u1); B:=Point(u2,x2); C:=Point(u3,x3); P:=Point(u4,x4);
R:=varpoint(A,B,x5); S:=varpoint(B,C,x6); T:=varpoint(A,C,x7);

polys:={ is_orthogonal(pp_line(A,B),pp_line(P,R)),
        is_orthogonal(pp_line(A,C),pp_line(P,T)),
        is_orthogonal(pp_line(B,C),pp_line(P,S)),
        sqrdist(M,A)-sqrdist(M,P),
        sqrdist(M,B)-sqrdist(M,P),
        sqrdist(M,C)-sqrdist(M,P)};

con:= is_collinear(R,S,T);
TO:=plex(x5,x6,x7,x2,x3,x4);
gb:=gbasis(polys,TO);
normalf(con,gb,TO);
```

Auch in diesem Fall ist das Ideal $Id(polys)\subset k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$ nulldimensional. Aus der Gröbnerbasis

$$\{x_2^2-(u_1^2-u_2^2),$$
$$x_3^2-(u_1^2-u_3^2),$$
$$x_4^2-(u_1^2-u_4^2),$$
$$(2\,u_1\,u_3)\,x_7-u_3\,x_4+u_4\,x_3-(u_1\,u_3-u_1\,u_4),$$
$$(2\,u_1\,u_2)\,x_5-u_2\,x_4+u_4\,x_2-(u_1\,u_2-u_1\,u_4),$$
$$(2\,u_1^2\,u_2-2\,u_1^2\,u_3)\,x_6+u_2\,x_4\,x_3+u_3\,x_4\,x_2-u_4\,x_3\,x_2-(u_1^2\,u_2-u_1^2\,u_3+u_1^2\,u_4-u_2\,u_3\,u_4)\}$$

lesen wir ab, dass dieses System 8 "generische" Lösungen besitzt und *con* auf allen diesen Punkten verschwindet, d.h. der Satz von der Simsonschen Geraden "generisch" (d.h. in $\mathbf{A}^2_K$) gilt. Gröbnerbasisberechnungen bzgl. des kompletten Satzes von Variablen dauern deutlich länger (Maple etwa 150 sec. auf einem PC-800 bzgl. `plex(x5,x6,x7,x2,x3,x4,u4,u3,u2,u1)`) und liefern überdies keinen Beweis des Satzes, weil degenerierte Komponenten mitgeschleppt worden sind. Der Gröbnerfaktorisierer zerlegt das Beispiel in 9 Komponenten, wovon 8 degenerierten Situationen entsprechen und auf zwei dieser Komponenten *con* nicht verschwindet (Rechnungen mit Reduce).

In allen bisher betrachteten Beispielen besteht die Gröbnerbasis aus Gleichungen vom Grad 1 und 2 in den abhängigen Variablen und erlaubt es, die abhängigen Variablen durch die unabhängigen auszudrücken, auch wenn es im Gegensatz zum linearen Fall mehrere, aber stets endlich viele Lösungen für $\mathbf{x}$ in Abhängigkeit von den Parametern $\mathbf{u}$ gibt. In manchen Fällen, wie etwa beim Miquelschen Punkt, kann man die einzelnen Lösungen explizit in $k(\mathbf{u})$ ausdrücken, in anderen Fällen dagegen hätte man die einzelnen Zweige der Lösungsmenge durch mehr (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) oder weniger (Simsonsche Gerade) komplizierte Wurzelausdrücke in den unabhängigen Variablen angeben müssen. Die betrachteten Gleichungssysteme haben also stets endlich viele Lösungen (in den abhängigen Variablen), deren Koordinaten aber, in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie, im algebraischen Abschluss des Koeffizientenkörpers $k(\mathbf{u})$ liegen.

Um zu testen, ob ein gegebenes Polynom *con* auf *allen* diesen Nullstellen verschwindet, haben wir aber nicht in dieser Erweiterung gerechnet, sondern $NF_{S'}(con, G') = 0$ in $S' = k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$ für eine Gröbnerbasis $G' = \mathtt{gbasis}_{S'}(F)$ der geometrischen Bedingungen F geprüft. Der folgende Satz gibt eine erste Auskunft, was dieses Ergebnis mit unserer ursprünglichen geometrischen Fragestellung zu tun hat.

Satz 21 (Spezialisierungssatz) *Sei $F \subset S = k[\mathbf{u}, \mathbf{x}]$ eine Menge von Polynomen, $I = Id(F)$ das von ihnen erzeugte Ideal, $\mathbf{u}$ eine maximal unabhängige (mod I) Variablenmenge, $S' = k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$ und $G' = \mathtt{gbasis}_{S'}(F)$ die Gröbnerbasis des nulldimensionalen Ideals $I' = I \cdot S'$.*

Dann gilt für fast alle Spezifikationen $\mathbf{u}_0 = \phi(\mathbf{u})$ der Parameter mit speziellen Zahlenwerten:

- *$F_0 = F|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$ ist ein nulldimensionales algebraisches Gleichungssystem,*
- *$G_0 = G'|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$ ist dessen Gröbnerbasis über $S_0 = S'|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = k[\mathbf{x}]$ und*
- *$NF_{S'}(g(\mathbf{x}, \mathbf{u}), G') = 0$ impliziert $NF_{S_0}(g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0), G_0) = 0$.*

„Fast alle" bedeutet in diesem Zusammenhang die Existenz eines Polynoms $h(\mathbf{u})$, so dass die Aussage höchstens für $\mathbf{u}_0$ mit $h(\mathbf{u}_0) = 0$ nicht gilt.

Dieser Satz folgt sofort aus der Existenz des Buchbergeralgorithmus zur Berechnung der Gröbnerbasis G'. Wählt man die Spezifikation $\mathbf{u}_0 = \phi(\mathbf{u})$ so, dass keiner der Faktoren $t(\mathbf{u}) \in k(\mathbf{u})$, durch die Koeffizienten während der Rechnungen geteilt wurden, und keiner der Leitkoeffizienten der $g \in G'$ verschwindet, so ergibt der Gröbnertrace der Berechnung von G' aus F bei Spezialisierung einen Gröbnertrace für die Berechnung von G_0 aus F_0. Als $h(\mathbf{u})$ kann man nun einfach das Produkt all dieser polynomialen Bedingungen nehmen.

Angewendet auf Beweisschemata vom Gleichungstyp ergibt sich folgender Satz:

Satz 22 (Gültigkeit geometrischer Sätze vom Gleichungstyp "im Allgemeinen")

Sei $(F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ ein Satz vom Gleichungstyp, $\mathbf{u}$ eine für diesen Satz maximale unabhängige Teilmenge der Variablen und $S' = k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$.

Gilt $NF_{S'}(g, \mathtt{gbasis}_{S'}(F)) = 0$, so gibt es eine (effektiv konstruierbare) Nichtdegenerationsbedingung $h(\mathbf{u})$, so dass g auf allen gemeinsamen Nullstellen $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ von F mit $h(\mathbf{u}_0) \neq 0$ verschwindet, also der Satz $(F/h \Rightarrow g)$ gilt.

Auch die Frage, ob $\mathbf{u}$ wirklich eine maximale unabhängige Teilmenge der Variablen ist, kann an Hand der Gröbnerbasis $G' = \mathtt{gbasis}_{S'}(F)$ entschieden werden. Ist $G' = \{1\}$ (bzw. enthält ein Polynom aus $k[\mathbf{u}]$), so ist $I' = Id_{S'}(F)$ das triviale Ideal und $\mathbf{u}$ war in Wirklichkeit algebraisch abhängig ($mod\ I$). Ansonsten ist $\mathbf{u}$ algebraisch unabhängig ($mod\ I$) und maximal genau dann, wenn S'/I' nulldimensional ist, d.h. G' zu jeder $\mathbf{x}$-Variablen ein Polynom enthält, dessen Leitterm eine reine Potenz in dieser Variablen ist.

$h(\mathbf{u})$ im Rahmen fertiger Gröbnerpakete aufzusammeln ist schwierig. Allerdings folgt allein aus der *Existenz* von $h \in k[\mathbf{u}]$, dass eine "zufällige" Wahl von $\mathbf{u}_0$ "normalerweise" zulässig ist. Deshalb auch "Gültigkeit im Allgemeinen".

Es ist auch plausibel, dass wenigstens für ein Radikalideal I' aus dem Nichtverschwinden von $NF_{S'}(g, \mathtt{gbasis}_{S'}(F))$ folgt, dass g auf wenigstens einer der "allgemeinen" Nullstellen von F nicht verschwindet und folglich nicht allgemeingültig ist.

Um den Zusammenhang zwischen diesen "allgemeinen" Nullstellen und dem (uns eigentlich interessierenden) Nullstellengebilde $V(F) \subset \mathbf{A}^n_{\bar{k}}$ besser zu verstehen, müssen wir den Zusammenhang zwischen Nullstellen von F in $S := k[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ und $S' = k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$ genauer studieren.

Der Polynomring S' enthält S als Unterring. Das von F in S' erzeugte Ideal $I' = I_{S'}(F) = I \cdot S'$ bezeichnet man als das *Erweiterungsideal* von I. Umgekehrt können wir mit einem Ideal $I' \subset S'$ das *Kontraktionsideal* $c(I') := I' \cap S$ in S verbinden, das aus allen rationalen Kombinationen der Erzeugenden besteht, "in denen sich die Nenner wegkürzen". Sicherlich ist $I \subset c(I')$.

Die Elemente des Rings S' sind Polynome in den Variablen $\mathbf{x}$ mit rationalen Funktionen in $\mathbf{u}$ als Koeffizienten. Durch Hauptnennerbildung überzeugt man sich leicht, dass man jedes Element aus S' in der Form $\frac{z(\mathbf{x},\mathbf{u})}{n(\mathbf{u})}$ mit $z \in S$ und $n \in U = k[\mathbf{u}] \setminus (0)$ darstellen kann. Die Menge U ist *multiplikativ*, d.h. $n_1, n_2 \in U$ impliziert $n_1 n_2 \in U$, womit die üblichen Rechenregeln für Brüche Anwendung finden können. Wir schreiben deshalb auch

$$S' = U^{-1}S := \{\frac{z}{n} \ : \ z \in S,\ n \in U\}$$

und nennen den Ring S' die *Lokalisierung* von S nach der multiplikativen Menge U.

Zunächst wollen wir das Erweiterungsideal $I' = I \cdot S'$ genauer beschreiben. Dessen Elemente lassen sich in der Form

$$u = \sum_{f \in F} \frac{z_f}{n_f} f = \frac{\sum h_f f}{n}$$

mit $z_f, h_f \in S,\ n_f, n \in U$ darstellen. Da $\sum h_f f$ genau die Elemente aus I sind, erkennen wir, dass I' aus genau den Elementen von S' besteht, die sich in der Form $\frac{i}{n}$ mit $i \in I, n \in U$ darstellen lassen. Entsprechend besteht das Kontraktionsideal $c(I')$ aus allen solchen Elementen, die außerdem noch polynomial auch in $\mathbf{u}$ sind, d.h. für die zusätzlich i vollständig durch n teilbar ist:

$$c(I') = \{u \in S :\ \exists n \in U\,(n \cdot u \in I)\}.$$

Das erinnert an die Definition des Idealquotienten. Allerdings kommen die Kofaktoren hier nicht aus einem Ideal.

Wir hatten gesehen, dass jedes Radikalideal I als Durchschnitt endlich vieler Primideale $I = \cap P_\alpha$ darstellbar ist. Eine bzgl. I unabhängige Variablenmenge $\mathbf{u}$ muss allerdings bzgl. einer dieser Primkomponenten, die ja größer sind als I, nicht mehr unabhängig sein. Wir erkennen das daran, ob $P_\alpha \cap U = \emptyset$ gilt (in diesem Fall bleibt die Variablenmenge unabhängig) oder nicht (in diesem Fall gibt es eine algebraische Beziehung $h_\alpha(\mathbf{u}) \in P_\alpha$ zwischen den eigentlich unabhängigen Variablen $\mathbf{u}$). Komponenten der ersten Art nennen wir *generisch*, Komponenten der zweiten Art *speziell*. Zerlegen wir das Nullstellengebilde der Voraussetzungen eines Geometrietheorems in seine Komponenten, so entsprechen letztere gewissen, durch $h_\alpha(\mathbf{u}) = 0$ beschriebenen, degenerierten Situationen.

Satz 23

(1) Sei I ein Radikalideal und $I = \cap P_\alpha$ dessen Zerlegung in Primkomponenten. Dann gilt

$$I' = \bigcap (P_\alpha \cdot S').$$

(2)

$$P_\alpha \cdot S' = \begin{cases} \text{ein Primideal } Q_\alpha \subset S' \text{ mit } c(Q_\alpha) = P_\alpha & \text{wenn } P_\alpha \cap U = \emptyset \\ (1) & \text{wenn } P_\alpha \cap U \neq \emptyset \end{cases}$$

Beweis : (1) Wegen $I \subset \cap P_\alpha$ folgt $I \cdot S' \subset \cap (P_\alpha \cdot S')$. Sei umgekehrt $u \in \cap (P_\alpha \cdot S')$. Nach geeigneter Hauptnennerbildung hat es eine Darstellung der Form $u = \frac{z}{n}$ mit $z \in \cap P_\alpha = I$, $n \in U$, also $u \in I \cdot S'$.

(2) Sei $0 \neq s \in P_\alpha \cap U$. Dann ist $1 = \frac{s}{s} \in P_\alpha \cdot S'$.

Sei $P_\alpha \cap U = \emptyset$ und $Q_\alpha := P_\alpha \cdot S'$.

Q_α ist ein Primideal: Aus

$$u_1 u_2 = \frac{p_1}{n_1} \frac{p_2}{n_2} = \frac{p}{n} \in Q_\alpha$$

mit $p_1, p_2 \in S$, $p \in P_\alpha$, $n, n_1, n_2 \in U$ folgt $n \cdot p_1 p_2 \in P_\alpha$ und wegen $n \notin P_\alpha$ und dessen Primidealeigenschaft schließlich $p_1 p_2 \in P_\alpha$.

$c(Q_\alpha) = \{u \in S :\ \exists n \in U\, (n \cdot u \in P_\alpha)\}$. Wie eben folgt dann bereits $u \in P_\alpha$. $\square$

Korollar 1

$$c(I') = \cap \{P_\alpha \ :\ P_\alpha \cap U = \emptyset\}$$

Ist insbesondere g ein Polynom in S und $G' = \texttt{gbasis}_{S'}(I)$, so gilt $NF_{S'}(g, G') = 0$ genau dann, wenn g auf allen generischen Komponenten von $V(I)$ verschwindet.

Wir sagen in diesem Fall, dass der geometrische Satz bzgl. der unabhängigen Variablenmenge $\mathbf{u}$ *generisch richtig ist*, was folgendes heißt:

Satz 24 (Generische Gültigkeit geometrischer Sätze vom Gleichungstyp)

Sei $(F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ ein Satz vom Gleichungstyp, $\mathbf{u}$ eine für diesen Satz maximale unabhängige Teilmenge der Variablen und $S' = k(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$.

Gilt $NF_{S'}(g, \texttt{gbasis}_{S'}(F)) = 0$, so ist $(F \Rightarrow g)$ auf allen generischen Komponenten von $V(F)$ richtig.

Die Aussage $g = 0$ ist höchstens auf speziellen Komponenten von $V(I)$ falsch, auf denen aber die Variablen $\mathbf{u}$ nicht mehr unabhängig sind. Jede solche Komponente enthält im definierenden Ideal ein Polynom $h_\alpha(\mathbf{u})$. Das Produkt dieser Polynome können wir als Nichtdegenerationsbedingung nehmen.

Ist umgekehrt $NF_{S'}(g, G') \neq 0$, so verschwindet g auf einer der generischen Komponenten nicht, d.h. kann durch keine Nichtdegenerationsbedingung, die nur die unabhängigen Parameter enthält, gerettet werden.

Generell, wenn $NF(g, G')$ nicht verschwindet, wie oben im Beispiel "Miquelscher Punkt", liefern uns Untersuchungen in S' Aussagen, die das Verhalten auf speziellen Komponenten ausblenden. In diesem Beispiel hat $V(I)$ zwei generische Komponenten. Eine entspricht dem Schnittpunkt F der Kreise durch A, F, E und B, F, D, die andere dem gesuchten Schnittpunkt P. Auf der ersteren Komponente gilt der Satz nicht, auf der zweiteren sehr wohl. Der Gröbnerfaktorisierer zeigt, dass $V(I)$ daneben noch eine weitere spezielle Komponenten hat, welche die Bedingung $c_1 = 0$ enthält und einer degenerierten Lagen entspricht. In einem solchen Fall ist aber der Kreis und damit auch der Schnittpunkt P nicht mehr eindeutig bestimmt, so dass wir auch nicht prüfen können, ob er auf dem dritten Kreis liegt.

3.9 Nichtdegenerationsbedingungen und Idealquotienten

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Zerlegung $I = \cap P_\alpha$ zu bestimmen und die speziellen Komponenten zu erkennen. Außerdem kan eine solche Komponente verschiedene $h_\alpha(\mathbf{u})$ enthalten, so dass die Frage steht, ob es so etwas wie eine „einfachste" Nichtdegenerationsbedingung gibt und wie sich diese ggf. bestimmen lässt. Wir wollen dazu die Menge aller Degenerationsbedingungen $h \in S$, den *Degenerationslocus* $DL(F/g)$ des Geometrietheorems $(F \Rightarrow g = 0)$, näher beschreiben.

Aus der Äquivalenz

$$(F = 0, h \neq 0 \Rightarrow g = 0) \Leftrightarrow (F = 0 \Rightarrow g \cdot h = 0)$$

und dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt zunächst für $I = Id(F)$, dass

$$DL(F/g) = \{h \in S \ : \ \exists n \ (g\,h)^n \in I\}$$

selbst wieder ein Ideal ist. Dieses Ideal ist eng mit dem stabilen Idealquotienten bzgl. g verbunden:

$$DL(F/g) = \{h \in S \ : \ \exists n \ h^n \in I : g^\infty\} = rad(I : g^\infty).$$

Ist I selbst ein Radikalideal, so gilt sogar

$$DL(F/g) = I : g^\infty.$$

Satz 25 *Der Degenerationslocus $DL(F/g)$ eines geometrischen Satzes $(F = 0 \Rightarrow \ g = 0)$ stimmt mit dem Radikal des stabilen Idealquotienten $J = Id(F) : g^\infty$ überein.*

Der Degenerationslocus muss dabei nicht unbedingt eine Hyperfläche $(h = 0)$ sein, sondern kann kleinere Dimension haben. Wegen $V(h) \supset V(J)$ für $h \in J$ kann *jedes* Element aus J als Nichtdegenerationsbedingung verwendet werden. Insbesondere gibt es keine "minimale" Nichtdegenerationsbedingung, wenn das Ideal J kein Hauptideal ist.

Ist $I = \cap P_\alpha$ die Zerlegung des Radikalideals I in Primkomponenten, so gilt $I : g^\infty = \cap(P_\alpha : g^\infty)$ und

$$P_\alpha : g^\infty = \begin{cases} (1) & \text{für } g \in P_\alpha \\ P_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

Folglich besteht der Degenerationslokus aus genau den Komponenten von I, auf denen g nicht verschwindet.

Als *Degenerationslocus im engeren Sinne* bzgl. einer maximalen Teilmenge unabhängiger Variablen $\mathbf{u}$ bezeichnet man das Eliminationsideal

$$DL_{\mathbf{u}}(F/g) = DL(F/g) \cap k[\mathbf{u}].$$

Alle anderen Polynome in $DL(F/g)$ beschreiben, welche Bedingungen an die abhängigen Variablen in einem solchen degenerierten Fall noch bestehen bleiben. Jedes Polynom $h(\mathbf{u}) \in DL_{\mathbf{u}}(F/g)$ kann als Degenerationsbedingung für den (dann richtigen) Satz $(F/h \Rightarrow g)$ verwendet werden.

Der stabile Idealquotient $I(F/g)$ lässt sich als Eliminationsideal aus $Id(F(\mathbf{x}))+Id(1-t\cdot g(\mathbf{x}))\cap k[\mathbf{x}]$ berechnen, wobei t eine neue Variable ist.

Betrachten wir als Beispiel den Satz vom Inkreismittelpunkt

```
A:=Point(0,0); B:=Point(0,u0); C:=Point(u1,u2); P:=Point(x1,x2);
polys:={on_bisector(P,B,A,C), on_bisector(P,C,B,A)};

con:=sqrdist_pl(P,pp_line(A,B))-sqrdist_pl(P,pp_line(A,C));

TO:=plex(t,x1,x2,u0,u1,u2);
dl:=gbasis({op(polys),denom(con)-t*numer(con)},TO);
dl0:=select(type,dl,freeof([t,x1,x2]));
```

Als Ergebnis erhalten wir eine Reihe von Gleichungen, darunter insbesondere die einzige Gleichung

$$u_1{}^2u_0 + u_2{}^2u_0 = u_0(u_1^2 + u_2^2)$$

in den unabhängigen Variablen. Die Nullstellen dieser Gleichung entsprechen den degenerierten Fällen $A = B$ ($u_0 = 0$) bzw. $C \in g(AB)$ ($u_1 = u_2 = 0$).

Allerdings werden mit diesem Zugang nicht alle "geometrischen" Nichtdegenerationsbedingungen gefunden, sondern nur solche, unter denen die algebraische Aussage nicht mehr gilt. Betrachten wir als Beispiel das folgende Beweisschema für den Satz vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden:

```
A:=Point(0,0); B:=Point(1,0); C:=Point(u1,u2); P:=Point(x1,x2);
polys:={on_bisector(P,B,A,C), on_bisector(P,C,B,A)};
con:= on_bisector(P,A,C,B);

TO:=plex(t,x1,x2,u1,u2);
dl:=gbasis({op(polys),denom(con)-t*numer(con)},TO);
```

$DL(polys/con)$ ist in diesem Fall das Einsideal, d.h. es gibt keine nichttrivialen Nichtdegenerationsbedingungen, obwohl $u_2 = 0$ sicher einer "geometrisch" degenerierten Lage entspricht, denn dann entartet das Dreieck ABC zur Geraden $g = AB$. Jedoch existieren auch in dieser Konfiguration die Winkelhalbierendenpaare durch A und B (bestehend jeweils aus g und der Senkrechten auf g durch A bzw. B) und deren gemeinsame Punkte (alle Punkte auf g) liegen auf dem Winkelhalbierendenpaar durch C (bestehend aus g und der Senkrechten auf g durch C). Allerdings erfüllt nicht jeder dieser Punkte die Bedingungen an den Inkreismittelpunkt, so dass dieser Fall im vorigen Beispiel als degeneriert ausgefiltert wurde.

Noch degenerierter wird die Situation, wenn zusätzlich $u_1 = 0$ gilt: $V(polys)$ ist die Vereinigung aus der Geraden AB und der Senkrechten auf AB durch B, *con* ist trivial, da jeweils ein Schenkel des Winkels durch C entartet.

4 Beispiele

4.1 Die Tangente an einen Kreis c in einem Punkt $P \in c$

Diese ergibt sich als Senkrechte im Punkt P auf dem Berührungsradius. Die homogenen Koordinaten dieser Geraden können also wie folgt berechnet werden:

```
P:=Point(x1,x2);
c:=[c1,c2,c3,c4];
l:= ortho_line(P,pp_line(circle_center(c),P));
```

$$\left[\ c_2 + 2\,x_1\,c_1, 2\,x_2\,c_1 + c_3, -2\,x_2{}^2c_1 - x_2\,c_3 - x_1\,c_2 - 2\,x_1{}^2c_1\ \right]$$

Zusammen mit der Bedingung `on_circle(P,c)` kann die dritte Komponente weiter vereinfacht werden:

```
l[3]+2*on_circle(P,c);
```

$$x_2\,c_3 + x_1\,c_2 + 2\,c_4$$

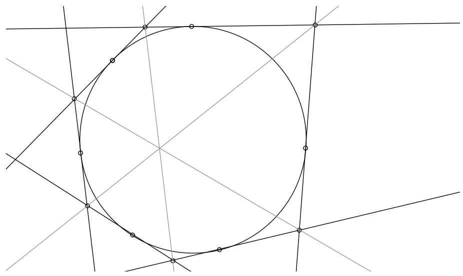
Diese Formel können wir in eine neue Prozedur gießen.

```
tangent_line:=proc(P,c)
if on_circle(P,c)<>0 then error("Point not on the circle") fi;
[2*c[1]*P[1]+c[2],2*c[1]*P[2]+c[3],c[2]*P[1]+c[3]*P[2]+2*c[4]];
end;
```

Eine ähnliche Formel gilt auch für Tangenten an allgemeine Quadriken.

Mit dieser Funktion lässt sich ein konstruktives Beweisschema für den **Satz von Brianҫon** für einen Kreis erstellen:

> Sind $t_1, \ldots, t_6$ sechs Tangenten an einen Kreis c und $Q_i = t_i \cap t_{i+1}$ jeweils die Schnittpunkte „benachbarter" Tangenten (mit $t_7 = t_1$), so gehen die drei Geraden Q_1Q_4, Q_2Q_5 und Q_3Q_6 durch einen gemeinsamen Punkt.



Satz von Brianҫon

```
M:=Point(0,0); P[1]:=Point(1,0); c:=pc_circle(M,P[1]);

for i from 2 to 6 do P[i]:=circle_slider(M,P[1],u[i]); od;
for i from 1 to 6 do t[i]:=tangent_line(P[i],c); od; t[7]:=t[1];
for i from 1 to 6 do Q[i]:=intersection_point(t[i],t[i+1]) od;
for i from 1 to 3 do l[i]:=pp_line(Q[i],Q[i+3]) od;
is_concurrent(l[1],l[2],l[3]);
```

4.2 Wann berührt eine Gerade l einen Kreis c?

Wir stellen zunächst die Gleichungen auf, aus denen sich die Koordinaten der Schnittpunkte $X = (x_1, x_2) \in l \cap c$ bestimmen lassen

```
polys:={c1*(x1^2+x2^2)+c2*x1+c3*x2+c4, l1*x1+l2*x2+l3};
```

und berechnen dazu eine Gröbnerbasis

```
with(Groebner):
TO:=plex(x1,x2);
gb:=gbasis(polys,TO);
```

$$\left[c_1\, {l_2}^2 {x_2}^2 + 2\, c_1\, l_2\, x_2\, l_3 + c_1\, {l_3}^2 + c_1\, {x_2}^2 {l_1}^2 - c_2\, l_1\, l_2\, x_2 - c_2\, l_1\, l_3 + c_3\, x_2\, {l_1}^2 + c_4\, {l_1}^2, \right.$$
$$\left. l_1\, x_1 + l_2\, x_2 + l_3 \right]$$

Aus der ersten Gleichung, welche die Form $Ax_2^2 + Bx_2 + C$ hat, können die beiden Koordinaten für x_2 berechnet werden; der zugehörige Wert von x_1 ergibt sich dann eindeutig aus der zweiten Gleichung. Zwischen l und c liegt genau dann eine Berührsituation vor, wenn die beiden Nullstellen der Gleichung für x_2 zusammenfallen, d.h. wenn $B^2 - 4\,A\,C$ verschwindet.

```
cc:=coeffs(gb[1],x2);
con:=factor(cc[2]^2-4*cc[1]*cc[3]);
```

Dieses Polynom enthält noch einen geometrisch irrelevanten Faktor $-l_1^2$, so dass wir als Berührbedingung gerade

$$4\, c_1\, ((-c_1\, l_3 + c_2\, l_1 + c_3\, l_2)\, l_3 - c_4\, (l_1^2 + l_2^2)) + (c_2\, l_2 - c_3\, l_1)^2$$

erhalten. Dieses Polynom stimmt mit der Bedingung überein, die sich aus einer mehr geometrischen Argumentation ergibt: Eine Berührsituation liegt genau dann vor, wenn der Fußpunkt des Lots aus dem Kreismittelpunkt von c auf die Gerade l (im Allgemeinen ist das die Mitte der Sehne, die c aus l ausschneidet) selbst auf dem Kreis liegt:

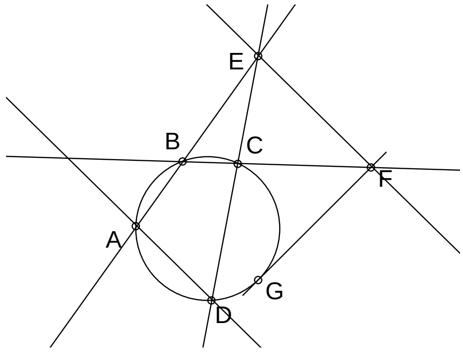
```
c:=[c1,c2,c3,c4]; l:=[l1,l2,l3];
on_circle(pedalpoint(circle_center(c),l),c);
```

Diese Bedingung können wir ebenfalls in eine neue Prozedur gießen.

```
is_cl_tangent:=proc(c,l)
  local c1,c2,c3,c4,l1,l2,l3;
  c1:=c[1]; c2:=c[2]; c3:=c[3]; c4:=c[4]; l1:=l[1]; l2:=l[2]; l3:=l[3];
  normal(4*c1*((-c1*l3+c2*l1+c3*l2)*l3-c4*(l1^2+l2^2))+(c2*l2-c3*l1)^2);
  end;
```

Damit können wir folgenden Satz beweisen:

> *Seien A, B, C, D vier Punkte auf einem Kreis c, E der Schnittpunkt von AB und CD, F der Schnittpunkt von BC und der Parallelen zu AD durch E und G der Berührpunkt der Tangente aus F an den Kreis c. Dann ist $|EF| = |FG|$.*



Hier ist ein entsprechendes Beweisschema

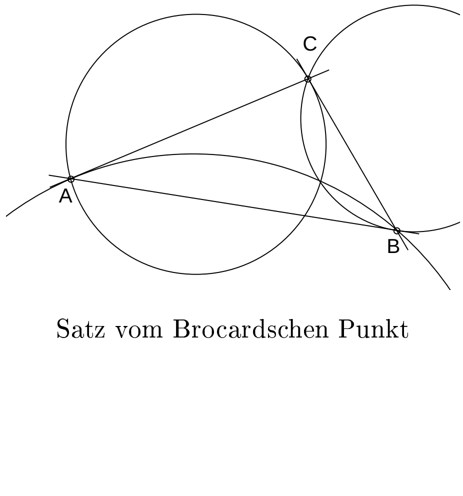
```
# Points
O_:=Point(0,0); A_:=Point(1,0);
# coordinates
B_:=circle_slider(O_,A_,u2); C_:=circle_slider(O_,A_,u3);
D_:=circle_slider(O_,A_,u4);
E_:=intersection_point(pp_line(B_,A_),pp_line(C_,D_));
F_:=intersection_point(par_line(E_,pp_line(A_,D_)), pp_line(B_,C_));
G_:=circle_slider(O_,A_,x1);
# polynomials
poly:=is_cl_tangent(pc_circle(O_,A_),pp_line(F_,G_));
# conclusion
con:=eq_dist(E_,F_,F_,G_);
```

Der folgende Vergleich zeigt, dass das Polynom *poly* im Wesentlichen das Quadrat des Polynoms *con* ist, woraus sich unmittelbar die Gültigkeit des Satzes ergibt:

```
factor(poly/4);
numer(con/(-4));
```

Wir können auch den **Satz vom Brocardschen Punkt** beweisen:

> *Zum Dreieck ABC betrachten wir den Kreis durch A, der BC in C berührt, den Kreis durch B, der AC in A berührt und den Kreis durch C, der AB in B berührt. Diese drei Kreise gehen durch einen gemeinsamen Punkt, den Brocardschen Punkt.*



Satz vom Brocardschen Punkt

Ein Beweisschema sieht wie folgt aus:

```
A_:=Point(0,0); B_:=Point(1,0); C_:=Point(u1,u2);
M1_:=Point(x1,x2); M2_:=Point(x3,x4); M3_:=Point(x5,x6);
P_:=Point(x7,x8);
# coordinates
c1_:=pc_circle(M1_,A_);
c2_:=pc_circle(M2_,B_);
c3_:=pc_circle(M3_,C_);
# polynomials
polys_:=[
  is_cl_tangent(c1_,pp_line(A_,C_)), on_circle(B_,c1_),
  is_cl_tangent(c2_,pp_line(A_,B_)), on_circle(C_,c2_),
  is_cl_tangent(c3_,pp_line(B_,C_)), on_circle(A_,c3_),
  on_circle(P_,c1_), on_circle(P_,c2_)];
# conclusion
con_:= on_circle(P_,c3_);
```

Die Beweisidee geht wieder vom Schnittpunkt P zweier der Kreise aus und versucht zu zeigen, dass P auch auf dem dritten Kreis liegt. Allerdings haben die beiden Kreise c_1 und c_2 neben P noch den Punkt B gemeinsam, so dass ähnliche Probleme zu überwinden sind wie beim Satz von Miquel. Gröbnerbasen helfen nicht so recht weiter

```
TO:=plex(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8);
gb:=gbasis(polys_,TO);
```

sondern erst der Gröbnerfaktorisierer

```
gbs:=convert(gsolve(polys_,{op(TO)}),list);
map(u->normalf(con_,u[1],u[2]),gbs);
```

Das Ergebnis zeigt, dass der Satz auf einer der beiden Komponenten richtig ist. Die andere Komponente entspricht dem Schnittpunkt $P = B$:

```
map(u->normalf(sqrdist(B_,P_),u[1],u[2]),gbs);
```

Spaltet man die Komponente $P = B$ ab, so bleibt ein Satz vom linearen Typ übrig:

```
sol:=solve({op(polys_)},{op(TO)});
map(u->normal(subs(u,con_)),[sol]);
```

Zu diesem Satz existiert auch ein konstruktives Beweisschema. Dazu überlegen wir uns, wie die Kreise c_i konstruiert werden können (das ist auch erforderlich, um ein Bild zum Satz zu zeichnen). A, B, C haben dieselben Koordinaten wie oben

```
# coordinates
M1_:=intersection_point(altitude(A_,A_,C_),p_bisector(A_,B_));
M2_:=intersection_point(altitude(B_,B_,A_),p_bisector(B_,C_));
M3_:=intersection_point(altitude(C_,C_,B_),p_bisector(A_,C_));
c1_:=pc_circle(M1_,A_);
c2_:=pc_circle(M2_,B_);
c3_:=pc_circle(M3_,C_);
P_:=other_cc_point(B_,c1_,c2_);
# conclusion
result_:= on_circle(P_,c3_);
```

4.3 Schnittpunktsätze und die Potenzgerade zweier Kreise

Bestimmen wir die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Kreise:

```
M1:=Point(0,0); A1:=Point(0,r1);
M2:=Point(d,0); A2:=Point(d,r2);
P:=Point(x1,x2);
polys:={on_circle(P,pc_circle(M1,A1)), on_circle(P,pc_circle(M2,A2))};
sol:=solve(polys,{x1,x2});
```

Wir sehen, dass sich die x_1-Koordinate rational ausdrücken lässt. Im Fall sich schneidender Kreise verläuft die Gerade $x = x_1$ offensichtlich durch die beiden Schnittpunkte der Kreise. Schneiden sich die beiden Kreise nicht, so ergeben sich imaginäre x_2-Koordinaten. Gleichwohl ist $x = x_1$ noch immer eine (reelle) Gerade durch diese beiden (imaginären) Schnittpunkte. Diese Gerade, die auf der Mittellinie der beiden Kreise senkrecht steht, bezeichnet man als *Potenzgerade* der beiden Kreise. Sie spielt eine wichtige Rolle in verschiedenen geometrischen Situationen.

Zunächst jedoch ergibt sich aus unseren Überlegungen, dass sich die Koordinaten der Potenzgeraden aus denen der beiden Kreise rational berechnen lassen, wir also Potenzgeraden in Sätzen vom konstruktiven Typ verwenden können. Eine solche lineare Gleichung ist im Ideal enthalten, das von den beiden Kreisgleichungen

$$p_1 = c_1\,(x_1^2 + x_2^2) + c_2\,x_1 + c_3\,x_2 + c_4$$
$$p_2 = d_1\,(x_1^2 + x_2^2) + d_2\,x_1 + d_3\,x_2 + d_4$$

erzeugt wird, die Linearform $d_1\,p_1 - c_1\,p_2$. Für die Berechnung der Koordinaten der Potenzgeraden ergibt sich damit folgende Formel:

```
radical_axis:=proc(c::Circle,d::Circle)
  Line(seq(normal(c[1]*d[i]-c[i]*d[1]), i=2..4 )) end;
```

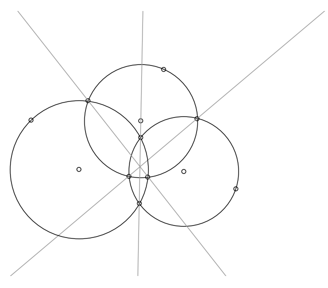
Haben die sich schneidenden Kreise c_i die Radien r_i, so können wir die Längen der Abschnitte d_i zwischen Mittelpunkt M_i und dem Schnittpunkt D der Potenzgeraden mit der Mittellinie bestimmen: $d_i^2 = r_i^2 - x^2$, wobei x die Länge der Strecke zwischen D und einem der Schnittpunkte der beiden Kreise ist. Ist P ein beliebiger Punkt auf der Potenzgeraden mit Abständen r_i' von den Kreismittelpunkten und x' von D, so gilt $r_i'^2 = d_i^2 + x'^2$ und folglich

$$r_1'^2 - r_1^2 = r_2'^2 - r_2^2.$$

Den Wert $r_1'^2 - r_1^2$ bezeichnet man auch als die *Potenz* des Punktes P bzgl. des Kreises c_1. Die Potenz ist genau dann positiv, wenn P außerhalb von c_1 liegt. In diesem Fall kann man diese Größe als Quadrat der Länge eines der Tangentenabschnitte von P an c_1 interpretieren.

Die Punkte auf der Potenzgeraden zweier Kreise lassen sich damit als geometrischer Ort all der Punkte charakterisieren, die bzgl. der beiden Kreisen gleiche Potenz (d.h. gleichlange Tangentenabschnitte, wenn außerhalb der Kreise gelegen) haben. Diese Charakterisierung hängt nicht davon ab, ob die Kreise sich schneiden.

Zu drei Kreisen kann man drei verschiedene Kreispaare und damit auch drei verschiedene Potenzgeraden bilden. Aus der eben gefundenen geometrischen Charakterisierung folgt sofort, dass diese drei Potenzgeraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Diesen Satz (vom konstruktiven Typ) können wir natürlich auch mechanisiert beweisen:



Drei sich schneidende Potenzgeraden

```
c:=[c1,c2,c3,c4];
d:=[d1,d2,d3,d4];
e:=[e1,e2,e3,e4];
is_concurrent(radical_axis(c,d), radical_axis(c,e), radical_axis(d,e));
```

Dieser Satz liefert auch eine einfache Möglichkeit, die Potenzgerade zweier sich nicht schneidender Kreise zu konstruieren: Zeichne einen dritten Kreis, der die beiden anderen Kreise schneidet. Die Potenzgeraden mit dem dritten Kreis (also die Verbindungsgeraden der Kreisschnittpunkte) schneiden sich in einem Punkt, der auf der Potenzgerade der beiden ursprünglichen Kreise liegt. Wir können diese Potenzgerade nun konstruieren, denn sie steht noch auf der Mittellinie ihrer beiden Kreise senkrecht.

Falls sich die beiden Kreise berühren, so ist die Potenzgerade genau die gemeinsame Tangente. Also können wir die Berührbedingung zweier Kreise auf die von Kreis und Gerade zurückführen:

```
is_cc_tangent(c1,c2)==is_cl_tangent(c1,radical_axis(c1,c2))
```

Damit können wir ein Beweisschema für eine interessante Eigenschaft des Feuerbaschen Kreises formulieren: Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks.

Wir vereinbaren zunächst die Punkte, die zur Spezifikation der Aufgabenstellung erforderlich sind.

```
A_:=Point(0,0);
B_:=Point(2,0);
C_:=Point(u1,u2);
# coordinates
M_:=intersection_point(p_bisector(A_,B_), p_bisector(B_,C_));
H_:=intersection_point(altitude(A_,B_,C_),altitude(B_,C_,A_));
N_:=midpoint(M_,H_);
c1_:=pc_circle(N_,midpoint(A_,B_));
```

Für den Inkreis und die drei Ankreise starten wir mit dem jeweiligen Mittelpunkt P, dessen Koordinaten (x_1, x_2) die Bedingungen erfüllt, dass P auf zwei der Winkelhalbierendenpaare liegt (und damit automatisch auf dem dritten Paar). Zur Definition des Kreises brauchen wir noch einen Punkt Q auf der Peripherie, wofür wir das Lot aus P auf AB verwenden. Zwar hätten wir auch gleich $Q = (x_1, 0)$ schreiben können, aber das ist nur für die spezielle Wahl der Koordinaten richtig und damit das Beweisschema nicht für andere Zwecke verwendbar.

```
P_:=Point(x1,x2);
Q_:=pedalpoint(P_,pp_line(A_,B_));
# polynomials
polys:=[on_bisector(P_,A_,B_,C_), on_bisector(P_,B_,C_,A_)];
# conclusion
con:=is_cc_tangent(pc_circle(P_,Q_),c1_);
```

Den Beweis können wir nun über den Gröbnerbasisansatz leicht führen:

```
with(Groebner):
TO:=plex(x1,x2);
gb:=gbasis(polys,TO);
normalf(con,gb,TO);
```

5 Aufgaben

Beweisen Sie die folgenden Geometrietheoreme durch Zurückführung auf Sätze vom konstruktiven Typ oder vom Gleichungstyp. Versuchen Sie, ob sie auch elementargeometrische Beweise finden können.

1. Beweisen Sie den Satz vom Höhenfußpunktdreieck: Ist $\Delta\, ABC$ ein Dreieck mit den Höhenfußpunkten D, E, F, so wird der Winkel $\angle\, DEF$ von der Höhe durch E halbiert.

   Finden Sie auch die entsprechenden Nicht-Degenerations-Bedingungen.

2. Zeigen Sie, dass die 6 Fußpunkte der Lote von den Höhenfußpunkten D, E, F auf die gegenüberliegenden Dreiecksseiten (oder deren Verlängerungen) auf einem gemeinsamen Kreis, dem *Taylorkreis*, liegen.

3. Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes von der Simsonschen Geraden: Sind die Lotfußpunkte R, S, T von einem Punkt P auf die Seiten des Dreiecks $\Delta\, ABC$ oder deren Verlängerungen kollinear, so liegt P auf dem Umkreis des Dreiecks.

4. Beweisen Sie auch folgende Verallgemeinerung:
   Ist M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta\, ABC$ und P, R, S, T wie eben, so hängt der Flächeninhalt $F(\Delta\, RST)$ nur von $|MP|$ ab. Finden Sie eine genaue Formel für diesen Flächeninhalt.

5. Beweisen Sie die Flächeninhaltsformel

   $$F(\Delta\, ABC) = \frac{a\, b\, c}{4\, R},$$

   wobei a, b, c die Seitenlängen und R der Umkreisradius ist.

6. Beweisen Sie die Flächeninhaltsformel

   $$F(\Delta\, ABC) = \rho \cdot \frac{a+b+c}{2},$$

   wobei a, b, c die Seitenlängen und ρ der Inkreisradius ist.

   Wie ist die Formel für die Ankreisradien ρ_A, ρ_B und ρ_C zu modifizieren?

7. Gegeben sei ein Kreis k, die Tangente von B an diesen Kreis, A der Berührungspunkt, M der Mittelpunkt von AB und D ein Punkt auf dem Kreis k. C sei der Schnittpunkt von DM mit k, E der Schnittpunkt von BD mit k und F der Schnittpunkt von BC mit k. Zeigen Sie, dass EF parallel zu AB ist.

8. Beweisen Sie, dass die Lote durch die drei Ankreiszentren auf die jeweilige Dreiecksseite durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Literatur

[1] S.-C. Chou. Proving elementary geometry theorems using Wu's algorithm. In *Contemp. Math.*, volume 19, pages 243 – 286. AMS, Providence, Rhode Island, 1984.

[2] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer. *Geometry revisted*. Toronto – New York, 1967.

[3] The GeoProver package for mechanized (plane) geometry theorem proving, version 1.3a, 2003. see `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe`.

[4] The SymbolicData project, 2000–2002. see `http://www.symbolicdata.org`.

[5] W.-T. Wu. *Mechanical Theorem Proving in Geometries*. Number 1 in Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer, Wien, 1994.