

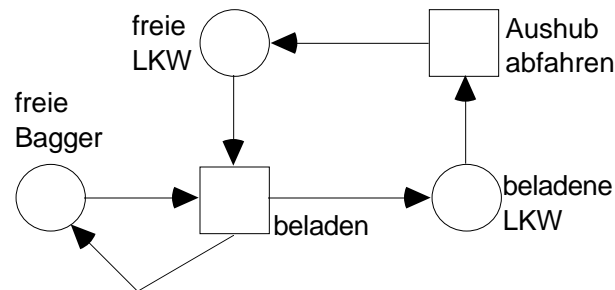
## Statistische Eigenschaften bei Petrinetzen

### 1. Einleitung

Ein Grundgedanke bei Petrinetzen besteht darin, auf eine allgemeine, durchgängige und fest verheftete Abhängigkeit und Synchronität aller Geschehnisse und Ereignisse in einem Gebilde zu verzichten. Ein zweiter Grundgedanke ist, das betrachtete Gebilde samt seinem Geschehen in scharf von einander abgegrenzte Stellen und Einheiten sowie Ereignisse und Schritte zu zerlegen.

Am Ende eines Schrittes haben gewisse Einheiten einen Zustand, d.h. eine deutlich meßbare Eigenschaft verändert. Nächste Schritte des Geschehens, so stellt man es sich vor, hängen nur von den erreichten und deutlich unterscheidbaren oder unterschiedenen Zuständen der ebenso deutlich unterscheidbaren oder unterschiedenen Einheiten ab. Es ist selbstredend, daß Einheiten und ihre Zustände nicht willkürlich gewählt werden können, auch wenn in ihrer Auswahl manchmal bloß eine gewisse vom Modellbildner gesehene Zweckmäßigkeit liegen mag.

Ein Beispiel gibt eine Arbeitskette aus Baggern und LKWs, die an eine Baugrube fahren, dort beladen werden und den Aushub wegfahren.<sup>1</sup>



In dieser Skizze ist das Geschehen in einer Baugrube extrem vereinfacht; es können aber weitere Einzelheiten ergänzt werden, z.B. das Rangieren in der Grube, Fahrerwechsel, Pausen, die Verständigung zwischen Baggerführer und LKW-Fahrer usw. Bewegungen werden nur als ganzes dargestellt werden können, nämlich "fährt los", "baggert", "entlädt" usw. Sie können weiter in endlich viele Abschnitte untergliedert werden, aber natürlich nicht in eine unendliche Summe differentiell kleiner Schritte.

Weitere Beispiele liefern die Protokolle der Datenübermittlung. Stellen, die unabhängig voneinander agieren, sollen einander signalisieren können, was sie voneinander wollen. Es werden Nachrichten übermittelt von der Art "ich will senden, kannst du empfangen", "ja, ich kann", "das ist die eigentliche Nachricht", "ich habe eine Nachricht ohne Prüffehler erhalten", "in Block sowieso war ein Fehler", "ich wiederhole" usw. Es werden zeitlich (und räumlich) ausgedehnte Signale übertragen, aus denen die genannten Nachrichten abzulesen sind. Diese sind im allgemeinen binär verschlüsselt, d.h. durch eine Bitkombination dargestellt. Sind im Signal einzelne Bits unterschieden, d.h. erkannt worden, dann können die weiteren Abläufe und Abhängigkeiten des Protokolls in einem Petrinetz dargestellt werden. Die Wandlung zwischen einem analogen,

<sup>1</sup> Volkhard Franz, Einsatzmöglichkeiten der Petrinetze bei der Planung und Steuerung komplexer Bauprozesse, Petri-Netze in der Praxis, Seminar am 3. und 4. 12. 90, Bonn, Veranstalter GMD

elektrischen Signal und den Bits, die es darstellen soll, wird durch Modems geleistet; in Petrinetzen wird diese Wandlung mit ihren Problemen (bisher) nicht modelliert.

Die Art, ein Geschehen in einem Petrinetze darzustellen, entspricht etwa dem in der Gasdynamik, wenn man zur Herleitung des Boyle-Marionetteschen Gesetzes volumenlose punkt- oder stabförmige Moleküle und ideale Stöße zwischen diesen annimmt. Im idealen Stoß bleiben die feinen Vorgänge bei der Annäherung zweier Moleküle außer Betracht. Ein auf einer Platte hüpfender Ball mag ein weiteres Beispiel geben: Dieser Ball kann zwei Stellen einnehmen, den Höhepunkt beim Springen und den Berührungspunkt auf der Platte; zwischen beiden Stellen wechselt er. In diesem knappen Bild ist von den inneren Mechanismen, die den Bewegungsablauf während des Wechsels bestimmen, nämlich dem Fallgesetz, der Luftreibung und ziemlich verwickelten Abläufen beim Aufprall völlig abgesehen. Es dürfte nach aller Erfahrung richtig sein, daß auch die Einführung weiterer Zwischenstellen, die Zerlegung des Balls in finite Elemente oder in seine Moleküle oder gar Elementarteilchen, die Benutzung doppelt genauer Gleitkommaarithmetik usw. nicht zur vollen Wahrheit führen, wohl aber werden sich auf bestimmte Fragen mit der Wirklichkeit besser übereinstimmende Antworten ergeben.

Die praktischen Schwierigkeiten, Einheiten, Zustände und Schritte in einem Geschehen zu unterscheiden, sind ganz unterschiedlich je nach dem Zweck, der mit dem Modell verfolgt wird, und je nach dem betrachteten Gebiet. Die klassische Pendeluhr ist handwerklich aus einzelnen Teilen aufgebaut. Es ist gar keine Frage mehr, welches hier die Einheiten sein könnten. Der Anker sorgt für das Zerschneiden der kontinuierlichen Pendelbewegung in einzelne Schritte, was seinerseits den Ablauf im Räderwerk zur Folge hat. Daß der Anker und die Lager der Zahnräder verschleifen und den Gang der Uhr ändern, wird erst durch einen Vergleich mit anderen Vorgängen sichtbar, seien es andere Uhren, sei es die Ur-uhr, nämlich die um die Sonne kreisende Erde und die scheinbare Bewegung des Fixsternhimmels. Der Verschleiß im Innern der Uhr oder Abweichungen der Bauteile von einem Muster können nur erkannt werden, wenn sie sich unter die Lupe nehmen lassen, d.h. wenn sie sich anderweitig beobachten und nachmessen lassen, d.h. wenn sie in ein neues Geschehen eingebaut werden können. Der Punkt, bis zu dem ein Ding, das wie eine Uhr erscheint, auch als solche akzeptiert, angenommen wird, ist ex-akt, d.h. er ist ausgehandelt, ausgearbeitet, zu Ende gebracht, fertig-gestellt, alles jeweils in einem ganz praktischen Sinn.

Was hier zur anschaulichen Pendeluhr gesagt wurde, gilt ähnlich für alle klassischen Maschinen, seien es eine Dampfmaschine, ein Ottomotor, ein Jaquard-Webstuhl oder ein elektromotorischer 5-Kanalfern-schreiber. Der Wert der technischen Erfindung liegt in diesen Beispielen gerade darin, einen Vorrat oder eine kontinuierlich anliegende Größe (Dampf, Treibstoff, Gewicht, elektrisches Signal) häppchenweise in das weitere Geschehen einzubringen, teilweise wieder in einen glatten Ablauf umzusetzen und damit die besondere Wirkungsweise der Maschine zu ermöglichen. Im Modell stellt sich diese Zerlegung sehr ideal dar, wie etwa im Carnotschen Kreisprozeß oder im Start-Stopschritt-Verfahren des Fernschreibers. In der Praxis sind aber Schliff und Justierung der Baugruppen (Ventile, Übertragungsgestänge, Federn) die Kunst, um das einwandfreie Arbeiten der Maschine zu gewährleisten.

Was in der Mechanik noch anschaulich ist und handwerklich gemeistert werden kann, bedarf bei winzigen Gegenständen wie Molekülen, Atomen, Elektronen und bei nicht mechanischen, also

elektronischen Vorgängen eigener Methoden, die nicht wie sonst vernachlässigbar sind, weil sie Facharbeiter in der Montage schon irgendwie beherrschen. Bei hochintegrierten elektronischen Schaltungen tritt diese Aufgabe besonders hervor. Bei der Pendeluhr spielen die genauen Bewegungsabläufe im Räderwerk nach dem jeweiligen Anstoß durch den Anker und die auftretenden Kräfte - bedingt durch Massen, Trägheitsmomente und Reibung - zwar die bestimmende Rolle für den genauen Gang der Uhr, sie werden aber nicht im einzelnen ermittelt: Die Uhr konnte ohne deren genaue Kenntnis gebaut werden. Bei größeren Maschinen, auch beim genannten Fernschreiber ist eine gewisse Kenntnis dieser Größen unvermeidlich, wenn das Gerät funktionieren und nicht zu schnell zu Bruch gehen sollte. Bei hochintegrierten, elektronischen Schaltungen hängen Dimensionierung und Platzierung von Bauelementen, Laufzeiten, Dauern und Deformierung von Impulsen so eng zusammen, daß nur mit hinreichender Kenntnis der Flüsse in der Schaltung das Schalten in der Schaltung wie vorgesehen verwirklicht werden kann. Die Schaltung wird hierzu auf der Register- und Logikebene ebenso wie auf der Transistor- und Analogenebene simuliert, wobei es gilt, die Ergebnisse der Simulation verschiedener Ebenen zusammenzuführen.<sup>2</sup> Der Transistor soll in einer analogen Welt von ausgedehnten Signalen als Schalter wirken, d.h. einen scharfen Schnitt ziehen, ein Vorgang, der nicht auf einen diracsitzen Schlag passiert, sondern eine Weile andauert und Energie verbraucht. Soll ein Flipflop durch einen Impuls in einen bestimmten von zwei Zuständen gebracht werden, so ist das digital leicht zu notieren. Praktisch stellt man fest, daß das Flipflop in Wahrheit tri- statt bistabil ist. Bei einem mittleren Impuls kippt es aus seinem Ausgangszustand und verharrt in einem mittleren, ohne den gewollten Endzustand zu erreichen. Seine Reaktion auf einen Abfrageimpuls wird danach höchst unbestimmt, mal so mal so.<sup>3</sup> Bei Darstellung des Flipflops durch Differentialgleichungen führt dieses Problem auf die Steuer- oder Kontrollierbarkeit des Systems der Differentialgleichungen, das mit subtilen algebraischen Mitteln - ohne Errechnen beispielhafter Lösungskurven - angegangen werden kann.<sup>4</sup> Errechnete Kurven müßten von einem Menschen ebenso als brauchbar oder unbrauchbar bewertet werden, wie ein Flipflop auf einen Impuls konkret reagiert. Die Aufgabe, zu unterscheiden, wäre nur verlagert, nicht gelöst. Prinzipielle Fragen bei solchen Unterscheidungsaufgaben sind nicht zu unterschätzen.<sup>5</sup> Im Mikroskopischen, in der Quantenphysik wurde die Unschärferelation gefunden. Aber auch bei faßlicheren Dingen wie z.B. einem Joystick, mit dem auf einem Bildschirm ein Cursor bewegt wird, muß eine solche Aufgabe gelöst werden. Der Geber im Joystick darf bei kleinen Bewegungen keine großen Sprünge

---

<sup>2</sup> Andreas Oczko, Christel Oszko, Putting Different Simulation Models Together - The Simulation Configuration Language VHDL/S, in ... ,S. 95- 109

<sup>3</sup> Lindsay Kleeman, Antonio Cantoni, Metastable Behavior in Digital Systems, IEEE Design & Test of Computers, Dec 1987, S. 4-19

<sup>4</sup> C.F. Pommaret, Partial Differential Equations and Group Theory, Lecture Notes, Advanced Course, ERCIM GMD INRIA, 6.-10 April 1992

<sup>5</sup> C.A. Petri, Petri Nets: Central Models and their Properties, in [NETS86 Part I], S.

C.A. Petri, E. Smith, Concurrency and Continuity, in [NETS87], S.

Einar Smith, Kausalität und Temporalität bei der Modellbildung, in Simulationstechnik, Proceedings, Springer 1987, S.127-134

Einar Smith, On Net Systems Generated by Process Foldings, Fachberichte Informatik 6/91, Universität Koblenz-Landau

behaupten, was durch eine dem Cray- statt dem Binärcode entsprechende Anordnung der Schleifkontakte bewerkstelligt wird; die Anzahl der Kontaktlamellen bestimmt die Genauigkeit der Unterscheidung.

Ist das analoge Verhalten einer Schaltung zu untersuchen, so braucht man ein Modell der vorkommenden Transistoren. Dieses Modell stellt sich als eine Schar von Kennlinien dar, abhängig von fließenden Strömen und anliegenden Spannungen sowie von Abmessungen und Dotierungen des Materials. Das Modell wird teils unmittelbar empirisch durch Ausmessen einer Serie von Transistoren, teils theoretisch und mittelbar empirisch aufgestellt. Im zweiten Fall wird aus Modellen der Festkörperphysik und des Herstellungsprozesses sowie aus Experimenten mit Halbleiterstrukturen, wie sie in Transistoren verwendet werden, das Modell des Transistors abgeleitet. <sup>6</sup> Je geringer die Abmessungen der Transistoren werden - bei Kurzkanaltransistoren also -, umso mehr muß die Quantenphysik berücksichtigt werden, umso weniger können statistische Glättungen z.B. der Elektronenbewegungen im Kristallgitter unbesehen aus früheren Modellen übernommen werden. <sup>7</sup> Bei extremer Verkleinerung kann ein Transistor nur mehr quantenphysikalisch verstanden werden, der nicht mehr in einem klassischen Kontinuum eingebettet ist. An einem Schaltimpuls sind nur noch wenige Elektronen beteiligt. Wie groß ein Transistor mindestens sein muß, um als Schalter einsetzbar zu bleiben und um damit Flipflops und eine verlässliche Logik bauen zu können, ist offen. Das elektrodynamische Modell der Schaltung, das letztlich an den Maxwell'schen Gleichungen mit den "Raum" erfüllenden Feldern<sup>8</sup> festmacht, müßte durch ein quantenelektrodynamisches ersetzt werden. Nicht nur die Simulationsaufgabe driftet hierbei in ungeahnte Schwierigkeiten ab. Die Vorstellung eines nur durch differenzierbare Feldgrößen strukturierten Kontinuums - noch brauchbar, wenn locker  $10^{10}$  Atome beteiligt sind -, wird untauglich, wenn es nur mehr ca.  $10^5$  sind.

Die ideale mathematische Betrachtung der Differentialrechnung wird an dieser Stelle durch die Wirklichkeit eingeholt, wie es selbst ein Leibniz schon voraussah,<sup>9</sup> obgleich er die stofflichen

---

<sup>6</sup> Wolfgang Joppich, Mehrgitterverfahren für Diffusionsprobleme der Prozeßsimulation, Berichte der Gmd, Nr. 189, R. Oldenbourg Verlag, München Wien 1991

<sup>7</sup> Axel Emunds, Dynamische und kinetische Eigenschaften eines quasi 2-dimensionalen Elektronengases, Dissertation an der Fakultät für Elektrotechnik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 1990

<sup>8</sup> E.J. Post Formal Structure of Electromagnetics, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1962

<sup>9</sup> "Obgleich daher die mathematischen Betrachtungen ideal sind, raubt ihnen dieser Umstand doch nichts von ihrer Nützlichkeit, weil die wirklichen Dinge nicht von ihren Regeln abweichen können, und man darf mit Grund sagen, daß eben hierin die Wirklichkeit der Erscheinungen besteht, die sie von den Träumen unterscheidet. Indessen bedürfen die Mathematiker durchaus keiner metaphysischen Untersuchungen, noch brauchen sie sich um das wirkliche Dasein der Punkte, der untheilbaren Dinge, der unendlichkleinen Größen und der im buchstäblichen Sinne unendlichen Größen Sorge zu machen.(...) Bei den Mathematikern (reicht es) für die Schärfe der Beweisführung (hin), wenn sie statt der unendlich kleinen Größen so kleine annehmen, wie nöthig sind, um zu zeigen, daß der Irrthum geringer ist als der, welchen ein Gegner bestimmen wollte, und daß folglich überhaupt kein solcher festzustellen ist, so daß, wenn die buchstäblichen unendlich kleinen Größen, welche bei der Verminderung der Feststellungen des Irrthums den Beschluß machen, nur gleich imaginären Wurzeln wären, dieser Umstand die Infinitesimalrechnung oder Rechnung mit den Differenzen und Summen durchaus nicht schädigen würde. Ich habe diese Rechnung vorgeschlagen, und sie ist von ausgezeichneten Mathematikern mit großem Nutzen angewandt worden, da man dabei nur aus Mangel an Verständnis oder Uebung irren kann, denn sie trägt den Beweis für ihre Richtigkeit in sich selbst." (Leibniz, Entgegnung auf die in der zweiten Auflage des Bayleschen Wörterbuchs enthaltenen Bemerkungen über das System der vorbestimmten Harmonie, in Kleinere philosophische Schriften, Seite 122 ff, Hrg von R. Habs, Philipp Reclam jun., Leipzig o.J., ca.1890)

Atome des Demokrit nicht anerkannte. Der Stoff galt ihm für ohne Ende teilbar, Atome konnten ihm durch kein Experiment vorgehalten werden.<sup>10</sup> Zudem waren Leibniz Impuls und Energie noch nicht in aller Klarheit als zwei verschiedene, neben der Masse eine Bewegung bestimmende Größen bekannt, so daß er Raum zu metaphysischen Spekulationen fand.<sup>11</sup> Wieweit diese und andere Spekulationen jener Zeit bis heute fortwirken, sei dahingestellt.

Ein anderes Gebiet, in dem man auf ähnliche Probleme wie bei der Halbleitermodellierung stößt, ist die molekulare Bioinformatik. Um Molekülstrukturen zu beschreiben und anhand verwendeter Bausteine vorherzusagen, wird u.a. die im Kontinuum angesiedelte Energiefunktion der Atome und einzelnen Radikale verwendet. Berechnet wird damit ein scharf von andern abgrenzbares Gebilde - ein Protein -, das auch scharf abgrenzbare Wirkungen hat, nämlich die Herstellung weiterer bestimmter Moleküle im Stoffwechsel einer lebenden Zelle. Das Protein entsteht nicht auf einen Schlag in einer Zelle, sondern durch das Zusammentreffen und -wachsen einzelner Bausteine, wobei Energie in Form von Bewegung der Beteiligten frei wird und so das Zusammenstoßen mit den weiteren benötigten Bausteinen möglich wird. (Makroskopisch äußern sich diese Bewegungen als Wärme.) Die biochemische Wirkung eines Proteins ist eng mit seiner räumlichen Gestalt verbunden, es muß wie ein Schlüssel zum Rezeptor "passen". Diese Wirkungen werden nun nicht als im Kontinuum liegende Veränderungen von elektrischen Feldern und Potentialen verstanden, die irgendwelche Bewegungen von Atomen und Elektronen nachsichziehen, sondern als die "plötzliche" Herstellung eines bestimmten weiteren Makromoleküls.<sup>12</sup> Neben der Energiefunktion werden auch diskrete Beschreibungen von Proteinstücken verwendet, um die diskrete Gestalt eines Proteins zu finden. Hierzu werden die Stücke aufgrund statistischen Materials "probeweise" nach diskreten Regeln zusammengefügt. Analyse, Modellierung, Voraussage und Optimierung molekularer Strukturen ist eine der "challenge classes" der Bioinformatik. Bei der Nutzung der Energiefunktion steht im Hintergrund, daß ein Protein durch Bewegung entsteht, beim Zusammenpassen von Teilen ist diese natürliche Bewegung ersetzt durch ein diskretes, rechnerisches Ausprobieren, das diese natürliche Dynamik nicht mehr widerspiegelt. Es fragt sich, ob das diskrete Verfahren, bei dem z.B. Graphen benutzt werden, so verändert werden kann, daß das Zusammenpassen von Teilen das ursprüngliche Zusammenkommen darstellt. Es fragt sich also, ob und wieweit sich die im Kontinuum angesiedelte Dynamik der Energiefunktion in ihren wesentlichen Zügen in das Diskrete verlagern läßt, ohne dabei nur Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen zu ersetzen.<sup>13</sup>

Wer heute die Möglichkeiten der Halbleitertechnik oder der molekularen Bioinformatik voll ausnutzen möchte, muß Wege finden, beide Methoden, die digitale, diskrete, atomistische, kombinatorische einerseits und die kontinuierliche, beliebig fein teilbare, fließende, differentielle

---

<sup>10</sup> a.a.O., Einleitung von R. Habs, S. 15 u. 16

<sup>11</sup> Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch kritisch dargestellt, reprografischer Nachdruck der 9. Auflage, Leipzig 1933, Wiss. Buchges. 1991 Darmstadt (1. Auflage 1883 bei Brockhaus), S. 287-289, S. 310-331

<sup>12</sup> Hierin liegt eine ähnliche Verkürzung, wie in dem Satz, man schließe mit einem Schlüssel ein Tür auf, wenn man davon absieht, daß der Schlüssel ins Schlüsselloch gesteckt und gedreht werden muß, daß er dabei Sperrriegel und Federn zur Seite schiebt und dann noch eine gehörige Portion Energie aufgebracht werden muß, um die Tür aufzustoßen und um sie wieder zu stoppen.

<sup>13</sup> Strategiekonzept Molekulare Bioinformatik, Hrg. Bundesministerium für Forschung und Technologie - Pressereferat, Bonn, den 4. Sept. 1992, S. 19 - 24

miteinander formal sauber zu verbinden. Würde man sich nur auf die diskrete Seite schlagen, würde man auf den ganzen nützlichen Apparat der Differentialrechnung verzichten und müßte erklären, wie Bewegung aus Ruhe entsteht, bzw, wieso endlich viele Schritte, deren keiner eine Zeit dauert, zusammen eine Dauer liefern.<sup>14</sup> Auch bliebe es nicht aus, die Welt als ganz und gar endlich - endliche viele Teilchen, Zustände und Punkte - aufzufassen, womit man bei einer periodischen Geschichte einschließlich der politischen landet. Bewegt man sich nur im Kontinuum, so wird die Welt diffus. Man müßte erklären, wie es in diesem Kontinuum zu den beobachtbaren Individuen, den Gegenständen und auch den Atomen kommt. Ein Digitalrechner wäre in dieser Philosophie ein schwieriges Ding.

Es scheint, daß mit der Algebra eine Brücke zwischen beidem gezogen wird. Mit Hilfe der (linearen) Algebra einschließlich der Theorie von Galois und von Lieschen Gruppen lassen sich korrekt globale Eigenschaften von Systemen partieller Differentialgleichungen feststellen. Die Verfahren sind computerisierbar.<sup>4</sup> Mittels systematischer Erweiterungen führt die Algebra von den diskreten, natürlichen Zahlen über die ganzen und die rationalen Zahlen zum Kontinuum der reellen und komplexen Zahlen. Petrinetze, mit denen im Diskreten eine Dynamik darstellbar ist, sind weitgehend mit linearer Algebra behandelbar. Es bietet sich an, für Petrinetze den linear-algebraischen Weg konsequent zu beschreiten, um sich die Ergebnisse der Algebra gebündelt verfügbar zu machen, wenn man mit Petrinetzen natürliche oder technische Prozesse modellieren will.

Bei dem Versuch, physikalische Vorgänge mit Petrinetzen nachzubilden, müssen sich Eigenschaften, die bereits in der mathematischen Physik modelliert sind, auch in den Petrinetzen wiederfinden. Einen möglichen Einsatz von Petrinetzen in der Physik sollte man dort prüfen, wo bereits auf Teilchen fußende Modelle wie z. B. in der statistischen Gastheorie vorliegen. Sollen in einem Petrinetz Aktionen, Wechselwirkungen oder Bewegungen einer Vielzahl von Teilchen dargestellt werden, so muß es im großen und ganzen auch statistische Aussagen zulassen, um ein Bild der "stabilen Häufigkeitserscheinungen in der Natur " zu vermitteln, wie sie in der Ergodentheorie mathematisch dargestellt werden. Die Ergodentheorie liefert für bestimmte Systeme partieller Differentialgleichungen (z.B. die Bewegungsgleichungen) vermittels Spektren die globale Aussage, daß mit diesen Differentialgleichungen verbindbare Strömungen "mischend" sind und letztlich Statistiken zulassen<sup>15, 16</sup>.

## 2. Stellen-Transitionsnetze

**Definition 2.1** Ein Tripel  $N = (S, T, R)$  mit den Eigenschaften

$S$  und  $T$  sind höchstens abzählbare Mengen<sup>17</sup>

---

<sup>14</sup> "Hiermit wären wir dann den sich selbst gleichen Urzustand für einige Zeit glücklich los", eine der vielen sarkastischen Bemerkungen Engels zu diesem Thema in Anti-Dühring, Nachdruck der 3. Auflage, Hrg. von Hollitscher, Verlag Marxistische Blätter, Frankfurt 1971, S. 54

<sup>15</sup> E. Hopf, Ergodentheorie, Verlag von Julius Springer, Berlin 1937. Das Zitat ist der Einleitung entnommen.

<sup>16</sup> P. Walters, Ergodic Theory, ,

<sup>17</sup> Werden überabzählbare Mengen zugelassen, so werden ein nicht-diskreter Verlaufs begriff (s. Definition 3.1) und ein Integralbegriff zur Darstellung von Markenerhaltung (s. Definition 4.1 und 4.5) nicht zu vermeiden sein.

$R \in \mathbf{Z}^{S \times T} \subset \mathbf{Q}^{S \times T}$ , d.h.  $R$  hat die Form

$$R = (R_s^t)_{(s,t) \in S \times T}, R_s^t \in \mathbf{Z},$$

heißt *Stellen-Transitionsnetz*, *S-T-Netz* oder auch kurz *Netz*.  $S$  heißt *Stellenmenge*,  $T$  *Transitionenmenge* und  $R$  *Schaltregel*.<sup>18</sup> Ein Netz heißt *endlich*, wenn  $S$  und  $T$  es sind, es heißt *S-(T-) endlich*, wenn  $S$  ( $T$ ) es ist.

$\mathbf{Q}^S$ ,  $\mathbf{Q}^T$  und  $\mathbf{Q}^{S \times T}$  sind Vektorräume. Somit heißen  $R_s = (R_s^t)_{t \in T}$  *Stellenvektor* der Stelle  $s$  und  $R^t = (R_s^t)_{s \in S}$  *Transitionenvektor* der Transition  $t$ . Wenn keine Verwechslung möglich ist, wird eine Stelle auch mit ihrem Stellenvektor und eine Transition mit ihrem Transitionenvektor gleichgesetzt.<sup>19</sup>

Eine endliche Menge  $V$  von Vektoren  $v = (v_x)_{x \in X} \in \mathbf{Q}^X$ ,  $X$  eine Menge, heißt *linear unabhängig*, wenn aus

$$\sum_{v \in V} a_v v = 0, \text{ alle } a_v \in \mathbf{Q},$$

folgt  $a_v = 0$  für alle  $v \in V$ . Dabei ist die vorangehende Vektorgleichung eigentlich eine Familie von Gleichungen, nämlich

$$\sum_{v \in V} a_v v_x = 0 \text{ für alle } x \in X,$$

die nebeneinander "gleichzeitig" bestehen. Eine abzählbare Menge  $V$  von Vektoren  $v = (v_x)_{x \in X}$ ,  $v \in \mathbf{Q}^X$  heißt *linear unabhängig*, wenn jede endliche Teilmenge es ist.

**Voraussetzung 2.2** Im Folgenden wird vorausgesetzt, daß kein Stellen- und Transitionenvektor der Nullvektor ist.

**Notation 2.3** Die in den Beispielen verwendeten Mengen haben durch allgemeine Übereinkunft (z.B.  $\{a,b,c, \dots\}$ ) oder aufgrund ihrer Herleitung (z.B.  $\{1,2,3, \dots\}$ ) eine Ordnung. Bei textlicher Darstellung werden die Transitionen entsprechend der Ordnung in  $T$  von rechts nach links, die Stellen entsprechend der Ordnung in  $S$  von oben nach unten notiert. Die Schaltregel stellt sich so als Matrix mit  $|T|$  Spalten und  $|S|$  Zeilen dar. Diese Ordnungen dienen in der Regel nur zur Vereinfachung der textlichen Notation.

Gezeichnet werden Netze so, daß Stellen mit Kreisen und Transitionen mit Quadraten angegeben und entsprechend beschriftet werden. Für eine negative Komponente  $R_s^t$  wird ein Pfeil von der Stelle  $s$  nach der Transition  $t$  gezogen, für eine positive umgekehrt; ist die Komponente = 0, so werden  $s$  und  $t$  nicht verbunden.

**Beispiel 2.4** Das Netz

$$\left( \{a,b\}, \{x,y,z\}, \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3 \\ 4, & -5, & 6 \end{pmatrix} \right)$$

hat die Stellenvektoren

<sup>18</sup> Im Vergleich zu anderen in der Literatur verwendeten Definitionen ist in diese nur das nötigste gesteckt. Die Konsequenzen anderer Definitionen auf die nachfolgenden Sätze werden in Abschnitt „ beschrieben.

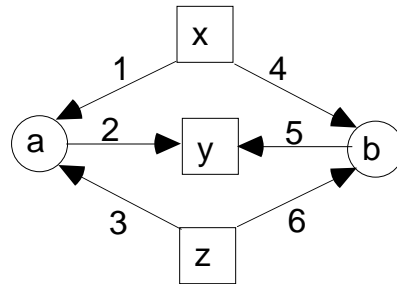
<sup>19</sup> Da  $\mathbf{Z}$  ein Hauptidealring ist, kann  $R$  als Matrix über einem Hauptidealring aufgefaßt werden. S. z.B. W. Gröbner, Matrizenrechnung, BI Hochschultaschenbücher, Mannheim 1966, S. 181 f.

$$R_a = (1, -2, 3) \text{ und } R_b = (4, -5, 6)$$

sowie die Transitionenvektoren

$$R^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, R^y = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } R^z = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Gezeichnet wird es so



**Satz 2.5** Die Anzahl linear unabhängiger Transitionen und linear unabhängiger Stellen eines Netzes  $(S, T, R)$  ist durch  $\min(|S|, |T|)$  beschränkt.

**Beweis:** Für  $|T| < |S|$  ist  $T$  endlich, das Netz hat  $|T|$  Transitionenvektoren. Diese können linear unabhängig sein oder nicht. Ein Stellenvektor hat die Form  $R_s = (R_s^t)_{t \in T}$ , d.h. er ist  $|T|$ -dimensional. Somit gibt es höchstens  $|T|$  linear unabhängige Stellenvektoren. Entsprechendes gilt für  $|S| < |T|$ .

Sind  $S$  und  $T$  abzählbar, so gibt es jeweils höchstens abzählbar viele linear unabhängige Stellen und Transitionen, gleichgültig welche der sich anbietenden Definitionen für lineare Unabhängigkeit man hierbei wählt. Mit der obigen Definition ist die Behauptung offensichtlich. •

**Hauptsatz 2.6** In einem Netz  $N = (S, T, R)$  ist das Maximum der Anzahl linear unabhängiger Stellen gleich derjenigen linear unabhängiger Transitionen, kurz

$$\max |S_u| = \max |T_u|,$$

wobei  $S_u$ , bzw.  $T_u$  Mengen linear unabhängiger Stellen, bzw. Transitionen sind.

Ist das Netz  $S$ - oder  $T$ -endlich, so ist das Maximum endlich, andernfalls kann es die Abzählbarkeit sein.

Zunächst folgende

**Definition 2.7** Eine endliche Menge  $S_u \subset S$  ( $T_u \subset T$ ) mit einer maximalen Anzahl linear unabhängiger Stellen (Transitionen) heißt  $S$ -Basis ( $T$ -Basis) von  $N$ .

**Beweis** von Satz 2.6 Für ein endliches Netz, d.h.  $S$  und  $T$  endlich, ergibt sich die Behauptung aus dem bekannten Satz der Algebra, wonach der Spaltenrang einer Matrix - hier  $R$  - gleich ihrem Zeilenrang ist.<sup>20</sup>

Das Netz sei  $T$ -endlich. (Der  $S$ -endliche Fall wird analog bewiesen.) Nach Satz 2.5 ist jede Menge linear unabhängiger Stellenvektoren endlich. Sei  $S_u \subset S$  eine somit existierende  $S$ -Basis von  $N$ .  $|S_u|$

<sup>20</sup> Siehe z.B. van der Waerden, Algebra I, Heidelberger Taschenbücher, Springer Verlag, Berlin usw, 1966, S. 76, Aufgabe 5.



ist für alle  $S$ -Basen gleich. Sei  $R_S := (R_s^t)_{(s,t) \in S_u \times T}$  die auf  $S_u$  eingeschränkte Schaltregel. Das endliche Teilnetz  $N_S := (S_u, T, R_S)$  besitzt eine  $T$ -Basis  $T_u$  und es gilt  $|S_u| = |T_u|$ .

Bei Erweiterung von  $N_S$  zu  $N$  durch Hinzunahme aller Stellen  $s \in S$ , das sind evtl. abzählbar viele, wird  $T_u$  eine  $T$ -Basis von  $N$ . Angenommen nun, die ursprünglichen Transitionenvektoren  $R^t$ ,  $t \in T_u$  wären linear abhängig. Dann gibt es Zahlen  $\tau_t \neq 0$  für einige  $t \in T$ , so daß für alle Stellen  $s' \in S$

$$\sum_{t \in T_u} \tau_t R_s^t = 0.$$

Für  $s \in S_u$  lassen sich diese Gleichungen zu der Vektorgleichung

$$\sum_{t \in T_u} \tau_t R_S^t = 0$$

zusammenfassen. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $R_S^t$ ,  $t \in T_u$ , müssen alle  $\tau_t = 0$  sein, im Widerspruch zur Annahme. Die  $R_S^t$ ,  $t \in T_u$  bleiben somit linear unabhängig, wenn sie durch Hinzunahme unendlich vieler weiterer Komponenten zu den ursprünglichen Vektoren  $R^t$  verlängert werden.

Für  $T_u = T$  ist  $T_u$  maximal und somit eine  $T$ -Basis von  $N$ ; für diesen Fall ist der Beweis beendet.

Sei  $T_u \neq T$ . Jeder Transitionenvektor  $R_S^{t'}$  des endlichen Netzes  $N_S$ ,  $t' \in T - T_u$ , ist eine Linearkombination der Basisvektoren  $R_S^t$ ,  $t \in T_u$

$$\mathbf{2.8} \quad R_S^{t'} = (R_s^{t'})_{s \in S_u} = \left( \sum_{t \in T_u} \tau_t^{t'} R_s^t \right)_{s \in S_u} = \sum_{t \in T_u} \tau_t^{t'} R_S^t \quad (\text{alle } \tau_t^{t'} \in \mathbf{Q}).$$

Entsprechend ist jeder Stellenvektor  $R_{s'}$  des Netzes  $N$ ,  $s' \in S - S_u$  eine Linearkombination

$$\mathbf{2.9} \quad R_{s'} = (R_s^t)_{t \in T} = \left( \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s R_s^t \right)_{t \in T} = \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s R_s \quad (\text{alle } \sigma_s^s \in \mathbf{Q})$$

Für  $t = t' \in T - T_u$  kann  $R_S^{t'}$  im rechten Komponentenausdruck von **2.9** durch den rechten Komponentenausdruck von **2.8** ersetzt werden:

$$\mathbf{2.10} \quad R_{s'}^{t'} = \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s \sum_{t \in T_u} \tau_t^{t'} R_s^t = \sum_{t \in T_u} \tau_t^{t'} \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s R_s^t = \sum_{t \in T_u} \tau_t^{t'} R_S^t$$

Formel **2.10** gilt wie **2.9** für  $s' \in S - S_u$ . Zusammen mit dem linken Komponentenausdruck von **2.8** ergibt sich, daß **2.10** für alle  $s \in S$  gilt. Werden die Transitionenvektoren  $R_S^{t'}$ ,  $t' \in T - T_u$  um unendlich viele Komponenten zu den ursprünglichen Transitionenvektoren  $R^t$  verlängert, so bleiben sie eine Linearkombination der entsprechend verlängerten Basisvektoren  $R_S^t$ ,  $t \in T_u$ .

Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Transitionenvektoren des Netzes  $N$  ist somit  $|T_u| = |S_u|$ . Letzteres ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Stellenvektoren.

*Seien jetzt  $S$  und  $T$  abzählbar.* Wir betrachten zuerst den Fall, daß es ein (endliches) Maximum der Anzahl linear unabhängiger Stellen  $s \in S$  gibt. (Der entsprechende Fall für  $T$  wird analog bewiesen.)  $S_u \subset S$  sei eine somit existierende  $S$ -Basis von  $N$ . Das auf  $S_u$  eingeschränkte Netz  $N_S := (S_u, T, R_S)$  mit der Schaltregel  $R_S := (R_s)_{s \in S_u}$  ist  $S$ -endlich. Nach dem bereits bewiesenen hat  $N_S$  eine  $T$ -Basis  $T_u$  mit  $|T_u| = |S_u|$ . Es wird nun gezeigt, daß  $T_u$  auch im ursprünglichen Netz  $N$  eine  $T$ -Basis ist. Für jeden Transitionenvektor  $R_S^{t'}$  des endlichen Netzes  $N_S$ ,  $t' \in T - T_u$ , gilt wie

oben **2.8**. Für einen Stellenvektor  $R_{s'}$  des Netzes  $N$ ,  $s' \in S - S_u$  gilt **2.9**. Wie oben erhält man **2.10** für  $R_{s'}$ ,  $t' \in T - T_u$  und  $s' \in S - S_u$ . Zusammen mit dem linken Komponentenausdruck von **2.8** ergibt sich, daß **2.10** für alle  $s \in S$  gilt, d.h. jeder Transitionenvektor  $R^{t'}$ ,  $t' \in T - T_u$  ist Linearkombination der  $R_t$ ,  $t \in T_u$ . Wie im  $T$ -endlichen Fall zeigt man auch, daß die  $t \in T_u$  in  $N$  linear unabhängig sind.  $T_u$  ist somit  $T$ -Basis von  $N$ .

Wenn  $S$  kein endliches Maximum der Anzahl linear unabhängiger Stellen hat, dann hat auch  $T$  keines. Denn hätte  $T$  ein solches Maximum, dann müßte nach dem soeben bewiesenen auch  $S$  eines haben. Die im Beweis genannte obere Grenze ist die Abzählbarkeit, da beide  $S$  und  $T$  abzählbar sind. Entsprechendes gilt, wenn  $T$  kein solches endliches Maximum hat. <sup>21</sup> •

Das folgende Diagramm skizziere die Beweisschritte **2.8**, **2.9** und **2.10**

$$\begin{array}{cccccc} S \times T & \rightarrow & S \times T_u & \rightarrow & S_u \times T_u & \rightarrow & S_u \times T & \rightarrow & S \times T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \rightarrow & N^T & \rightarrow & N_S^T & \rightarrow & N_S & \rightarrow & N \end{array} \quad (\text{Zu } N_S^T \text{ siehe auch Satz 2.16 .})$$

**Anmerkung 2.11** Der vorstehende Beweis läßt sich wie nachfolgend skizziert weitgehend komponentenfrei führen.

Seien  $X, Y$  höchstens abzählbare Mengen. Die Vektorräume  $(\mathbf{Q}^X)^Y$ ,  $(\mathbf{Q}^Y)^X$ ,  $\mathbf{Q}^{X \times Y}$  und  $\mathbf{Q}^{Y \times X}$  sind isomorph unter den linearen Abbildungen

$$((q_{xy})_{x \in X})_{y \in Y} \leftrightarrow ((q_{xy})_{y \in Y})_{x \in X} \leftrightarrow (q_{xy})_{(x,y) \in X \times Y} \leftrightarrow (q_{xy})_{(y,x) \in Y \times X} \quad (q_{xy} \in \mathbf{Q}).$$

$q \in \mathbf{Q}^{X \times Y}$  habe eine  $X$ -Basis  $X_u$ , d.h. die Vektoren  $q_{x'} = (q_{x'y})_{y \in Y}$ ,  $x' \in X - X_u$  sind Linearkombinationen der Vektoren  $q_x$ ,  $x \in X_u$ , d.h.

$$q_{x'} = \sum_{x \in X_u} \theta_{x'}^x q_x.$$

$q$  definiert mit den  $\theta_{x'}^x$  eine lineare Abbildung

$$\Theta_{q,X,Y}: p = ((p_{xy})_{(x,y) \in X_u \times Y}) \in \mathbf{Q}^{X_u \times Y} \rightarrow p' = ((p'_{x'y})_{(x',y) \in (X - X_u) \times Y}) \in \mathbf{Q}^{(X - X_u) \times Y}$$

mit

$$p' := \left( \sum_{x \in X_u} \theta_{x'}^x p_{xy} \right)_{(x',y) \in (X - X_u) \times Y}.$$

Mit diesen Begriffen ergibt sich, daß das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccc} & \Theta_{q,T,S_u} & \\ & \mathbf{Q}^{S_u \times T_u} \rightarrow \mathbf{Q}^{S_u \times T} & \\ \Theta_{q,S,T_u} \downarrow & & \downarrow \Theta_{q,S,T} \\ & \mathbf{Q}^{S \times T_u} \rightarrow \mathbf{Q}^{S \times T} & \\ & \Theta_{q,T,S} & \end{array}$$

rests Lingenberg, s. 77 beweis zu rang dies acu in fn 5 angeben

<sup>21</sup> Die Einschränkung der Schaltregel  $R$  auf  $R_S$  kann als Projektion  $\pi$  eines Vektorraumes auf einen anderen verstanden werden. Die Verlängerung eines Transitionenvektors um sovielen Komponenten, bis er wieder im Ausgangsraum liegt, führt in die Faser  $\pi^{-1}$ . Die Nutzbarkeit der allgemeineren Sätze über Tensorräume und über gefaserte Vektorräume wurde nicht näher betrachtet.

**Anmerkung 2.12** Im Beweis wurde nur im letzten Fall benutzt, daß  $S$  und  $T$  abzählbar sind; der Satz gilt in den andern Fällen auch, wenn eine der beiden Mengen überabzählbar ist. Dieser Fall erscheint bei  $S$ - bzw.  $T$ -endlichen Netzen uninteressant, da sich dann überabzählbar viele Transitionen- bzw. Stellenvektoren in der Schaltregel wiederholen, weil  $\mathbf{Z}^S$  bzw.  $\mathbf{Z}^T$  nur abzählbar ist.

**Anmerkung 2.13** Wenn  $S$  endlich ist, und  $T$  nur linear unabhängige Transitionen enthält, dann ist  $T$  endlich. Entsprechendes gilt bei Vertauschung von  $T$  und  $S$ .

**Definition 2.14** Der Satz 2.6 veranlaßt, die obere Grenze der Anzahl linear unabhängiger Stellen oder Transitionen eines Netzes  $N = (S, T, R)$  als *Dimension des Netzes* ( $= |T_u| = |S_u|$ ), kurz *dim*  $N$ , zu bezeichnen.

Ein Netz  $N_S = (S_u, T, R_S)$  heißt *S-Basisnetz* eines Netzes  $N = (S, T, R)$ , wenn  $S_u$  eine  $S$ -Basis und  $R_S$  die auf  $S_u$  eingeschränkte Schaltregel ist. Entsprechend wird ein *T-Basisnetz*  $N^T = (S, T_u, R^T)$  von  $N$  definiert.

**Folgerung 2.15** Ein Netz hat genau dann endliche Dimension, wenn es eine  $S$ - oder eine  $T$ -Basis besitzt. Mit einer  $S$ -Basis besitzt es immer eine  $T$ -Basis und umgekehrt.

Ein  $S$ - oder  $T$ -endliches Netz hat immer endliche Dimension. (Es besitzt eine  $S$ - und eine  $T$ -Basis.)

**Satz 2.16** Seien  $N = (S, T, R)$  ein Netz,  $S_u$  eine  $S$ - und  $T_u$  eine  $T$ -Basis von  $N$ . Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 2.6 :  $(N_S)^T = (N^T)_S$ . D.h. ein  $T$ -Basisnetz eines  $S$ -Basisnetzes von  $N$  kann auch als  $S$ -Basisnetz eines  $T$ -Basisnetzes von  $N$  erhalten werden. <sup>22</sup>

Man kann also auch  $N_S^T := (N_S)^T = (N^T)_S$  schreiben

**Beweis:** Man bemerkt, daß  $(R_S)^T = (R_s^t)_{(s,t) \in S_u \times T_u} = (R^T)_S \cdot \bullet$

**Definition 2.17** Die Schaltregel  $R$  eines  $S$ -, bzw.  $T$ -endlichen Netzes  $N = (S, T, R)$  führt zu der linearen Abbildung  $S_R : \sigma \in \mathbf{Q}^S \rightarrow \tau \in \mathbf{Q}^T$  mit

$$\tau_t := \sum_{s \in S} \sigma^s R_s^t,$$

bzw. zu der linearen Abbildung  $T_R : \tau \in \mathbf{Q}^T \rightarrow \sigma \in \mathbf{Q}^S$  mit

$$\sigma_s := \sum_{t \in T} \tau_t R_s^t.$$

Werden  $s \in S$  als Zeilen- und  $t \in T$  als Spaltenindex einer mit  $R$  gebildeten Matrix aufgefaßt, so kann  $S_R(\sigma) = \sigma R$  geschrieben werden, d.h. als *Multiplikation der Matrix  $R$  von links mit einem in  $S$  indizierten Vektor  $\sigma$* , bzw.  $T_R(\tau) = R\tau$  als *Multiplikation der Matrix  $R$  von rechts mit einem in  $T$  indizierten Vektor  $\tau$* .

Als *T-kern* ( $R$ ) wird der Kern der Abbildung  $T_R$  bezeichnet, entsprechend ist *S-kern* ( $R$ ) der Kern von  $S_R$ . <sup>23</sup>

---

<sup>22</sup> Inwieweit sich Kategorien zur Darstellung dieser Aussage eignen, wurde nicht näher betrachtet.

**Satz 2.18** Ist  $l$  eine lineare Abbildung des endlich dimensionalen Vektorraums  $U$  in einen Vektorraum  $U'$ , so ist

$$\dim(\text{kern } l) + \dim(\text{bild } l) = \dim U$$

Zum **Beweis** wird auf ein Lehrbuch der linearen Algebra verwiesen.<sup>24</sup> •

**Folgerung 2.19** Für Netze gilt

$$\dim(T\text{-kern}(R)) + \dim(N) = |T| \quad (T \text{ endlich})$$

und

$$\dim(S\text{-kern}(R)) + \dim(N) = |S| \quad (S \text{ endlich})$$

sowie

$$\max(|S|, |T|) \leq \dim(T\text{-kern}(R)) + |S| = |T| + \dim(S\text{-kern}(R)) \leq |T| + |S| \quad (T \text{ und } S \text{ endlich}).$$

**Anmerkung 2.20** Die Abbildungen  $S_R$ , bzw.  $T_R$  können auch bei unendlichem  $S$ , bzw.  $T$  definiert werden, sofern in den definierenden Summen nur endlich viele der  $R_s^t \neq 0$  sind. Die Folgerung 2.19 müßte dann, ~~rest~~sofern sie beweisbar ist, als Addition von Mächtigkeiten verstanden werden.

### 3. Verläufe in Netzen

Bisher wurden Netze als formale, statische Gebilde betrachtet und mit der linearen Algebra verbunden. Im folgenden Abschnitt wird mit Netzen ein Geschehen, ein Ablauf, ein Verlauf verknüpft. Dadurch rechtfertigt sich auch die Bezeichnung Schaltregel.

**Definition 3.1** Seien  $A, B$  Mengen und  $A \subset B$ . Die Abbildung  $\chi_A : B \rightarrow \{0,1\}$  mit

$$\chi_A(b) := \begin{cases} 1, & b \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion von A (in B)*. Ist  $A = \{a\}$ , so wird auch  $\chi_a(B)$  statt  $\chi_{\{a\}}(B)$  geschrieben, entsprechend  $\chi_A(b)$ , falls  $B = \{b\}$ .

**Definition 3.2** Sei  $N = (S, T, R)$  ein Netz. Eine Folge  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  mit

$$m_0 \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^S = \mathbf{N}_0^S$$

$t_i$  Transitionenvektoren,  $i = 1, 2, 3, \dots$

$$m_i := m_0 + \sum_{j=1}^i t_j \in \mathbf{N}_0^S, i = 1, 2, 3, \dots$$

heißt ein Verlauf in  $N$ .  $m_0$  heißt Anfangsmarkierung,  $m_i$  die nach  $i$  (Schalt-)Schritten von  $m_0$  aus erreichte oder vom Verlauf erzeugte (Folge-)Markierung. Ein Schritt  $t_j$  heißt auch Ereignis.

Zu einem Verlauf  $V$  gehört auch eine Folge von (*absoluten*) Häufigkeitsvektoren  $H_{V_i} = (H_{V_i, t})_{t \in T} \in \mathbf{Z}^T$ , die angeben, wie oft jede Transition (jedes Ereignis)  $t \in T$  in dem Verlauf bis einschließlich Schritt  $i$  vorkommt. Mit der charakteristischen Funktion ist

<sup>23</sup> Den Kern einer linearen Abbildung bilden die Vektoren, die auf 0 abgebildet werden. Diese Menge ist ein linearer Unterraum. In der Literatur der Petrinetze wird der Kern von  $T_R$  ( $S_R$ ) als die Menge der  $T$ -( $S$ -)Invarianten des Netzes bezeichnet. Wir bevorzugen die Bezeichnung, die in der linearen Algebra und ihren Anwendungen gebräuchlich ist.

<sup>24</sup> Z.B. Rolf Lingenberg, Lineare Algebra, BI Hochschultaschenbücher, Mannheim Zürich 1969, S. 59

$$H_{V_i,t} := \sum_{j=1}^i \chi_t(t_j).$$

Als *relative Häufigkeit*  $h_{V_i,t}$  des Vorkommens der Transition  $t$  im Verlauf  $V$  wird bezeichnet:

$$h_{V_i,t} := \frac{1}{i} H_{V_i,t}.$$

Für eine Folgemarkierung  $m_i$  ergibt sich

$$m_i = m_0 + \sum_{t \in T} H_{V_i,t} R^t = m_0 + R H_{V_i} = m_0 + T_R(H_{V_i})$$

oder vereinfacht notiert

$$m_i = m_0 + \sum_{t \in T} H_{V_i,t} t.$$

Alle Folgemarkierungen  $m_i$  zu einer Anfangsmarkierung  $m_0$  liegen in dem von den Transitionenvektoren  $R^t$  aufgespannten und durch  $m_0$  verlaufenden affinen Unterraum von  $\mathbf{Q}^S$ .

Für die Komponenten  $m_{i,s}$  von  $m_i$  ist

$$\mathbb{N} \quad m_{i,s} = m_{0,s} + \sum_{t \in T} H_{V_i,t} R_s^t = m_{0,s} + H_{V_i} R_s.$$

$H_{V_i} R_s$  ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren  $H_{V_i}$  und  $R_s$ , das auch für unendliches  $T$  definiert ist, da  $H_{V_i}$  wegen des endlichen  $i$  nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten aufweist.

Die Häufigkeitsvektoren haben keine negativen Komponenten, sie liegen im 1. *Quadranten* des jeweiligen Vektorraums. Für einen Vektor  $v$ , der keine negativen Komponenten hat, schreibt man auch  $v \geq 0$ ; ist zusätzlich  $v \neq 0$ , so schreibt man  $v > 0$ . " $\geq$ " liefert mit der Festlegung " $a \geq b$  genau dann wenn  $a - b \geq 0$ " eine (*Teil-*)*Ordnung* in dem betreffenden Vektorraum.

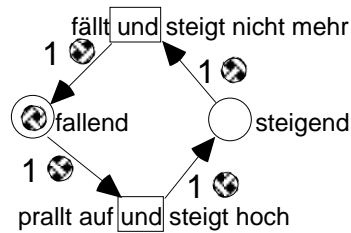
Mit einem Verlauf lassen sich auch kompliziertere Häufigkeiten verbinden und mit der charakteristischen Funktion ausdrücken:

$$H_{V_i,A} = \sum_{j=1}^i \chi_A(t_j) \quad (A \subset T).$$

$H_{V_i,A}$  gibt an, wie oft in einem Verlauf  $V$  bis einschließlich Schritt  $i$  eine Transition aus der Menge  $A$  aufgetreten ist.

Wenn der Bezug zum Verlauf eindeutig ist, kann der Index auch weggelassen werden.

**Anmerkung 3.3** Das einleitend gegebene Beispiel des hüpfenden Balls läßt sich mit den beiden Stellen (oder Zustände) "fallend" und "steigend" sowie den beiden Transitionen "prallt auf und steigt hoch" und "steigt nicht mehr und fällt" beschreiben. Die erste Transition mindert eine Markierung in der ersten Stelle um eine (feste) Größe  $a$  (z.B. 1), um die sie die Markierung der zweiten erhöht; die zweite Transition wirkt umgekehrt. Ist die Anfangsmarkierung in einer Stelle 0, in der andern  $a$ , so hat dieses Netz einen unendlichen Verlauf, in dem sich beide Transitionen abwechseln: Der Ball würde hiernach immer springen (s Figur).



Ein Geschehen in ein Netz umzusetzen, kann sich sehr anschaulich gestalten; ein Verlauf in einem solchen Netz spiegelt aber nur begrenzt das wirkliche Geschehen. Abweichungen zwischen einem Verhalten des Netzes und der Wirklichkeit können ihren Ursprung in einer verfehlten Schaltregel oder in den ausgesparten Seiteneffekten haben, die während einer oder zwischen zwei Transitionen auftreten. Im Beispiel ist es die Reibung.

Auf jeden Fall eröffnet ein Netz Wege, auf denen sich systematisch Verbesserungen suchen lassen, wenn es gilt, durch ein neues Modell die Abweichungen zu verkleinern.

**Hauptsatz 3.4** Das Netz  $N = (S, T, R)$  besitze ein  $S$ -Basisnetz  $N_S = (S_u, T, R_S)$ . (D.h.  $N$  hat endliche Dimension.) Die Folgemarkierungen eines Verlaufs  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  in  $N$  sind eindeutig durch die Folgemarkierungen in  $N_S$  bestimmt, die der auf  $N_S$  eingeschränkte Verlauf erzeugt.

**Beweis:** Für die Folgemarkierungen  $(m_{i,s})_{s \in S}$  gilt

$$\mathbb{N}\mathbb{N} \quad m_{i,s} = m_{0,s} + \sum_{j=1}^i t_{j,s} \quad (s \in S)$$

Sei  $S_u$  eine maximale und damit endliche Menge linear unabhängiger Stellen, d.h. eine  $S$ -Basis von  $N$ . Für  $S_u = S$  ist der Satz trivial; sei also  $S - S_u \neq \emptyset$ . Nach 2.9 ist für  $s' \in S - S_u$

$$t_{j,s'} = \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s t_{j,s}$$

Somit

$$3.5 \quad m_{i,s'} = m_{0,s'} + \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s \sum_{j=1}^i t_{j,s} = m_{0,s'} + \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s (m_{i,s} - m_{0,s}) = m'_{0,s'} + \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s m_{i,s} ,$$

wobei

$$m'_{0,s'} := m_{0,s'} + \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s m_{0,s} .$$

Die Verlängerung eines Vektors  $v = (v_s)_{s \in S_u} \in \mathbf{Z}^{S_u}$  zu einem Vektor  $v' = (v'_s)_{s \in S} \in \mathbf{Z}^S$  nach der Vorschrift

$$3.6 \quad v'_s := \begin{cases} v_s & , s \in S_u \\ m'_{0,s'} + \sum_{r \in S_u} \sigma_r^s v_r & , s \in S - S_u \end{cases}$$

ist eine injektive lineare Abbildung  $p_{S,m_0} : \mathbf{Q}^{S_u} \rightarrow \mathbf{Q}^S$ . Wegen 3.5 gilt

$$m_i = p_{S,m_0}(m_{S,i}) ,$$

wobei  $m_{S,i}$  die Einschränkung der Markierung  $m_i$  auf die  $S$ -Basis  $S_u$  ist •

**Folgerung 3.7** Das Netz  $N = (S, T, R)$  besitze ein  $S$ -Basisnetz  $N_S = (S_u, T, R_S)$ . Wenn die Folgemarkierungen eines Verlaufs  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  in dem  $S$ -Basisnetz  $N_S$  von  $N$  in jeder Stelle beschränkt sind, so sind sie es in jeder Stelle von  $N$ .

Zum **Beweis** setze man als Schranke  $k_{s'} := m'_{0,s'} + \sum_{s \in S_u} \sigma_s^s k_s$ . Dabei ist  $k_s$  die Schranke in der Stelle  $s$  des  $S$ -Basisnetzes. •

**Anmerkung 3.8** Der Satz 3.4 läßt sich auch komponentenfrei darstellen. Für eine beliebige Transition  $t$  und Markierungen  $m$  und  $m'$  wird die Beziehung  $m' = m + t$  durch die auf eine  $S$ -Basis  $S_u$  eingeschränkten Vektoren  $t_u, m_u$  und  $m'_u$  bestimmt: Die Transitionen von  $N$  spannen einen linearen Unterraum  $P \cong \mathbf{Q}^{S_u}, P \subset \mathbf{Q}^S$  auf; die Inklusion  $\subset$  kann als lineare injektive Abbildung verstanden werden. Seien  $P$  und  $P'$  Vektorräume,  $i : P \rightarrow P'$  eine injektive lineare Abbildung und  $l : P \times P \rightarrow P$  eine bilineare Abbildung mit  $l(p, q) := p + q$ . Entsprechend sei  $l' : P' \times P' \rightarrow P'$  definiert. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} & l' & \\ & P' \times P' \rightarrow P' & \\ \uparrow i \times i & & \uparrow i \\ P \times P & \rightarrow & P \\ & l & \end{array}$$

Mit  $P := \mathbf{Q}^{S_u}$  und  $P' := \mathbf{Q}^S$  ergibt sich die Behauptung von Satz 3.4 in komponentenfreier Schreibweise:

$$\begin{array}{ccc} (m, t) & \rightarrow & m + t \\ \uparrow i \times i & & \uparrow i \\ (m_u, t_u) & \rightarrow & m_u + t_u \end{array} \bullet$$

**Satz 3.9** (Thiagarajans Vermutung)<sup>25</sup>

NN(a) Sind in einem Netz  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension die Folgemarkierungen  $(m_{i,s})_{s \in S}$  eines Verlaufs  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  in jeder Stelle, d.h. *stellenweise* durch Konstanten  $k_s$  beschränkt, also

NN  $0 \leq m_{i,s} \leq k_s$  für alle  $i = 1, 2, 3, \dots$  und alle  $s \in S$ ,

so erzeugt der Verlauf nur endlich viele Folgemarkierungen.

NN(b) Sind die Folgemarkierungen aller Verläufe - bei gleicher Anfangsmarkierung  $m_0$  - eines Netzes  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension stellenweise beschränkt, so hat die Anfangsmarkierung  $m_0$  nur endlich viele Folgemarkierungen.

**Beweis:** Man setze für eine nach Voraussetzung existierende  $S$ -Basis  $S_u$  von  $N$

$$M_S := \left\{ (m_s)_{s \in S_u} \mid 0 \leq m_s \leq k_s \right\} \subset \mathbf{Z}^{S_u} \subset \mathbf{Q}^{S_u} \text{ und } M := p_{S, m_0}(M_S).$$

$p_{S, m_0}$  ist die in 3.6 konstruierte lineare Abbildung. Nach Konstruktion von  $M$  ist  $m_i \in M$  für jede Folgemarkierung  $m_i$  des gegebenen Verlaufs. Mit

<sup>25</sup> Die Vermutung (beschränkt auf  $T$ -endliche Netze) wurde von Thiagarajan im Petri Net Newsletter 40, Dec. 91, S. 31 genannt. Der Beweis (Göhring) für  $T$ -endliche Netze erscheint im Petri Net Newsletter 41. Für  $S$ -endliche Netze kann die Aussage auch ohne Rückgriff auf Vektoralgebra bewiesen werden.

$$\prod_{s \in S_u} (k_s + 1) = |M_S| = |M|$$

ist wegen der Endlichkeit von  $S_u$  der Beweis zu (a) beendet.

Zum Beweis von (b) bemerkt man, daß - bei gleichen Konstruktionen -  $M$  nur von der Anfangsmarkierung  $m_0$ , nicht aber vom speziellen Verlauf abhängt, d.h. es gilt  $m_i \in M$  für jede Folgemarkierung  $m_i$  irgendeines mit  $m_0$  beginnenden Verlaufs. •

**Folgerung 3.10** Gibt es zu einem Netz  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension ein  $S$ -Basisnetz, in dem die Folgemarkierungen der mit gleicher Anfangsmarkierung  $m_{S,0}$  beginnenden Verläufe stellenweise durch Konstanten  $k_s$  beschränkt sind, so hat  $N$  nur endlich viele Folgemarkierungen für jede von  $m_{S,0}$  auf  $S$  fortgesetzte Anfangsmarkierung  $m_0$ .

**Beweis:** Nach Satz 3.4 sind die Folgemarkierungen eines Verlaufs von  $N$  eindeutig durch die volle Anfangsmarkierung  $m_0$  und durch die auf das  $S$ -Basisnetz beschränkten Folgemarkierungen bestimmt. Die Anzahl der Folgemarkierungen in dem  $S$ -Basisnetz ist durch  $\prod_{s \in S_u} (k_s + 1)$  beschränkt. •

**Satz 3.11** Erzeugt ein Verlauf eines Netzes  $N = (S, T, R)$  nur endlich viele verschiedene Folgemarkierungen, so wiederholt er Markierungen, wenn er länger als diese Anzahl ist.

Der **Beweis** ist trivial. •

**Satz 3.12** Die Folgemarkierungen  $m_i$  eines Verlaufs  $V = m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  in einem Netz  $N = (S, T, R)$  seien stellenweise durch eine feste Konstante  $c$  beschränkt. Die in  $V$  vorkommenden verschiedenen Transitionen mögen eine endliche Menge  $T'$  bilden. Dann hat das auf  $T'$  eingeschränkte Netz  $N^{T'} = (S, T', R^{T'})$  nur endlich viele verschiedene Stellenvektoren.

**Beweis:** Für eine Folgemarkierung  $(m_{i,s})_{s \in S}$  gilt  $0 \leq m_{i,s} \leq c$ , ebenso für  $(m_{i+1,s})_{s \in S}$ . Da  $m_{i+1,s} = m_{i,s} + t_{i+1,s}$  ist notwendig  $-c \leq t_{i+1,s} \leq c$ . Somit erfüllen die Komponenten der auf  $T'$  beschränkten Schaltregel  $R^{T'}$  die Ungleichung  $-c \leq R_s^{t'} \leq c$ ,  $s \in S$ ,  $t' \in T'$ . Jeder Stellenvektor  $R_s^{T'}$  des eingeschränkten Netzes  $N^{T'}$  hat endlich viele (nämlich  $|T'|$ ) ganzzahlige Komponenten; diese sind beschränkt.  $N^{T'}$  hat somit nur endlich viele verschiedene Stellenvektoren. •

**Anmerkung 3.13** Entsprechendes beweist man, wenn alle mit  $m_0$  startenden Verläufe stellenweise durch  $c$  beschränkte Markierungen haben.  $T'$  sei die Menge der in diesen Verläufen vorkommenden verschiedenen Transitionen. Wählt man in dem eingeschränkten Netz  $N^{T'}$  unter den Stellen, die gleiche Stellenvektoren haben, jeweils eine aus, so erhält man ein endliches Netz  $\tilde{N}$ . Schränkt man entsprechend  $m_0$  ein, so wird aus jedem mit  $m_0$  startenden Verlauf von  $N$  ein Verlauf des neuen Netzes  $\tilde{N}$ . Die Umkehrung gilt nicht, da die Markierung in einer "gestrichenen" Stelle so niedrig sein kann, daß eine bestimmte Transition in  $N$  nicht, dagegen in  $\tilde{N}$  möglich ist. <sup>26</sup>

---

<sup>26</sup> s.a. J.M. Colom and M. Silva, Improving the Linearly Based Characterization of P/T Nets in [NETS 89]???, S.113 - 145



**Satz 3.14** Die Folgemarkierungen eines unendlichen Verlaufs  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  eines Netzes  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension, der nur linear unabhängige Transitionen enthält (d.h. die Transitionen entstammen einer Menge linear unabhängiger Transitionen), sind nicht stellenweise beschränkt. Der Verlauf erzeugt unendlich viele Markierungen.

**Beweis:** Angenommen, die Folgemarkierungen seien stellenweise beschränkt. Dann erzeugt der Verlauf nach Satz 3.9 nur endlich viele verschiedene Markierungen und wiederholt einzelne davon, d.h. es gibt  $i, j \in \mathbf{N}$ ,  $i < j$  mit

$$m_j = m_i + \sum_{k=i+1}^j t_k = m_i, \text{ d.h. } \sum_{k=i+1}^j t_k = 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der im Verlauf auftretenden Transitionen.

Würde der Verlauf nur endlich viele Markierungen erzeugen, so führt dies auf den gleichen Widerspruch. •

**Folgerung 3.15** Sind die Folgemarkierungen eines unendlichen Verlaufs in einem Netz endlicher Dimension stellenweise beschränkt, so sind die im Verlauf vorkommenden Transitionen linear abhängig, somit  $|T_u| < T$  für eine  $T$ -Basis  $T_u$ .

**Satz 3.16** Sind in einem Netz  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension von einer Anfangsmarkierung  $m_0 \neq 0$  alle Markierungen  $m \in \mathbf{N}^S$  erreichbar, so ist die Dimension des Netzes  $\geq |S| - 1$ .<sup>27</sup>

**Beweis:**  $\mathbf{N}^S$  spannt  $\mathbf{Q}^S$  mit der Dimension  $|S|$  auf. Jede Folgemarkierung von  $m_0$  liegt in  $\mathbf{N}^S$ , sie ist Linearkombination von  $m_0$  und Transitionenvektoren, somit müssen diese einen mindestens  $(|S| - 1)$ -dimensionalen Raum aufspannen. Bei endlicher Dimension ist  $S$  endlich.

**Satz 3.17** Sind in einem Netz  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension von jeder Anfangsmarkierung  $\neq 0$  aus alle Markierungen  $m \in \mathbf{N}^S$  erreichbar, so ist die Dimension von  $N$  gleich  $|S|$  und  $|T| > |S|$ .

**Beweis:** Man betrachte zwei voneinander linear unabhängige Anfangsmarkierungen  $m_0$  und  $m'_0$ . Um zusammen mit  $m_0$  und dann mit  $m'_0$   $\mathbf{N}^S$  aufzuspannen, müssen die Transitionen bereits  $\mathbf{N}^S$  aufspannen, also  $\dim N = |S|$  und  $|T| \geq |S|$ . Mit

$$\tilde{m}_s := \left| \min_{t \in T} R_s^t \right|$$

ist  $\tilde{m} := (\tilde{m}_s)_{s \in S}$  eine Markierung, ebenso  $m^{t'} := \tilde{m} + R^{t'}$  und  $m^{t''} := \tilde{m} + R^{t''}$ , wenn  $t', t'' \in T$ . Zu  $t' \neq t''$  muß es einen Verlauf geben, so daß  $m^{t'}$  Anfangs- und  $m^{t''}$  Folgemarkierung ist. Also

$$\tilde{m} + R^{t''} = m^{t''} = m^{t'} + \sum_{t \in T} H_t R^t = \tilde{m} + R^{t'} + \sum_{t \in T} H_t R^t \quad (\text{alle } H_t \geq 0)$$

Wäre  $|T| = |S|$ , dann wären die Transitionen linear unabhängig und deshalb  $H_t + 1 = 0$ , was nicht geht. Also muß  $T$  linear abhängige Transitionen enthalten und  $|T| > |S|$  sein. •<sup>28</sup>

<sup>27</sup> Zu diesem Satz und dem folgenden s.a. B.Baumgarten, Petri-Netze, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990, S. 176f.

<sup>28</sup> Wegen der vorausgesetzten Abzählbarkeit von  $S$  und  $T$  ist bei Netzen nicht endlicher Dimension  $\dim N = |S| = |T|$ .

#### 4. Markenbeschränkung und Markenerhaltung

**Definition 4.1** Ein Netz  $N = (S, T, R)$ , in dem die Markierungen in keiner Stelle  $s$  eine Schranke  $k_s$ ,  $k_s \in \mathbf{N}_\infty := \mathbf{N} \cup \{ \infty \}$ , überschreiten dürfen, heißt ein Netz mit Kapazitätsbeschränkung  $k = (k_s)_{s \in S}$ .  $k_s$  ist die Kapazität der Stelle  $s$ ; die Kapazität einer Stelle ist echt beschränkt, wenn  $k_s$  endlich ist.

Die Netze mit Kapazitätsbeschränkung sind in der Literatur häufig anzutreffen. Sind alle  $k_s = \infty$ , so erhält man die Netze nach Definition 2.1. Auch eine echte Kapazitätsbeschränkung läßt sich auf Netze ohne Beschränkung zurückführen, wenn nur Verläufe und erreichbare Folgemarkierungen interessieren.

Man denke an eine Alltagserfahrung. Das Füllen einer Kiste mit Äpfeln kann durch den erschöpften Platz in der Kiste gestoppt werden oder dadurch, daß die Tüten verbraucht sind, in die jeder Apfel gesteckt werden soll, bevor er in einer riesigen Kiste landet. Dies führt zu folgendem

**Satz 4.2** (a) Einem Netz  $N = (S, T, R)$  mit echter Kapazitätsbeschränkung  $k$  werde ein Netz  $N_2 = (S_2, T, R_2)$  mit  $S_2 := S \cup S \times \{ '\}$ ,  $R_{2s}^t := R_s^t$  und  $R_{2s'}^t := -R_s^t$  für  $s \in S$  zugeordnet. Die Zuordnung  $\kappa$ , die jedem Verlauf  $V = m_{2,0}, t_1, t_2, t_3, \dots$  in  $N$  mit  $m_{2,0,s} := m_{0,s}$ ,  $m_{2,0,s'} := k_s - m_{0,s}$  einen Verlauf  $V_2 := m_{2,0}, t_1, t_2, t_3, \dots$  in  $N_2$  zuordnet, ist injektiv.<sup>29</sup>

(b) Die Markierungen aller mit  $\kappa$  zugeordneten Verläufe in  $N_2$  sind mit  $k_2$ ,  $k_{2,s} := k_{2,s'} := k_s$  für alle  $s \in S$  beschränkt.

**Beweis:** Zu (a):  $V_2$  ist ein Verlauf in  $N_2$ , denn  $m_{2,0}$  und  $m_{2,i} := m_{2,0} + \sum_{j=1}^i R_2^{t_j}$  haben keine negativen Komponenten, sind also Markierungen in  $N_2$ . Für  $s \in S$  ist nämlich

$$m_{2,i,s} := m_{0,s} + \sum_{j=1}^i R^{t_j} = m_{i,s} \geq 0,$$

und für  $s' \in S \times \{ '\}$  ist

$$m_{2,i,s'} := k_s - m_{0,s} - \sum_{j=1}^i R^{t_j} = k_s - m_{i,s} \geq 0.$$

Zwei verschiedene Verläufe  $V$  und  $V^*$  in  $N$  führen mit  $\kappa$  zu verschiedenen Verläufen in  $N_2$ , denn unterschiedliche Anfangsmarkierungen bleiben bei der Zuordnung  $\kappa$  verschieden, ebenso im Schritt  $i$  unterschiedliche Transitionen.

Zu (b): Dies ergibt sich aus der vorangehenden Darstellung für  $m_{2,i,s}$  und  $m_{2,i,s'}$ .

**Satz 4.3** (Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.2) Die Markierungen aller Verläufe in  $N_2$ , die eine gleiche Anfangsmarkierung  $m_{2,0}$  haben, sind in den Stellen  $s$  und  $s'$  durch  $m_{2,0,s} + m_{2,0,s'}$  beschränkt.

**Beweis:** Die Summe der Markierungen in  $s$  und  $s'$  ist konstant, weil nach Konstruktion  $R_s^t + R_{s'}^t = 0$  ist. Somit  $m_{2,i,s} + m_{2,i,s'} = m_{2,0,s} + m_{2,0,s'}$ , woraus die Behauptung folgt. •

<sup>29</sup> s.a. K. Lautenbach, Linear Algebraic Techniques for Place/Transition Nets in [NETS 86 Part I], S.160 ff

**Folgerung 4.4** Die Summe der stellenweisen Markierungen aller mit gleicher Markierung  $m_{2,0}$  beginnenden Verläufe in  $N_2$  ist konstant, sofern  $m_{2,0}$  nur an endlich vielen Stellen von 0 verschieden ist.

Der **Beweis** ist trivial. •

**Definition 4.5** Ein *Verlauf* eines Netzes  $N = (S, T, R)$  heißt *markenerhaltend*, wenn für jede Folgemarkierung  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) das Skalarprodukt  $dm_i$  konstant ist; dabei ist  $d = (1, \dots, 1) \in \mathbf{Z}^S$ . (Das Skalarprodukt  $dm_i$  addiert die nirgends negativen Markenanzahlen der einzelnen Stellen.) Eine *Transitionenvektor*  $t \in T$  heißt *markenerhaltend*, wenn  $dt = 0$  ist. Eine *Schaltregel* oder auch *das Netz* heißen *markenerhaltend*, wenn jeder Transitionenvektor  $t \in T$  markenerhaltend ist.<sup>30, 31</sup>

Eine *Transition*  $t \in T$  heißt *markenerzeugend*, wenn  $dt > 0$  ist, *markenverzehrend*, wenn  $dt < 0$  ist.

**Voraussetzung 4.6** Das in dieser Definition verwendete Skalarprodukt ist nur sinnvoll, wenn die Anfangsmarkierung und jeder in einem markenerhaltenden Verlauf vorkommende Transitionenvektor nur an endlich vielen Stellen von 0 verschiedene Komponenten haben. Soll Markenerhaltung auf Markierungen und Transitionen ausgedehnt werden, die an unendlich vielen Stellen von 0 verschieden sein können, so dürfen in der Markensumme die Komponenten nicht mehr gleich mit 1 gewichtet werden.  $\mathbf{Q}^S$  muß dann letztlich zu einem Hilbertraum gemacht werden. Dieser Fall wird hier nicht betrachtet.

Entsprechendes gilt für Erzeugung und Verzehr von Marken, wenn mittels  $dt$  definiert.

Somit gibt es in einem  $T$ -endlichen Netz  $N = (S, T, R)$  mit markenerhaltender Schaltregel nur endlich viele Stellen, an denen mindestens ein Transitionenvektor eine von 0 verschiedene Komponente hat.  $S$  ist dann nach der allgemeinen Voraussetzung **2.2** endlich.

Wenn eine Schaltregel markenerhaltend ist, so ist es auch jeder Verlauf in dem Netz, wie sich aus der Definition der Folgemarkierung und der Linearität des Skalarprodukts ergibt.

Nach den Definitionen **3.2** und **4.5** gilt für einen markenerhaltenden Verlauf

$$dm_0 = dm_i = dm_0 + \sum_{j=1}^i dt_j \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots,$$

also

$$dt_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, 3, \dots$$

Die Umkehrung gilt auch; das ergibt den

**Satz 4.7** Ein Verlauf  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  ist genau dann markenerhaltend, wenn  $dt_i = 0$  für  $i = 1, 2, 3, \dots$ .

**Satz 4.8** Sei  $N = (S, T, R)$  ein Netz endlicher Dimension.

<sup>30</sup>  $d$  soll an *Diagonale* erinnern.

<sup>31</sup> Der dazwischenliegende Fall, daß alle mit gleicher Anfangsmarkierung beginnenden Verläufe markenerhaltend sind, wird nicht näher betrachtet.

NN(a) Ein markenerhaltender Verlauf erzeugt nur endlich viele verschiedene Markierungen.

NN(b) Die Schaltregel von  $N$  sei zusätzlich markenerhaltend. Alle mit gleicher Markierung beginnenden Verläufe erzeugen insgesamt nur endlich viele verschiedene Markierungen.

**Beweis:** In beiden Fällen gilt für die Anfangsmarkierung  $m_0$  und eine Folgemarkierung  $m_i =$

$$(m_{i,s})_{s \in S} \quad c_0 := dm_0 = dm_i = \sum_{s \in S} m_{i,s}, \text{ wobei alle } m_{i,s} \geq 0.$$

Somit sind alle  $m_{i,s} \leq c_0$ . D.h. die Voraussetzungen des Satzes 3.9 sind mit sogar einheitlicher Schranke erfüllt. •

**Folgerung 4.9** (a) Sind die in einem markenerhaltenden Verlauf  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  auftretenden Transitionen eines Netzes  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension linear unabhängig, so ist der Verlauf endlich lang, d.h. er endet nach endlich vielen Schritten.

NN(b) Sind in einem Netz  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension und mit markenerhaltender Schaltregel die Transitionen linear unabhängig, so endet jeder Verlauf nach spätestens  $c_{m_0}$  Schritten;  $c_{m_0}$  hängt nur von der Anfangsmarkierung  $m_0$  ab.

**Beweis:** Zu (a): Nach Satz 3.12 wären die Folgemarkierungen eines unendlichen Verlaufs nicht stellenweise beschränkt, wenn die vorkommenden Transitionen linear unabhängig sind.

Zu (b): Für die im Beweis zu 3.9 genannte Schranke für die Anzahl der Folgemarkierungen ergibt sich mit der stellenweisen Schranke  $c_0$  aus Satz 4.8

$$c_{m_0} = |S_u|^{c_0+1} = |T|^{c_0+1} \quad (S_u \text{ eine } S\text{-Basis von } N). \bullet$$

**Anmerkung 4.10** Der Satz präzisiert eine Alltagserfahrung. Wenn aus einem Lager Werkzeuge nur ausgegeben, aber nie dorthin zurückgebracht werden, so ist es irgendwann leer und die Ausleihe wird geschlossen.

Das Netz im späteren Beispiel 5.5 hat unendliche Dimension, besitzt aber auch unendliche Verläufe, weil über eine unendlich lange, geschlossene Bahn Marken wieder an eine Stelle zurückgebracht werden können.

**Satz 4.11** (a) Enthält ein  $S$ - oder  $T$ -endliches Netz nur markenverzehrende Transitionen, so ist jeder Verlauf endlich.

NN(b) Enthält ein  $S$ - oder  $T$ -endliches Netz nur markenerzeugende Transitionen, so gibt es mindestens eine Stelle, an der die Folgemarkierungen eines unendlichen Verlaufs unbeschränkt wachsen.

NN(c) Sind die Folgemarkierungen eines unendlichen Verlaufs in einem  $S$ - oder  $T$ -endlichen Netz stellenweise beschränkt und kommt in diesem Verlauf eine markenerzeugende Transition unendlich oft vor, so auch eine markenverzehrende; entsprechendes auch umgekehrt.

**Beweis:** Zu (a) Wenn das Netz  $T$ -endlich ist, so ist es nach der Voraussetzung 4.6 über die Bildbarkeit des Skalarprodukts  $S$ -endlich. Aus der Linearität des Skalarprodukts folgt, daß die

Summe der stellenweisen Markierungen mit jedem Schritt eines Verlaufs sinkt. Wenn  $m_0$  eine Anfangsmarkierung ist, so ist nach spätestens  $dm_0$  Schritten 0 als Markierung erreicht, was den Verlauf beendet.

Zu (b) Wie unter (a) kann man sich auf  $S$ -endliche Netze beschränken. Die Summe der stellenweisen Markierungen wächst mit jedem Schritt um mindestens 1, d.h. sie ist nicht beschränkt. Unter den endlich vielen Summanden muß somit mindestens einer unbeschränkt wachsen.

NNUM(c) ist eine unmittelbare Folge von (a) und (b). •

**Satz 4.12** Jedes  $S$ -endliche Netz  $N = (S, T, R)$ , das nicht markenerhaltend ist, kann um eine Stelle ergänzt werden, so daß das neue Netz markenerhaltend ist.

**Beweis:** Man setze  $N_{\{I\}} := (S_{\{I\}}, T, R_{\{I\}})$  mit  $S_{\{I\}} := S \cup \{s\}$  und  $R_{\{I\}}^t := - \sum_{s \in S} R_s^t$ . Die übrigen  $R_s^t$  bleiben unverändert die ursprünglichen. •

Im allgemeinen lassen sich die Verläufe in  $N$  nicht injektiv auf Verläufe in  $N_{\{I\}}$  abbilden.

**Beispiel 4.13** Sei  $N = (\{s\}, \{t\}, (I))$ . Dieses Netz hat eine Stelle  $s$  und eine Transition  $t$ ;  $t$  erhöht die Markenzahl in  $s$  jeweils um 1. Bei fester Anfangsmarkierung hat  $N$  abzählbar viele endliche und einen unendlichen Verlauf  $m_0, t, t, t, \dots$ . Das gemäß 4.12 konstruierte markenerhaltende Netz  $N_{\{I\}}$  hat keinen unendlichen Verlauf. Die Länge eines Verlaufs in  $N_{\{I\}}$  ist durch die Anfangsmarkierung in  $\{s\}$  beschränkt.



**Satz 4.14** Sei  $N = (S, T, R)$  ein  $S$ -endliches, nicht markenerhaltendes Netz und  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  ein Verlauf  $V$  mit beschränkten Folgemarkierungen.  $m_0$  kann so um eine Komponente  $m_{0,\{S\}}$  in  $N_{\{I\}}$  (s. 4.12) verlängert werden, daß der Verlauf mit den entsprechend verlängerten Transitionen markenerhaltend ist.

**Beweis:** Gemäß der Konstruktion von 4.12 wird eine Transition  $t \in T$  bei Verlängerung um die Komponente  $t_{\{S\}} := - dt = - \sum_{s \in S} t_s$  die Transition  $t_{\{I\}}$  von  $N_{\{I\}}$ . Da die Folgemarkierungen von  $V$  beschränkt sind, sind es nur endlich viele verschiedene Markierungen  $\tilde{m}_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) (s.a. 3.9). Wird  $m_0$  um die Komponente  $m_{0,\{S\}} := \sum_j d\tilde{m}_j$  ergänzt, so erhält man eine Markierung  $m_{0,\{I\}}$  im Netz  $N_{\{I\}}$ .

Zunächst ende der Verlauf  $V = m_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  im Schritt  $n$  spätestens nach der ersten Wiederholung einer Markierung. Die Folge  $m_{0,\{I\}}, t_{1,\{I\}}, t_{2,\{I\}}, t_{3,\{I\}}, \dots, t_{n,\{I\}}$  ist ein Verlauf in  $N_{\{I\}}$ , weil

$$\begin{aligned}
 m_{0,\{S\}} + t_{1,\{S\}} &= \sum_j d\tilde{m}_j + dt_1 = d(\sum_j \tilde{m}_j + t_1) = \sum_{s \in S} (\sum_j \tilde{m}_{j,s} + t_{1,s}) \\
 &\geq \sum_{s \in S} (m_{0,s} + t_{1,s}) \geq 0
 \end{aligned}$$

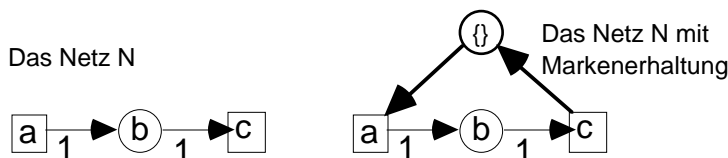
und entsprechend  $m_{0,\{S\}} + \sum_i t_{i,\{S\}} = \sum_j d\tilde{m}_j + \sum_i dt_i \geq 0$  ist.

Der Verlauf  $V$  wiederhole nun eine Markierung mehrmals, ggf. unendlich oft. Dann läßt sich jedem Stück von  $V$  mit genau einer Wiederholung nach der vorangegangenen Konstruktion ein gleichlanges Verlaufsstück in  $N_{\{\}} zuordnen. Die Verkettung dieser Stücke bleibt ein Verlauf. Er ist markenerhaltend, da das Netz  $N_{\{\}}$  es ist. •$

**Folgerung 4.15** Sind die Markierungen aller mit  $m_0$  beginnenden Verläufe von  $N$  stellenweise beschränkt, so haben diese Verläufe nach Satz 3.9 insgesamt nur endlich viele verschiedene Folgemarkierungen. Es läßt sich entsprechend der vorangegangenen Konstruktion  $m_{0,\{S\}}$  im Netz  $N_{\{\}}$  bilden. Jedem der mit  $m_0$  beginnenden Verläufe im Netz  $N$  läßt sich dann injektiv ein mit  $m_{0,\{\}}$  beginnender, markenerhaltender Verlauf im Netz  $N_{\{\}}$  zuordnen.

**Anmerkung 4.16** Wollte man diese Konstruktionen auf Netze mit abzählbar vielen Stellen, aber endlicher Dimension ausdehnen, so müßte zur Bildung von  $dt$  vorausgesetzt werden, daß jede Transition  $t$  nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten hat. Unter Verwendung einer beliebigen  $T$ -Basis, die wegen der endlichen Dimension des Netzes endlich ist, erkennt man, daß alle Transitionen außerhalb einer endlichen Menge  $S' \subset S$  von 0 verschiedene Komponenten haben. Die Ausdehnung auf Netze endlicher Dimension bringt also hier nichts.

**Beispiel 4.17** Das Netz  $N = (\{b\}, \{a, c\}, (1, -1))$  hat die Dimension 1 und ist nicht markenerhaltend. Die Folgemarkierungen des unendlichen Verlaufs  $0, a, a, a, \dots$  sind nicht beschränkt. Für diesen Verlauf läßt sich nicht die markenerhaltende Konstruktion aus Satz 4.14 anwenden, wohl aber z.B. für den Verlauf  $0, a, c, a, c, a, c, \dots$



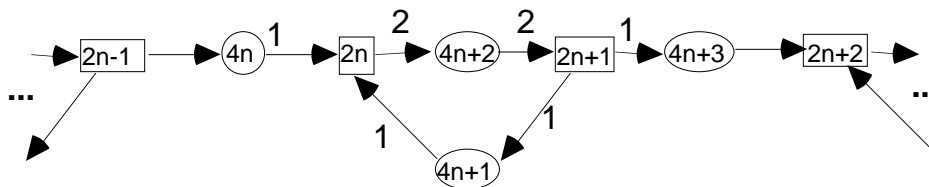
**Beispiel 4.18** Das Netz  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, R)$  mit

$$R_m^n := \begin{cases} -1, & m=2n \\ -1, & m=2n+1 \\ 2, & m=2n+2 \\ 0, & m \text{ sonst} \end{cases} \quad (n, m \in \mathbf{Z}, n \text{ ungerade})$$

und

$$R_m^n := \begin{cases} 1, & m=2n-1 \\ -2, & m=2n \\ 1, & m=2n+1 \\ 0, & m \text{ sonst} \end{cases} \quad (n, m \in \mathbf{Z}, n \text{ gerade})$$

hat unendliche Dimension und ist markenerhaltend.



**RR 4.2** repro-gl muß ne anständige lösung haben, dann anfangsmark hinreichend hochsetzen, so daß die hilfssstelle nichts bremsen kann

Beispielartige sätze aus märzskript, s.4-7

## 5. Erreichbarkeit und Verteilungen

In den beiden vorangehenden Abschnitten haben wir die "Größe" eines Netzes bestimmt, wenn die Verläufe eines Netzes endlicher Dimension oder auch nur eines  $S$ - oder  $T$ -endlichen Netzes gewissen Bedingungen genügen. In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wieweit - bei Markenerhaltung - bestimmte Markierungen erreichbar sind.

**Satz 5.1** Die Dimension  $D$  eines Netzes  $N = (S, T, R)$  endlicher Dimension und mit markenerhaltender Schaltregel ist höchstens  $|S| - 1$ .

**Beweis:** Wegen der Markenerhaltung ist  $dt = 0$  für jede Transition  $t$ , d.h. die Transitionen liegen im Orthogonalraum zu  $d \in \mathbf{Z}^S$ . Weil  $d \neq 0$ , ist  $D \leq |S| - 1$ .

Eng verwandt mit den Sätzen 3.16 und 3.17 ist

**Satz 5.2** Seien  $N = (S, T, R)$  ein Netz endlicher Dimension  $D$  und mit markenerhaltender Schaltregel sowie  $m_0 \neq 0$  eine Anfangsmarkierung von  $N$ .

**NN(a)** Können von  $m_0$  aus alle Markierungen  $m$  mit  $dm = dm_0$  erreicht werden, so ist  $D = |S| - 1$ , d.h.  $N$  ist  $S$ -endlich.

**NN(b)**  $|T| \geq |S|$

**Beweis:** Zu (a) Wegen  $dm_0 \neq 0$  spannen die mit  $dm_0$  multiplizierten Einheitsvektoren den vollen Vektorraum  $\mathbf{Q}^S$  auf; alle Markierungen  $m$  mit  $dm = dm_0$  spannen somit  $\mathbf{Q}^S$  auf. Für eine Folgemarkierung  $m$  eines Verlaufs  $m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  gilt:

$$m = m_i := m_0 + \sum_{j=1}^i t_j,$$

**NN**d.h.  $m$  ist Linearkombination der Transitionenvektoren und von  $m_0$ . Somit ist  $D \geq |S| - 1$ , woraus sich mit Satz 5.1 (a) ergibt.

Der Beweis zu (b) verläuft entsprechend dem von Satz 3.17. •<sup>32</sup>

**Beispiel 5.3** Sei  $S$  eine Menge mit mindestens zwei Elementen,  $T := S \times S - \text{spur}(S \times S)$  und

<sup>32</sup> S.a. B.Baumgarten, Petri-Netze, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990

$$R_s^{(s',s'')} := \begin{cases} 0, & s \neq s', s \neq s'' \\ 1, & s = s' \\ -1, & s = s'' \end{cases}$$

für  $s \in S$  und  $(s',s'') \in T$ . D.h. zu jedem Paar von Stellen gibt es eine Transition, die aus der ersten Stelle eine Marke wegnimmt und in der zweiten eine hinzufügt. Die Schaltregel  $R$  des so gebildeten Netzes  $N := (S,T,R)$  ist markenerhaltend. Die Transitionen können die vorhandenen Marken beliebig verteilen. Die Dimension von  $N$  ist  $|S| - 1$ , wenn  $S$  endlich ist.

**Beispiel 5.4** Sei  $G$  eine additive Gruppe und  $S$  die von einem Element  $g \in G$  erzeugte Untergruppe.  $S$  enthalte mindestens zwei Elemente. Sei  $T^\pm := \{+, -\} \times S$ ,

$$R_s^{+s'} := \begin{cases} -1, & s' = s \\ 1, & s' = g + s \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $R_s^{-s'} := -R_s^{+s'}$  für  $s, s' \in S$ . Zu jeder Stelle dieses Netzes gibt es zwei Transitionen. Die eine (+) schiebt - im Sinn der Gruppenerzeugung - eine Marke zur nächsten Stelle, die andere (-) schiebt eine Marke um eine Stelle zurück. Die Schaltregel  $R^\pm$  des so gebildeten Netzes  $N^\pm := (S, T^\pm, R^\pm)$  ist markenerhaltend. Die Transitionen können die vorhandenen Marken beliebig verteilen. Die Dimension von  $N^\pm$  ist  $|S| - 1$ , wenn  $S$  endlich ist.

**Beispiel 5.5** Seien  $G, S$  und  $R_s^{+s'}$  wie in Beispiel 5.4 und  $T^+ := \{+\} \times S$ . Zu jeder Stelle dieses Netzes gibt es eine Transition, die eine Marke um eine Stelle - im Sinn der Gruppenerzeugung - weiterschiebt. Die Schaltregel  $R^+$  des so gebildeten Netzes  $N^+ := (S, T^+, R^+)$  ist markenerhaltend. Wenn  $S$  endlich ist, können die Marken beliebig verteilt werden. Die Dimension von  $N^+$  ist dann  $|S| - 1$ , außerdem  $|T| = |S|$ .

**Beispiel 5.6** Seien  $G$  und  $S$  wie in Beispiel 5.4 und  $T := S$ .

$$R_s^{s'} := \begin{cases} -1, & s' = s \\ -1, & s' = g + s \\ 2, & s' = 2g + s \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die mit  $R_s^{s'}$  gebildete Schaltregel ist markenerhaltend. Es ist  $|T| = |S|$  und  $\text{rang } R = \dim N = |S| - 1$ , falls  $S$  endlich ist. Die notwendigen Bedingungen nach Satz 5.2 für die beliebige Verteilbarkeit von  $n$  Marken auf den  $|S|$  Stellen sind erfüllt. Die Bedingungen sind aber nicht hinreichend. Von keiner Markierung, bei der z.B. alle Marken in einer Stelle liegen, ist eine weitere erreichbar; ebenso z.B. wenn auf den Stellen  $s + 2ig$  ( $i=0,1,2,\dots$ ) bei geradem  $|S|$  keine Marken liegen.

**Anmerkung 5.7** Die Redeweise "schiebt eine Marke weiter" oder "nimmt Marken weg und gibt sie da und da hin" ist anschaulich, kann aber irreführend sein. Der Markenstand in einer Stelle ergibt sich aus dem Skalarprodukt des Stellenvektors mit dem Häufigkeitsvektor der Transitionen in dem Verlauf, der zu der betrachteten Markierung führte.

## 6. Verlaufsstatistik

Die Transitionen, die in einem Verlauf auftreten, können als Ereignisse verstanden werden, bei denen sich in dem Netz etwas ändert. Diese Ereignisse sind in einer denkbar geringen Weise aneinander gebunden. Ein Ereignis kann eintreten, wenn es die vom vorangegangenen Ereignis



vorgefundene Markenanzahl in keiner Stelle negativ macht. Im folgenden wird untersucht, inwieweit solche Ereignisfolgen (d.h. Verläufe) einer Statistik zugänglich sind.

**Satz 6.1**  $N = (S, T, R)$  sei ein  $T$ -endliches Netz.

NN (a) Es gibt genau dann einen Verlauf  $V = m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ , in dem eine Markierung wiederholt wird, wenn  $R\tau = 0$  eine von 0 verschiedene Lösung mit nicht negativen Komponenten hat, d.h. wenn der Durchschnitt von  $T\text{-Kern}(R)$  mit dem 1. Quadranten mehr als den Nullvektor enthält.<sup>33</sup>

NN (b) Wenn es einen Verlauf gibt, der eine Markierung wiederholt, so gibt es einen unendlichen Verlauf in dem Netz.

**Beweis:** Zu (a) In einem Verlauf  $V_1$  werde die Markierung  $M$  wiederholt; sie werde in den Schritten  $\mu$  und  $\mu'$ ,  $\mu < \mu'$  erreicht, d.h.  $M = m_{\mu'} = m_{\mu}$ . Es ist

$$M = m_{\mu'} = m_{\mu} + \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j = M + \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j,$$

woraus sich bei Umformung von  $\sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j$  ergibt

$$\text{NN } 0 = \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j = \sum_{t \in T} R^t \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} \chi_t(t_j) = \sum_{t \in T} R^t \tau_t = R\tau \text{ mit } \tau := (\tau_t)_{t \in T} \in \mathbf{N}_0^T.$$

Die Komponenten von  $\tau$  geben an, wie oft die Transitionen in dem  $M$  wiederholenden Verlaufsstück vorkommen (s.a. Kap. 3).

Es habe nun umgekehrt  $R\tau = 0$  eine Lösung mit nicht negativen Komponenten. Diese sind rational, da  $R$  ganzzahlig ist; durch Multiplikation mit den Nennern erhält man eine Lösung mit ganzen, nicht negativen Komponenten. Eine solche Lösung  $\tau$  werde jetzt angenommen und eine Ordnung in  $T = \{t, t', t'', \dots\}$ . Die Folge

$$V_2 := M, t, \dots, (\tau_t \text{-mal}) \dots, t, t', \dots, (\tau_{t'} \text{-mal}) \dots, t', t'', \dots, (\tau_{t''} \text{-mal}) \dots, t'', \dots$$

mit

$$M_s := \sum_{t \in T} \tau_t |R_s^t|, \quad M := (M_s)_{s \in S}$$

ist ein Verlauf; er wiederholt  $M$ . Die Anfangsmarkierung  $M_s$  einer Stelle  $s$  ist nicht kleiner als der Markenverbrauch, wenn jede Transition  $t$  im Verlauf  $\tau_t$ -mal vorkommt. Für die am Schluß von  $V_2$  erreichte Markierung  $m_{d\tau}$  ist

$$m_{d\tau} = M + \sum_{j=1}^{d\tau} t_j = M + \sum_{t \in T} R^t \tau_t = M + 0.$$

Wie ersichtlich liefert jede Permutation in der Aufeinanderfolge der Transitionen des Verlaufs  $V_1$  einen weiteren Verlauf, der  $M$  wiederholt.

Zu (b) Durch beliebiges Verketteten von endlichen, eine Markierung wiederholenden Verläufen entstehen unendliche Verläufe. •

<sup>33</sup> K. Lautenbach, Linear Algebraic Techniques for Place/Transition Nets, in [NETS 86 Part I] S. 142-167

Die Umkehrung zu (b) ist im allgemeinen nicht richtig, eine hinreichende Bedingung liefert z. B. Satz 3.9 .

**Anmerkung 6.2** Man erhält aus einem unendlichen Verlauf, wenn er mindestens zwei verschiedene Stücke hat, in denen die gleiche Markierung wiederholt wird, durch Verkettung dieser Stücke weitere unendliche Verläufe. Die Mächtigkeit der so erhaltenen Mengen ist die des Kontinuums. Zum **Beweis** ordnet man jedem dieser Verläufe die  $g$ -adische Darstellung ( $g$  die Anzahl der verschiedenen, eine Markierung wiederholenden Verlaufsstücke) einer reellen Zahl zwischen 0 und 1 zu und umgekehrt.

**Definition 6.3** Zwei Verläufe wiederholen Markierungen linear unabhängig voneinander, wenn die beiden Vektoren linear unabhängig sind, die aus den Häufigkeiten der Transitionen gebildet werden, die jeweils in den die Markierung wiederholenden Verlaufsstücken vorkommen.

**Hauptsatz 6.4** Sei  $N = (S, T, R)$  ein  $T$ -endliches, markenerhaltendes Netz:

NN(a) Sei  $\dim(T\text{-kern}(R)) = 0$ . Dann hat  $N$  keinen unendlichen Verlauf.

NN(b) Sei  $\dim(T\text{-kern}(R)) \geq 1$ , und es gebe einen Verlauf, der eine Markierung wiederholt, aber keine zwei linear unabhängig voneinander Markierungen wiederholenden Verläufe. Dann konvergiert für jeden unendlichen Verlauf  $V = m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  die relative Häufigkeit, mit der eine Transition  $t$  in  $V$  auftritt,

$$6.5 \quad h_{V_i, t} := \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \chi_t(t_j) = \frac{1}{i} H_{V_i, t}$$

für  $i \rightarrow \infty$  gegen eine von  $V$  unabhängige Größe  $h_t$ . Dabei ist  $Rh = 0$  mit  $h = (h_t)_{t \in T}$ .

NN(c) Sei  $\dim(T\text{-kern}(R)) = n \geq 2$ , und es gebe einen Verlauf, der eine Markierung  $M$  so wiederholt, daß alle Transitionen bis auf höchstens eine dabei vorkommen.

Dann gibt es  $n$  linear unabhängig voneinander Markierungen wiederholende (unendliche) Verläufe.

NN(d) Sei  $\dim(T\text{-kern}(R)) = n \geq 2$ , und es gebe einen Verlauf, der eine Markierung  $M$  so wiederholt, daß mindestens zwei Transitionen dabei nicht vorkommen.  $R\tau = 0$  habe außerdem eine Lösung, die für die besagten Transitionen von 0 verschiedene Komponenten mit uneinheitlichem Vorzeichen hat.

Dann gibt es höchstens  $n - 1$  linear unabhängig voneinander Markierungen wiederholende endliche Verläufe.

NN(e) Sei  $\dim(T\text{-kern}(R)) = n \geq 2$ , und es gebe  $k \leq n$  linear unabhängige Lösungen  $\tau^j > 0$  von  $R\tau = 0$

Dann gibt es zu jedem  $\tau^j$  einen Verlauf, dessen relativen Häufigkeiten 6.5 gegen  $h^j := \frac{\tau^j}{d^j}$  konvergieren.

Zu jedem Vektor  $\tau = \sum_{j=1}^k a_j h^j \neq 0$  mit  $0 \leq a_j \leq 1$ ,  $a_j \in \mathbf{Q}$  gibt es einen Verlauf  $V$ , dessen relative Häufigkeiten **6.5** gegen  $\frac{\tau}{d\tau}$  konvergieren.

NN(f) Gibt es mindestens zwei linear unabhängige Lösungen  $\tau' > 0$  und  $\tau'' > 0$  von  $R\tau = 0$ , dann gibt es unendliche Verläufe, deren relative Häufigkeiten **6.5** nicht konvergieren. <sup>34</sup>

NN(g) Für päärchen usw. RR

RR Satz 3.4 verwenden

### Beweis:

Zu (a): Wegen  $\dim(T\text{-kern}(R)) = 0$  sind die Transitionen linear unabhängig. Nach Folgerung 4.9 hat das Netz keinen unendlichen Verlauf.

Zu (b): Falls  $\dim(T\text{-kern}(R)) = 1$  gibt es keine zwei linear unabhängig voneinander Markierungen wiederholenden Verläufe. (Daß es keine zwei linear unabhängig voneinander Markierungen wiederholende Verläufe gibt, kann nach (d) auch bei höherer Dimension des Lösungsraums vorliegen.)

Aufgrund der Markierungswiederholung gibt es unendliche Verläufe. Wegen Markenerhaltung und  $T$ -Endlichkeit erzeugt ein unendlicher Verlauf  $V = m_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  nur endlich viele Markierungen und wiederholt welche unendlich oft. Sei  $M$  eine von  $V$  unendlich oft erzeugte Markierung. Um die Konvergenz der relativen Häufigkeiten  $h_{V_i, t}$  für  $i \rightarrow \infty$  zu zeigen, wird zunächst die Konvergenz einer Teilfolge gezeigt. Seien  $\mu < \mu' < \mu''$  Schritte, bei denen die Markierung  $M$  erreicht wird, d.h.  $M = m_\mu = m_{\mu'} = m_{\mu''}$ . Es gilt

$$h_{V_{\mu', t}} := \frac{1}{\mu'} \sum_{j=1}^{\mu'} \chi_t(t_j) := \frac{1}{\mu'} \left( \sum_{j=1}^{\mu} \chi_t(t_j) + \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} \chi_t(t_j) \right)$$

Mit den Abkürzungen

$$a_t := \sum_{j=1}^{\mu} \chi_t(t_j), \quad \tau_{\mu, t} := \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} \chi_t(t_j) \quad \text{und} \quad \tau_{\mu', t} := \sum_{j=\mu'+1}^{\mu''} \chi_t(t_j)$$

erhält man

$$h_{V_{\mu', t}} := \frac{1}{\mu'} (a_t + \tau_{\mu, t})$$

und

$$h_{V_{\mu'', t}} := \frac{1}{\mu''} (a_t + \tau_{\mu, t} + \tau_{\mu', t}) .$$

Es ist

$$M = m_{\mu'} = m_\mu + \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j = M + \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j,$$

<sup>34</sup> U. Goltz, Synchronic Distance, in [NETS 86 Part I], S. 338-358. In einem Beispiel auf S. 354 f. deutet Goltz den hier allgemein bewiesenen Fall an.

woraus sich bei Umformung von  $\sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j$  ergibt

$$\mathbb{N}\mathbb{N} \quad 0 = \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} t_j = \sum_{t \in T} R^t \sum_{j=\mu+1}^{\mu'} \chi_t(t_j) = \sum_{t \in T} R^t \tau_{\mu,t} = R\tau_{\mu} \text{ mit } \tau_{\mu} := (\tau_{\mu,t})_{t \in T} \in \mathbf{N}_0^T.$$

RR ggf. früher bringen

$$\text{Ebenso findet man } 0 = \sum_{t \in T} R^t \tau_{\mu',t} = R\tau_{\mu'} \text{ mit } \tau_{\mu'} := (\tau_{\mu',t})_{t \in T} \in \mathbf{N}_0^T.$$

Nach Voraussetzung sind zwei im 1. Quadranten liegende Lösungen der Gleichung  $R\tau = 0$  linear abhängig, sie unterscheiden sich deshalb nur um einen (skalaren) Faktor. Somit  $\tau_{\mu'} = \alpha\tau_{\mu}$  und

$$h_{V\mu'',t} := \frac{1}{\mu''}(a_t + \tau_{\mu,t} + \alpha\tau_{\mu,t}).$$

Nach Definition ist  $\mu'' - \mu' = d\tau_{\mu'} = \alpha d\tau_{\mu} = \alpha \sum_{t \in T} \tau_{\mu,t}$ , also  $\alpha = \frac{\mu'' - \mu'}{\sum_{t \in T} \tau_{\mu,t}}$  und

$$h_{V\mu'',t} := \frac{a_t + \tau_{\mu,t}}{\mu''} + \frac{\mu'' - \mu'}{\mu''} \frac{\tau_{\mu,t}}{\sum_{t \in T} \tau_{\mu,t}}.$$

Bei festem  $\mu$  und  $\mu'$  konvergiert dieser Ausdruck mit wachsendem  $\mu''$  gegen  $h_{\mu,t} := \frac{\tau_{\mu,t}}{\sum_{t \in T} \tau_{\mu,t}} \geq 0$ .

$h_{\mu} := (h_{\mu,t})_{t \in T} \geq 0$  erfüllt die Gleichung  $Rh_{\mu} = 0$ . Wegen der vorausgesetzten Eindimensionalität dieser Lösungen und seiner Normierung ist  $h_{\mu}$  unabhängig von  $\mu$ . Für die genannte Teilfolge ist somit (b) bewiesen.

Der Abstand zweier Schritte  $\mu''$  und  $\mu'''$ ,  $\mu'' < \mu'''$ , bei denen  $M$  erreicht wird, dazwischen aber nicht, ist wegen der endlichen Anzahl der Markierungen des Verlaufs  $V$  beschränkt, also  $\mu''' - \mu'' \leq c$ . Mit  $\mu'' < i < \mu'''$  ist

$$h_{Vi,t} := \frac{1}{i} \left( \mu'' h_{V\mu'',t} + \sum_{j=\mu''+1}^i \chi_t(t_j) \right)$$

woraus

$$\begin{aligned} |h_{Vi,t} - h_{V\mu'',t}| &= \left| \frac{\mu'' h_{V\mu'',t} - i h_{V\mu'',t}}{i} + \frac{\sum_{j=\mu''+1}^i \chi_t(t_j)}{i} \right| \\ &\leq \frac{h_{V\mu'',t}}{i} |\mu'' - i| + \frac{\sum_{j=\mu''+1}^{\mu'''} \chi_t(t_j)}{i} \\ &\leq \frac{h_{V\mu'',t}}{i} c + \frac{c}{i} \leq \frac{2c}{i}. \end{aligned}$$

Diese letzte Schranke geht mit wachsendem  $i$  gegen 0, woraus sich (b) ergibt.

Zu (c):  $\tau^j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) seien  $n$  linear unabhängige, ganzzahlige Lösungen von  $R\tau = 0$ ,  $\tau^j$  sei die zu dem vorausgesetzten Verlauf gehörende Lösung. Es ist  $\tau^j > 0$  und  $\tau^j_{t'} = 0$  für höchstens ein  $t' \in T$ . Sei

$$\mathbf{t} := \max_{\substack{j=2, \dots, n \\ t' \in T}} \left| \tau^j_{t'} \right| .$$

Die Vektoren  $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^n$  mit

$$\tau^{j'} := \mathbf{t}\tau^j + \begin{cases} \tau^j, & \tau^j_{t'} \geq 0 \\ -\tau^j, & \tau^j_{t'} < 0 \end{cases} \quad (j = 2, \dots, n)$$

sind nach Konstruktion  $> 0$  und linear unabhängig. Zu jedem  $\tau^j$  gibt es nach Satz 6.1 einen endlichen Verlauf, der mit  $\tau^j$  als Häufigkeitsvektor eine Markierung wiederholt. Durch fortwährendes Verketteten erhält man daraus einen unendlichen Verlauf.

Zu (d):  $\tau^j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) seien  $n$  linear unabhängige, ganzzahlige Lösungen von  $R\tau = 0$ ,  $\tau^j$  sei die zu dem vorausgesetzten Verlauf gehörende Lösung. Es ist  $\tau^j > 0$  und  $\tau^j_{t'} = \tau^j_{t''} = 0$  für mindestens zwei  $t', t'' \in T, t' \neq t''$ .  $\tau^2$  sei die vorausgesetzte Lösung mit  $\tau^2_{t'} \tau^2_{t''} < 0$ .

RR 6.4 c keine echte lin komb aus  $\tau^1$  und  $\tau^2$  liefert einen verlauf. kann aber  $\tau^2$  durch die ändern zu einem verlaufsvektor werden?? Matrix einer basistrafo, welche eigenschaften hat sie ? Ihre det? diagonalform? spur?

wie geht der beweis? Sätze 3.4 und 3.15 verwenden.

Zu (e): Entsprechend dem Beweis zu Satz 6.1 konstruiert man zu jedem  $\tau^j$  einen zunächst endlichen Verlauf, der - wie leicht ersichtlich - durch fortwährende Verkettung zu einem unendlichen ausgedehnt werden kann. Entsprechend dem Beweis zu (b) ergibt sich die Konvergenz der relativen Häufigkeiten gegen  $h^j := \frac{\tau^j}{d\tau^j}$ .

Sei  $\tau = \sum_{j=1}^k a_j \tau^j \neq 0$  mit  $0 \leq a_j \leq 1, a_j \in \mathbf{Q}$ . Es ist  $R\tau = 0$  und  $0 < \tau \in \mathbf{Q}^T$ . Somit ergibt sich wie im

Vorstehenden ein Verlauf, dessen relative Häufigkeiten gegen  $h := \frac{\tau}{d\tau}$  konvergieren.

Zu (f): Entsprechend dem Beweis zu Satz 6.1 konstruiert man zu  $\tau'$ , bzw.  $\tau''$  endliche Verläufe  $V'$ , bzw.  $V''$ , die eine Anfangsmarkierung  $M'$ , bzw.  $M''$  wiederholen. Die Folge der Transitionen in  $V'$ , bzw.  $V''$  sei mit  $a$ , bzw.  $b$  bezeichnet. Man setze  $M := M' + M''$ .

$$V := M, a \text{ } b \text{ } a \dots 3\text{-mal} \dots a \text{ } b \dots 6\text{-mal} \dots b \text{ } a \dots 12\text{-mal} \dots a \text{ } b \dots 24\text{-mal} \dots b \dots$$

sei die Folge, in der nach dem Anfang  $abb$  die Folge  $a$ , bzw. die Folge  $b$  jeweils so oft wiederholt wird, wie zuvor beide insgesamt vorgekommen sind.  $V$  ist ein Verlauf, da  $M$  so hoch gewählt ist, daß sowohl  $M, a$  als auch  $M, b$  Verläufe sind, die  $M$  wiederholen. Mit  $\tau^a := \tau' + 2\tau''$  und  $\tau^b := 2\tau'$

+  $\tau''$  findet man, daß die relativen Häufigkeiten von  $V$  die zwei Häufungspunkte  $\frac{\tau^a}{d\tau^a}$  und  $\frac{\tau^b}{d\tau^b}$

haben. Damit konvergieren die relativen Häufigkeiten von  $V$  nicht. •

RR v.d.waerden II, s 6: jedes lin diophant glsystem  $\sum_k a_{ik} x_k = b_i$  mit ganzen a's und b's ist durch unimodulare trafo in die gestalt

$$e_i h_i = g_i \quad (i=1, \dots, r; e_i \neq 0),$$

$0=d_j$  ( $j=r+1, \dots, m$ )  
 transformierbar. Lösbar wenn

$$g_i=0(e_i); d_j=0.$$

Die  $h_i$  mit  $i \leq r$  sind bestimmbar, die übrigen  $h_j$  willkürlich. Die  $x_k$  sind lineare ganzzahlige Funktionen der willkürlichen  $h_j$ .

Hauptsatz für zyklische Gruppen.

**Anmerkung 6.6** Wenn die Häufigkeitsvektoren aller Verläufe durch Multiplikation auseinander hervorgehen, d.h. im Fall (b), dann besteht ein Gesetz der großen Zahlen für die im Netz beobachtbaren Verläufe. Es unterscheidet sich jedoch erheblich vom Gesetz der großen Zahlen aus der Maßtheorie. Für jeden dieser Verläufe konvergieren *stats* die relativen Häufigkeiten, mit denen das Auftreten von Transitionen (Ereignissen) beobachtbar ist. In der Maßtheorie konvergieren *fast immer* die relativen Häufigkeiten der Ereignisse; es gibt Beobachtungsreihen, für die keine Konvergenz vorliegt, und die Menge dieser Beobachtungsreihen hat das Maß 0, was aber nicht heißt, daß sie die leere Menge ist, sondern in der Regel ebenso wie die Menge der Beobachtungsreihen *mit* Konvergenz die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Wenn die Häufigkeitsvektoren aller Verläufe einen mehrdimensionalen Raum aufspannen, d.h. Fälle (e) und (f), so besteht überhaupt kein Gesetz der großen Zahlen. Es gibt Verläufe, deren relative Häufigkeiten konvergieren, wobei jeder (rationale) Grenzwert zwischen 0 und 1 möglich ist. Für andere Verläufe gibt es keinen Grenzwert. Anders als beim maßtheoretischen Gesetz der großen Zahlen ist keine der Mengen, in die sich die Verläufe nach ihren statistischen Eigenschaften sortieren lassen, durch irgendein Maß vor den andern ausgezeichnet. Zwei Personen können mit gleichem "Recht" reklamieren, daß die Häufigkeiten der Transitionen eines noch zu beobachtenden Verlaufs gegen eigens gewählte Größen konvergieren. Mit gleichem Recht dürfen sie nicht enttäuscht sein, wenn sich statistisch etwas ganz anderes einstellt, vor allem ist aus einem endlichen Verlaufsstück nichts über die weitere Zukunft ableitbar, auch nicht mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Es kann sich noch jede andere Statistik einstellen, wenn überhaupt Konvergenz vorliegt.

Anschaulich liegt dies daran, daß kein noch so kluger Dämon in dem Netz irgendeinen Anhalt findet, wie eine bestimmte Markierung erreicht wurde. Dies zu wissen wäre nötig, um ab irgendeinem Schritt des beobachteten Verlaufs für Konvergenz der relativen Häufigkeiten zu sorgen. Wenn eine Markierung wiederholt wird, so ist die Geschichte, die zu dieser Wiederholung führte, "vergessen". Alle möglichen Alternativen, die diese Markierung wiederholen lassen, haben völlig gleiche Chancen, sie sind aber nicht gleichwahrscheinlich. Eine Wahrscheinlichkeit enthält *immer* die Vorstellung, aus früheren Beobachtungen für die Zukunft eine Vorhersage treffen zu können, deren Eintreffen zwar nicht sicher, aber eben doch "wahrscheinlich" ist.<sup>35</sup> Dies setzt voraus, daß in dem System, für das etwas prophezeit wird, ein innerer Feinmechanismus in einer Weise wirkt, daß seine Geschichte soweit nachvollziehbar bleibt und eine äußere grobe Wahrscheinlichkeit für künftiges angebar ist. Die theoretischen Grundlagen hierfür sind in der Ergodentheorie gelegt. Physikalische Geschehnisse - das zeigt sich - lassen sich nur dann in einem

---

<sup>35</sup> R. Carnap, Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit, Springer Verlag Wien

endlichen Netz - trotz Nebenläufigkeit - modellieren, wenn man in dem physikalischen Geschehen jeden Wahrscheinlichkeitsvorgang ausschließt, es sei denn die Dimension des "positiven"  $T$ -Kerns ist 1, welches eine gewichtige Forderung an die Struktur des Netzes darstellt.

Den Beweisen entnimmt man auch, daß es neben den Verläufen, deren Existenz gezeigt wurde, i.a. weitere, weniger einfach gestaltete, mit den gleichen Eigenschaften gibt.

**Beispiele 6.7**  $N = (S, T, R)$  sei ein Netz.

**NN(a)** Sei  $|S| = 1$ . Dann gibt es keine markenerhaltende Schaltregel  $R \neq 0$ , da  $\dim N = |S| - 1 = 0$  nach Satz 5.1 .

**NN(b)** Sei  $|S| = 2$ . Es gibt markenerhaltende Schaltregeln. Die markenerhaltenden Transitionen  $R^t$  spannen einen 1-dimensionalen Raum auf, d.h.  $R^t = b^t R^0$ ,  $b^t \in \mathbf{Q}$ ,  $t \in T$  und  $R^0$  eine beliebige, feste markenerhaltende Transition des Netzes. Nach Satz 2.18 ist  $\dim(T\text{-kern}(R)) = |T| - 1$ .

Für  $|T| = 1$  ist  $\dim(T\text{-kern}(R)) = 0$ , und es gibt keinen unendlichen Verlauf.

Für  $|T| = 2$ , d.h.  $T = \{t, t'\}$ , ist  $t = \frac{a}{b} t'$  mit  $a \in \mathbf{Z}$  und  $b \in \mathbf{N}$ . Ist  $a < 0$ , so gibt es bei hinreichend hoher Anfangsmarkierung unendliche Verläufe. Für diese konvergiert die relative Häufigkeit von  $t$ , bzw.  $t'$  gegen  $\frac{b}{-a+b}$ , bzw.  $\frac{-a}{-a+b}$ . Gehen dagegen  $t$  und  $t'$  mit einem positiven Faktor auseinander hervor, so gibt es keine unendlichen Verläufe. (Zur Markenwiederholung müßte eine der Transitionen mit negativer Anzahl vorkommen.)

Für  $|T| = 3$  ist  $\dim(T\text{-kern}(R)) = 2$ . Bezogen auf das Vorzeichen der Koeffizienten gibt es nur zwei wesentlich verschiedene Schaltregeln, nämlich

$$R_+ = \begin{pmatrix} +a & +b & +c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad R_{\pm} = \begin{pmatrix} +a & +b & -c \\ -a & -b & +c \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbf{N}).$$

$R_+ \tau = 0$  hat keine Lösung  $\tau = (\alpha, \beta, \gamma) > 0$ ; es müßte nämlich  $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$  bei lauter positiven Summanden sein. Dagegen hat  $R_{\pm} \tau = 0$  z. B. die zwei linear unabhängigen Lösungen  $\tau_a = (c, 0, a) > 0$  und  $\tau_b = (0, c, b) > 0$ . Bei ausreichend hoher Anfangsmarkierung ist bei diesem Netz mit keinem Mittel - auch nicht in Wahrscheinlichkeit - vorhersagbar, mit welchen relativen Häufigkeiten die einzelnen Transitionen in einem unendlichen Verlauf auftreten werden.

Entsprechend findet man für  $|T| \geq 4$ , daß es keinen markenerhaltenden Verlauf gibt, wenn ein Stellenvektor nur positive Komponenten hat. Sind die Vorzeichen der Komponenten gemischt, so gibt es maximal viele, d.h.  $|T| - 1 (= \dim(T\text{-kern}(R)))$  linear unabhängige Verläufe.

**NN(c)** Sei  $|S| = 3$ . Für ein markenerhaltendes Netz ist  $|T| \geq 3$ . Es gibt markenerhaltende Transitionen. Sie spannen einen 1- oder 2-dimensionalen Raum auf. Im ersteren Falle ist  $\dim(T\text{-kern}(R)) = |T| - 1$ , und je zwei der Stellenvektoren stellen sich als ein Vielfaches des dritten Stellenvektors  $s$  dar, d.h.

$$\begin{aligned} R_1 = s \otimes (1, \alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} s_t & s_{t'} & s_{t''} & \dots \\ \alpha s_t & \alpha s_{t'} & \alpha s_{t''} & \dots \\ \beta s_t & \beta s_{t'} & \beta s_{t''} & \dots \end{pmatrix}, & 1 + \alpha + \beta = 0 \text{ und } t, t', t'', \dots \in T \\ &= \begin{pmatrix} s_t & s_{t'} & s_{t''} & \dots \\ \alpha s_t & \alpha s_{t'} & \alpha s_{t''} & \dots \\ -(\alpha+1)s_t & -(\alpha+1)s_{t'} & -(\alpha+1)s_{t''} & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die einzige bestimmende Gleichung einer Lösung von  $R\tau = 0$  ist  $s\tau = 0$ . Ist  $s > 0$  oder  $s < 0$ , so gibt es keinen einen Markierung wiederholenden Verlauf in dem Netz. Sind die Vorzeichen der Komponenten von  $s$  gemischt, so kann man wie unter (b)  $|T| - 1$  linear unabhängige, nicht negative Lösungen von  $R\tau = 0$  angeben. Schaltregeln dieser Art gehen durch Multiplikation von links mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  in solche des Typs (b) über. Diese lineare Abbildung, bei der zwei Stellen mit einer verschmolzen werden, ist surjektiv.

Falls die Transitionen ( $|T| \geq 3$ ) einen 2-dimensionalen Raum aufspannen, stellt sich der dritte Stellenvektor  $s''$  als Linearkombination der beiden andern, linear unabhängigen  $s$  und  $s'$  dar, bei Markenerhaltung  $s'' = -(s + s')$ .  $R\tau = 0$  ist somit gleichbedeutend mit  $s\tau = 0$  und  $s'\tau = 0$ . Haben die Komponenten von  $s$  und von  $s'$  jeweils gemischte Vorzeichen, so gibt es eine Lösung mit  $\tau > 0$ , sonst nicht. Umgekehrt gibt es zu jedem  $\tau > 0$  mit ganzzahligen Komponenten zwei linear unabhängige Stellenvektoren  $s$  und  $s'$  mit  $s\tau = 0$  und  $s'\tau = 0$ . Zusammen mit dem Stellenvektor  $s'' := -(s + s')$  bilden diese ein markenerhaltendes Netz, das für eine hinreichend hohe Anfangsmarkierung  $\frac{1}{\tau}$  unendliche Verläufe besitzt. Die relativen Häufigkeiten dieser Verläufe konvergieren gegen  $\frac{1}{\tau}$ .

NN(d) Sei  $|S| = 4$ . Für ein markenerhaltendes Netz ist  $|T| \geq 4$ . Die (markenerhaltenden) Transitionen spannen einen 1-, 2- oder 3-dimensionalen Raum auf. Der 1-dimensionale Fall entspricht dem unter (c) behandelten 1-dimensionalen. Der 3-dimensionale Fall entspricht dem unter (c) behandelten 2-dimensionalen.

**vermutung:** Sei  $|S| \geq 3$ . Ist  $\dim N = 1$ , d.h. minimal, so gibt es  $|T|-1 \geq |S|-1$  linear unabhängige Verläufe, d.h. maximal viele, wenn es überhaupt einen gibt. Durch sukzessives verschmelzen zweier stellen kann dieser fall auf beispiel (b) zurückgeführt werden.

Zu einem  $|T|$ -dim häufigkeitsvektor gibt es immer ein Netz mit nicht mehr transitionen als stellen, dessen sämtliche verläufe den häufigkeitsvektor liefern. (markenerhaltung vorausgesetzt)

RR6 Beispiele für a ... f bringen (s.16.9.92,s.1 oben

s.a.Silva ,advances in netz 89, s.74-95

Mit synchronieabstand verbinden

RR6 endliches?

März-skript: müßte für netze endlicher dim gelten! Problem bei  $R\tau=0$ , wenn  $T$  abzählbar. Dann steht unendliche summe aus ganzen zahlen, d.h. kann nicht absolut konvergent sein: Die reihenfolge der  $t \in T$  wird wichtig,  $T$  muß geordnet sein, was immer das heißen mag! Was heißt das für ein elektron???

netze wo jede transi nur endl viele zustände verbindet ,aber sonst abzählb., solche netze induktiv behandeln: weitere zustände, weitere transis, die das neue mit dem alten verbinden.

Schaltfolgensprache, etikettensprachen, dto mit zielmarkierung, erreichbarkeitsanalyse (Baumgarten, Starke, Silva) U. Goltz, Synchronic Distance in LNCS 254, S. 254 ff.



wenn schaltfolgensprache normalteiler u.ä. entspricht ist dann syntaxanalyse (sackgassen) eine teilbarkeitsfrage (s. euklidischer algorithmus) (s. verbindung zu graphen, westerholz) Reihenfolge disput Schwarz - Pommaret

netze endl. dim: heißt das, daß kreise nur endl lang sein können? kreis in dem sinn, daß eine abtransportierte marke wieder zurückkommen kann. s. beispiel 5.5

sind bei markenerhaltung nur s-endliche und netze unendlicher dimension interessant? was bei letzteren?

RR4 s.a. Baumgarten, s.176:

lemma von Farkas: Aus, kein  $m \in \mathbb{N}^S$  erfüllt  $mR \leq 0$ , folgt, ein  $f \in \mathbb{N}^T$  erfüllt  $Rf > 0$  ( $N$  ohne 0).

strukt.bschränkt g.d.w.  $mR \leq 0$  mit einem  $m \in \mathbb{N}^S$ . (strukt beschr.: bei jedem  $m_0$  beschränkt. aber welche schranke?, s.163)

repetitiv g.d.w.  $\exists f \in \mathbb{N}^T$  mit  $Rf \geq 0$ . (rep.: zu jedem  $m_0$  gibts verlauf, in dem alle  $t$  vorkommen, s. 163))

RR 5.2 Man muß die 1 herstellen können (beispiel 5.x). Krückeberg, Jaxy

RR 4.13 Im späteren wird genauer darauf eingegangen, wann Verläufe in  $N$  in einer natürlichen Weise eineindeutig mit Verläufen in  $N_{\setminus \{t\}}$  verbunden werden können.

Rest 6.2 um in einem netz unendlicher dim statistik treiben zu können, müssen die unendl. vielen transis unendl oft in einem verlauf vorkommen. In jedem endl anfang des verlaufs kommen aber "fast gar keine", d.h. nur endl viele vor. Es gibt eine folge von  $t$ 's, in denen unendl viele unendl oft vorkommen, indem man im folgenden schema diagonal durchgeht.:

$t_1, t_2, t_3, \dots$

$t_1, t_2, t_3, \dots$

$t_1, t_2, t_3, \dots$

...

...

Diese folge kann bei geschickter festlegung der  $t_i$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) ein verlauf werden, die negativ indizierten  $t$  werden absteigend, die andern aufsteigend durchlaufen (0,-1,01,-1-2,012,-1-2-3,...):

$\dots \circ \rightarrow \oplus \rightarrow \circ \rightarrow \oplus \rightarrow \circ \rightarrow \oplus \rightarrow \circ \rightarrow \oplus \rightarrow \circ \dots$  mit  $m = (\dots, 1, 1, 1, \dots)$

Die negativ indizierten schaffen wieder eine marke nach  $s_0$ , damit  $t_0$  usw. weiterlaufen können.

Der markenstand ist stellenweise beschränkt. Wenn aus dem negativen  $n$  marken nach  $s_0$  gelegt wurden, dann sind diese mit ende des laufenden positiven diagonalschritts gleichmäßig bis nach  $s_{n-1}$  verteilt. Im positiven ist der markenstand  $\leq 2$ , bei 0 ist er  $\leq 3$  und im negativen  $\leq 1$ . Im negativen leert er sich vollständig, im positiven füllt er sich auf 2.

Jede im positiven und negativen unendlich viele stellen belegende markierung liefert entsprechende verläufe, in denen jede transi unendl oft vorkommt, auch wenn die belegung lückenhaft ist.

RR 6.4 Fairness, synchronieabstand (Goltz), zum Hauptsatz über relative häufigkeiten.

## 7. Verteilungsstatistik

## einstein-bose,maxwell-boltzmann, Fermi (c kugeln auf n kisten verteilen) Knopp Sönthgen

Boltzmann maschine: ein sich selbst überlassenes system läuft in thermodynamisches minimum. Zustände sind Gibbs (boltzmann) verteilt.(aus neuronetze,gmd,12.10.90, Lischka, modelle kommen aus fysik, simulation von vielteilchensystemen )

### 8. Bezüge zur Quantenphysik

schrödinger dgl., weitzel, landau zu den statistiken, aachener diss zu 2-dim elektronengas .Jede transi greift nur auf endlich viele, nahewirkung. Zustandsänderung immer nur zwischen zweien,physik?induziert das ordnung?

feinmann diagramm?

selbstbezügliches netz (DerGrafiker) mit  $S=T$  bei strömung (volumenelementmethode)? Einheit (dialektik) von inhalt und form?

### 9. Bezüge zur Ergodentheorie

vordergründig-statistisch, hintergründig-differentiell, integrabilitätsbeding. der konti-gl, hamilton, tiefgründig-philosophisch-politisch gleich-wahrscheinlich gegen gleich-berechtigt, statistik braucht inneren mechanismus, im netz gibts nur die markenverteilung und die dadurch möglichen schaltungen, die jeweilige verteilung ist alles, was von der geschichte geblieben ist. s. lin. abb von netzen, s. anmerkung in kap. 6

### 10. Bezüge zur Differentialrechnung

Pommaret, janet-spencer-folge, involution, 2-azyklizität, weiterdifferenzieren einer dgl: paßt das zu einer folge von erweiterten netzen? differenzieren und einsetzen: per netz darstellen?

wenns dazu ne kanonische form gäbe. wie, wenn stelle ein netz wird

was bedeuten solche netzmorphismen linear-algebraisch, umgekehrt: was bedeutet ne lin abb.  $\mathbf{Z}^S \otimes \mathbf{Z}^T \rightarrow \mathbf{Z}^{S'} \otimes \mathbf{Z}^{T'}$  in netzen (s.reste), Puppe s. reste, Silva?

10.1 selbstbezüglich? Wenn dann z.b.  $R \in \mathbf{Z}^S \otimes \mathbf{Z}^{S^*}$ ?????????

### 11. Bezüge zur Graphentheorie

Auf s. 34 definiert w.<sup>36</sup> einen mehrstelligen graph  $G=(A,R)$ , was nichts anderes als ein petrinetz  $(A,R,R')$  mit  $R'_a=1$  falls  $a \in r$  und  $=0$  sonst.(Dabei ist nach def.  $r \in R$  gdw  $r \subset A$ .) Der darstellungssatz bei w. auf s. 37 macht genau das. Eine kante wird dabei als ungerichtet verstanden, was unschädlich ist, da mit  $G$  keine petriprozesse verbunden werden.

Die isomorphie nach s. 42 bei w. ist gleichbedeutend damit, daß die schaltregeln durch spalten- und zeilenvertauschungen auseinander hervorgehen. Diese vertauschungen werden durch multiplikation von rechts oder links mit einheitsmatrizen erreicht, deren spalten und zeilen entsprechend vertauscht sind. Das sind aber unimodulare matrizen (s. Wolfgang Gröbner, matrizenrechnung, bi

<sup>36</sup> Ursula Westerholz, Erkennung isomorpher Switch-Level-Schaltungen bei der automatischen CMOS-Layout-Generierung, GMD-Studie 200, Selbstverlag, Bonn, Januar 1992, ISBN 3-88457-200-8

hochschultaschenbücher, Mannheim 1966, s. 187 f.) Die Matrizen isomorpher Graphen gehen also durch unimodulare Transformationen auseinander hervor, d.h. sie sind unimodular äquivalent, was gleichbedeutend damit ist, daß sie gleiche Elementarteiler besitzen. Dies bedeutet, daß zwei Graphen nicht isomorph sind, wenn ihre Matrizen nicht die gleichen Elementarteiler besitzen.

Nach Gröbner s. 185 (Hilfssatz) gibt es weitere unimodulare Matrizen als die Vertauschungen, insbesondere auch mit von 0 und  $\pm 1$  verschiedenen Elementen. Ob nun Graph-Matrizen (haben nur 0 und 1) durch solche anderen Matrizen ineinander überführt werden können, ohne es auch durch Vertauschungen zu werden, ist mir unbekannt.

NNW. benutzt mehrstellige Graphen, was dazu führt, daß die Grundmenge (Körper ??) komplizierter als  $\{0,1\}$  ist.

NNW. will automatisch Layout generieren aus Switch-Level. Hierzu hat sie Bibliothek von Zellen und deren s-1 Darstellung  $g_i$ . Wenn man weiß, wie sich die Schaltung aus den s-1's der Zellen zusammensetzt, kann man das Layout der Schaltung G entsprechend aus dem der Zellen zusammensetzen. Hierzu ist zu prüfen, welche der Zellen wo in der Schaltung "vorkommen", d.h. welche Zellen monomorph (ggf. mehrfach) in die Schaltung abgebildet werden können. (Monomorphie entsprechend der Isomorphie). Wenn eine Zelle "hineinpaßt", muß sie "abgezogen" werden, um die Prüfung für die anderen zu machen. Das führt aber auf einen großen Baum! Das ist so, als wollte man die Teilbarkeit von  $n \in \mathbf{N}$  durch  $k, \dots, m \in \mathbf{N}$  durch alle möglichen Kombinationen der Subtraktion von k und m klären! **Ergebnis:** der Algorithmus von w. zur Auffindung einer Darstellung der Schaltung durch eine Linearkombination der Zellen führt auf eine Lösung des Gleichungssystems  $G = \sum \epsilon_i g_i$ , wobei G der große und die  $g_i$  die kleinen Graphen und  $\epsilon_i$  gesuchte, gemeinsam Zeilen- und Spaltenvertauschte Einheitsmatrizen sind. (die  $g_i$  sind durch Nullen zur Knotenzahl von G aufgefüllt.) Was die Darstellung als Polynom und Division nach Euklid bringt, ist offen, wie am Beispiel  $x^3+x^2+x (=11010)$ , die anderen Zeilen 0) und  $x+1 (=11)$  und die zweite Zeile 0) zu sehen ist:  $x+1$  paßt rein und es bleibt ein Rest, nämlich  $(x^3+x^2+x):(x+1) = x^2$  Rest  $x$ . Das Divisionsergebnis ist eine reine Potenz von x. Wenn echt 2-dimensional, ist es  $x^n y^m$  (wie geht die Division?), wenn durch bloßes Verschieben die Deckung erfolgt.

Darstellungstheorie, alle Gruppen mit genau n Elementen sind zueinander isomorph!, Normalteiler, Moduln über Körper der Charakteristik n. Das alles in Betracht ziehen.

Der Versuch, die Assoz-Matrix einfach als 2-adische Entwicklung aufzufassen und dann zu

dividieren, führt nicht auf Teilbarkeit, wenn auch der kleinere Graph in den größeren paßt. z.B.  $\begin{pmatrix} 0100 \\ 1010 \\ 0101 \\ 1010 \end{pmatrix}$

und  $\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$ . Umgekehrt teilt in diesem Sinne  $\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$ . (=6) den Graph  $\begin{pmatrix} 0001 \\ 0101 \\ 1011 \\ 1010 \end{pmatrix}$  (=sechstausend) mit dem

Faktor Tausend =  $\begin{pmatrix} 0000 \\ 0011 \\ 1110 \\ 1000 \end{pmatrix}$ . (Rechnung überprüfen) Das ganze hat also so banal nichts mit Division zu

tun. Die gewählte Einbettung in die Zahlen entspricht einer Einbettung in Polynomring  $\mathbf{Z}[x]$ , evtl. muß man mit  $\mathbf{Z}[x,y]$  versuchen, um dem Matrixcharakter gerecht zu werden.

In der Graphentheorie <sup>37</sup> wird gezeigt, daß ein Graph durch seine *assozierte Matrix*  $M$  charakterisiert werden kann. Es ist  $M \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^{X \times X}$ , wenn  $X$  die Knotenmenge des Graphen ist. Dabei ist  $M_{xy}$  die Anzahl der von  $x$  direkt nach  $y$  verlaufenden Kanten. Bei *Schleifenfreiheit* des Graphen, d.h. wenn es keinen Knoten gibt, zu dem selbst eine Kante führt, läßt sich dem Graphen einfach und injektiv das (schleifenfreie) Netz  $(X, X, E-M)$  zuordnen. Diese Zuordnung ist eine affine Abbildung von  $\mathbf{Z}^{X \times X}$  nach  $\mathbf{Z}^{X \times X}$ . Umgekehrt kann einem Netz  $(S, T, R)$  ein Graph zugeordnet werden, jedoch nicht so einfach:  $R$  läßt sich eindeutig zerlegen in  $R = R^+ + R^-$  mit  $R^+ \geq 0$  und  $R^- \leq 0$ . Unter der (unwesentlichen) Voraussetzung  $S \cap T = \emptyset$  setzt man für die Knotenmenge  $X = S \cup T$  und für die assoziierte Matrix,

$$11.3 = \begin{pmatrix} 0 & R^+ \\ -R^- & 0 \end{pmatrix} \quad (M \text{ ist als Übermatrix geschrieben})$$

(# bedeutet hierin die Bildung der Transponierten einer Matrix.)

Graphen, deren assoziierte Matrix die vorstehende Form hat, heißen bipartit oder bichromatisch. <sup>38</sup> Umgekehrt läßt sich nach vorstehender Konstruktion jedem bipartiten Graphen  $(X_1, X_2, M)$  ( $M$  seine assoziierte Matrix) eineindeutig ein Netz  $(X_1, X_2, R)$  zuordnen. Die Zuordnung induziert eine surjektive lineare Abbildung von  $\mathbf{Z}^{X \times X}$  auf  $\mathbf{Z}^{X_1 \times X_2}$  ( $X_1 \cup X_2 = X$ ) die nicht injektiv sein kann, bei Einschränkung auf assoziierte bipartite Matrizen es aber ist.

Netzisomorphismus bei Bernd Baumgarten, Petri-Netze, bi wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1990, s. 57 ist wie graphisomorphismus definiert. Was ist, wenn die schaltregeln unimodular äquivalent sind, aber nicht vertauschungsäquivalent? Gibts den fall überhaupt, weil die vertauschungen..... **Beispiele** probieren s. auch die tensorüberlegungen.

Die matrizen

$$11.4, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 19 & 1 \end{pmatrix} \text{ fehler!!!!!!}$$

sind nach Gröbner konstruiert und unimodular. Die inversen sind

$$11.5, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, 0$$

Graphen drücken nur eine statische, "ruhende" oder dauerhafte Beziehung zwischen den Einzelteilen, den Knoten und Kanten aus. Wenn ein Vorgang dargestellt wird, so als ein immerwährender, gleichartiger, nicht zerlegter oder zerlegbarer Vorgang, der keine Schwankungen aufweist; die Schwankungen gemessen zwischen einzelnen Bereichen des Graphen. Z.B. beschreiben die Graphen bei W. den dauerhaft vorhandenen Chip mit seinen Transistoren und Leitungen, sie werden nicht benutzt, um auch die Dynamik auf oder in dem Chip zu beschreiben, wenn er in Betrieb genommen wird. Ein Transportgraph beschreibt einen dauernden Fluß von Mengen (Menge im landläufigen Sinn) von Stoffen, z.B. Transport von Kohle und Erz auf einem

<sup>37</sup> Wir beziehen uns auf das Standardwerk von Claude Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1970. Ein Graph besteht aus einer Menge  $X$  von *Knoten* und einer Menge  $U$  von *Kanten* zwischen diesen.

<sup>38</sup> Un graphe est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes  $X_1$  et  $X_2$  de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Il se note parfois  $G = (X_1, X_2, U)$ . ( $U$  ist die Menge der Kanten) a.a.O. S. 7.

Kanalsystem. Dabei wird nicht modelliert, daß diese Güter in einzelnen Schiffen, Containern, Waggons, Lkws, Gebinden usw. zu einzelnen, bestimmbar Zeiten transportiert werden und daß es dabei zu Engpässen kommen kann. Diese Dynamik wird erst in einem Petrinetz dargestellt, bzw. sie kann, wenn das Transportsystem als bipartiter Graph vorliegt, aus diesem Graphen entnommen werden, wenn er als Petrinetz verstanden wird. Dieses Verständnis ergibt sich sofort, wenn anhand der Spaltenvektoren der den Graphen bestimmenden Matrix Verläufe d.h. quasi-Normalteiler (nur im positiven verlaufende Summenbildung, läßt sich gruppoid verwenden?) gebildet werden.

Aus dem Graph, mit dem W. eine Schaltung auf Transistorebene beschreibt, ergibt sich neben der statischen Deutung eine dynamische, wenn die Transistoren-Knoten als Transitionen, die andern Knoten als Stellen verstanden werden. Die Transitionen entnehmen den typisierten Leitungen als Stellen dort hinterlegte Marken und produzieren neue. Sie können nur schalten, wenn das benötigte Bündel an Marken vorhanden und die Kapazität für die Ablage nicht erschöpft sind. Werden benötigte Marken von verschiedenen Transitionen geliefert, so müssen sie eine Weile "gelagert" werden, bis alle vorhanden sind. Wieweit bei dieser Deutung bereits die gesamte Dynamik der Schaltung als diskrete Schaltung erfaßt wird ist offen; es muß aber vermutet werden, daß der bipartite Graph die gesamte Information darüber enthält. Es könnte sich allenfalls um modifizierte Deutungen als Petrinetz handeln. Die so mit einem bipartiten Graph verbundene Dynamik sei *Petridynamik* genannt.

Die in der Petridynamik gedachten Marken sind praktisch elektrische Signale, die überhaupt nicht lagerfähig sind, sondern körperliche Bewegungen von Elektronen in einem thermisch schwingenden Kristallgitter darstellen. Dabei gelten die Erhaltungssätze von Masse, Impuls, Energie und Ladung, wobei über alle an Stößen und Wechselwirkungen beteiligten Teilchen zu summieren wäre. Quantenphysikalisch wird diese Dynamik gemischt - sowohl diskret als auch analog - dargestellt, indem die zumindest teilweise diskreten Spektren von im Kontinuum liegenden Funktionen betrachtet werden. Dies zeigt sich sehr eindrucksvoll für die Supraflüssigkeit. (Helium wird supraflüssig, d.h. es fließt reibungsfrei, wenn seine Atome und die des umschließenden Gefäßes auf ihr unterstes Energieniveau abgekühlt sind. Stöße mit einem Energieaustausch und damit einer Geschwindigkeitsänderung können nur stattfinden, wenn für die erlaubten Energieniveaus passende Quanten ausgetauscht werden können, die in dieser Lage nicht vorhanden sind.)<sup>39</sup>

Das aus dem W.-Graph abgeleitete Petrinetz drückt die "Fein"dynamik der Impulse nicht aus. Diese Dynamik "unterhalb" des diskreten Schaltens, d.h. die Abhängigkeit des tatsächlichen Schaltens eines Transistors von den Signalformen und deren Änderungen auf einer Leitung ist auch aus dem W.-Graph nicht ableitbar. Die komplette Information hierzu liegt erst vor, wenn auch das Layout der Schaltung (und Angaben zu ihrer Herstellung) vorliegen. Dann lassen sich die diese Dynamik kontinuierlich beschreibenden Differentialgleichungen (letztlich als eine Spezialisierung der Maxwell'schen Gleichungen) aufstellen. Diese *Differentialdynamik* mit Petrinetzen darzustellen, ist bisher nicht möglich. Zwischen beiden liegt die Quantendynamik, die sowohl diskrete als auch analoge Elemente enthält. Die Petridynamik ist mit Gruppentheorie behandelbar, die

---

<sup>39</sup> L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik Band IX, Statistische Physik, Teil 2, 2. ber. Auflage, Akademie-Verlag Berlin 1984, S. 86 f

Differentialdynamik mit differentieller Gruppentheorie (s. Pommaret). Welche Verbindungen möglich sind, ist offen. Die Ergodentheorie verbindet die Dynamik von Differentialgleichungen mittels Spektren mit der Statistik.

## 12. Geschichtliche Anmerkungen

Gebilde im Sinne der heutigen Petrinetze wurden erstmals in der Dissertation von C. A. Petri "Kommunikation mit Automaten" an der Universität Bonn 1962 erstmals behandelt. In diesem Modell wurden Übergänge von Dingen, die in einzelnen Stellen liegen, in Dinge anderer Stellen notiert. Die Übergänge konnten in voneinander unabhängigen elementaren Schritten geschehen. Es ging damals Petri darum, darzustellen, wie von einer weiteren Stelle aus mit einem Automaten umgegangen werden kann, wenn jeweils lokal die Voraussetzungen für das Funktionieren seiner einzelnen Teile vorliegen. Philosophisch war dies die Frage, wie ein Ding eigentlich funktionieren könne, wenn nicht alles in der leitenden Hand eines Schöpfers liege. Politisch hieß es, im mathematischen Modell das "Führer befiehl, wir folgen dir" mit mathematischer Beweiskraft für unmöglich zu erklären, naturwissenschaftlich-technisch heißt es, sich zu befähigen und Dinge für gestaltbar zu halten, die bloß durch ein Geflecht von Ursachen und Wirkungen verbunden sind und denen kein Supervisor den direkten Zugriff auf die letzte Einzelheit hat.

Mathematisch drückte sich Petris Modell in Form von Relationen aus. Ein entscheidender Schritt nach vorne wurde damit gewonnen, indem die Relationen zunächst trivial quantifiziert wurden: Die Relation besteht, heißt 1, sie besteht nicht, heißt 0. Damit war ein erster Schritt getan, Petrinetze als rechteckige Matrizen über einer mit Grundoperationen versehenen Menge zu verstehen. Mit den Stellen-Transitionsnetzen wurde dieser Schritt bereits systematisiert, ohne sich jedoch von dem relationalen Modell zu lösen, was sowohl die Darstellung umständlich ließ als auch die Nutzung und die Ergebnisse der linearen Algebra nur langsam angehen ließ. Das Beziehungsmodell, ergänzt um wichtige mathematisch-linguistische Elemente dürfte seinen Höhepunkt in den gefärbten Petrinetzen gefunden haben. In diesen wird mit sogenannten Multisets hantiert, die nichts anderes als Vektoren sind, ohne daß diese Eigenschaft direkt erkannt und genutzt worden wäre. Es ist erst wenige Jahre her, daß diese Übertragung stattgefunden hat und dabei fruchtbare, auf geradezu klassischen Sätzen der linearen Algebra fußende Ergebnisse gefunden werden konnten.

Das bleibende Verdienst von C. A. Petri dürfte darin bestehen, eine Methode gefunden zu haben, mit der lebendige Sachverhalte in einer der mathematischen zugänglichen Form dargestellt werden können ohne diesen Sachverhalten zuvor eine total strenge oder völlig diffuse Struktur aufprägen zu müssen. Während fast zwanzig Jahren haben sich Petrinetze bei der Darstellung und Analyse auf Netzwerken, speziell den Protokollen bewährt. Von dort erhielten wichtige Anstöße zu ihrer methodischen Weiterentwicklung, die nicht zuletzt zu der heutigen Einbettung der Petrinetze in lineare Algebra geführt hat.

Die euphorischen Erwartungen, die manche mit Petrinetzen geweckt hatten, sollen nicht verschwiegen werden und ebensowenig die Schwierigkeiten, Petrinetze in produkt- und industrienahen Projekten der Informatik ernsthaft einzusetzen. Dies heißt nicht, daß nicht auch dort einige Erfolge vorliegen, beispielsweise fußt die Entwicklung eines bekannten Mikroprozessors auf dem qualifizierten Einsatz von Petrinetzen.

Die Schwierigkeiten, auf die Petrinetze im praktischen Einsatz häufig gestoßen sind, dürften darin liegen, daß in jenen Zeiten das bloß relationale Modell nicht überwunden war und Methoden der linearen Algebra nur eingeschränkt für spezielle Fragen verfügbar waren. Insoweit treffen sich Petrinetze mit Graphen, bei denen vergleichbare Schwierigkeiten entstehen können, wenn sie bloß relational betrachtet werden. Obwohl die Petrinetze als bipartite Graphen aufgefaßt werden können, sind Petrinetze mächtiger als Graphen. Dies zeigt sich, wenn beide linear algebraisch dargestellt werden. Petrinetze entsprechen dann rechteckigen Matrizen über den ganzen Zahlen, während Graphen nur quadratische über den natürlichen Zahlen einschließlich der Null sind. Der Unterschied liegt ganz anschaulich in folgendem: In einem Petrinetz läßt sich der Vorgang "Nimmt einen Kuchen *und* schneidet ihn in zwei Stücke" einfach mit drei Stellen und einer Transition modellieren. Die Transition ist der Vektor  $(-1,1,1)$ . In einem Graph läßt sich die Bündelung, die in dem "und" liegt, so nicht mehr ausdrücken. Es läßt sich nicht mehr ausdrücken, daß mit dem Entstehen der zwei Teile zwingend das Verschwinden eines andern, sein Verbrauch verbunden ist. Algebraisch gesprochen liegt der Unterschied darin, daß bei einer Quantifizierung eines Graphen lediglich das zweifache Monoid der natürlichen Zahlen betrachtet wird, bei Petrinetzen der aus den natürlichen Zahlen in natürlicher Weise entwickelte Ring der ganzen Zahlen. Somit stehen bei Petrinetzen von Anfang an mehr algebraische Mittel zur Verfügung als bei Graphen. Vor allem weisen sie auch den Weg zum Vorrat an Ergebnissen, die die Algebra aufbauend auf dem euklidischen Ring der ganzen Zahlen besitzt. In einer Bescheidung auf geringere Mittel wird nicht immer Meisterschaft liegen.

*rest Engels* kritik am sich selbst gleichen, ruhenden dingsbums, das plötzlich aus sich selbst in bewegung gerät (Anti-Dührung, naturphilosophie kosmogonie physik chemie, s.47-55, "hiermit wären wir dann den sich selbst gleichen urzustand für einige zeit glücklich los." beispiel der gespannten flinte)politische geschichte der unterscheidungsaufgabe: Verhältnis von rev und ref, vorhersehung: da gibts nichts mehr zu tun. Nns absolute zeit und absoluten raum, Lns polemik gegen Mhs relativierung, Mxs wirkliche voraussetzung

*rest* Das problem hatte geschichtliche bedeutung: die techniker und ingenieure der letzten jahrhunderte lösten es in ihren zahllosen erfindungen, von den übervorsichtigen als kühn abenteuerlich, von den überreinen als genial schlampig zugleich bewundert und verteufelt.

## Literatur

[NETS 86 Part I] W. Brauer, W. Reisig, G. Rozenberg (Hrsg.): Petri Nets: Central Models and Their Properties, Advances in Petri Nets 1986, Part I, LNCS 254 Springer 1987

[NETS 87]

[NETS 89]

**reste**

reduzierte (was sollte das noch sein?) markierung, translation affine abb., projektiver raum.

Zu Kap. 2 s.a. Puppes **Algebra**vorlesung, Faktormoduln, freie Familien und Basen 2.7.62, und Chevalley, Zariski-Samuel und Bourbaki zu Algebra. Außerdem Elementarteilersatz §22, Rangsatz §27. Sind die transis eine (freie) erzeugenden familie? Algebra A über körper K als vektorr. verstanden mit endl dim über K. s. anmerkung **3.8**

Galoistheorie, §36, erreichbare markierungen und Galois? Artin: Galois Theory

L körper, A teilmenge von L, Galoisgruppe ist u-gruppe der autom-gruppe von L = permutationsgruppe von L. Fixkörper in L bezüglich A. s.a. Valk, topologische wortmengen ... und der dortige fixpunktsatz. Reproduktion von markierungen.

Puppe: Universelle gruppe U zu monoid M.

der existenzsatz für U besagt, daß jedes monoid, ween es nicht schon gruppe ist zu einer gruppe *vergrößert* werden kann. D.h. in der welt gibts noch was, M ist nicht alles!!! Außerdem heißt das, daß man *kredit* geben kann, zu teilchen gibts antiteilchen usw.

zyklisches, erreichbares = permutationsgruppe, symmetrische gr, alternierende gr usw. Desel, Knopp, vd Waerden normalteiler. Satz von Cayley zu jeder endl gruppe der ordnung n gibt es reguläre darstellungen durch n-zeilige permutationsmatrizen. d.h. zu jeder endl gruppe gibts isom. gruppe von perm. (Gröbner matrizenrechnung, s.247) s. satz **6.1**

Jeder Vektorraum hat eine Basis (Beweis s. Puppe 2.7.62, es wird das Zornsche Lemma verwendet)

H. weyl, algebraische zahlentheorie hat - ab etwa s. 70 - wohl was mit Pommarets comp. algebra zu tun, z.b. s.209 unten.

Petrinetz: zunächst laufen die dinge (marken) in  $\mathbf{N}$ , aber dazu gibts universelle gruppe  $\mathbf{Z}$ . Was heißt das physikalisch, wenn man ein netz mit marken aus  $\mathbf{N}^S$  in  $\mathbf{Z}^S$  einbettet?!

zum dim-satz aus kap 2:

Sylvesterregel über dim: s. Gantmacher I,s. 62, Zurmühl matrizen, s. 94, v.d.waerden s.71

Unimodulare matrizen und elementarteiler: K.Weierstrass zur theorie der bilinearen und quadratischen formen, akad. wiss. Berlin 1868, math. werke, II. band s. 19-44

zeta-funktion algebraischer zahlkörper (primzahlverteilung, gitter unimodulares) H. Weyl, algebraische zahlentheorie

rang rab des produkts ab einer matrix a mit m spalten und n zeilen und einer matrix b mit n spalten und q zeilen und rängen ra und rb:

$$ra + rb - n \leq rab \leq \min(ra,rb)$$

**Lineare abb. von netzen:** jede stelle enthält ne sorte (eier äpfel birnen, schrauben M6x50 ...) Lagerbestand ist ein vektor m aus  $\mathbf{Z}^S$ . Eine lin. abb. (rang =|S|) mischt diese sorten zu neuen ("sortiment"), d.h. eine lin.komb von alten dingen wird zu einem neuen zusagefaßt:

$$\mathbf{e}'_{s'} = a_{s'}^s \mathbf{e}_s \quad (\mathbf{e} \text{ einheitsvektor}) \quad m_{s'} = a_{s'}^s m'_s$$

ne transi soll auf das neu gepackte lager wirken wie auf das alte, d.h. aus dem neuen verlauf müssen sich die alten bestände rückrechnen lassen (buchhaltung, inventur bei geänderten org. einheiten):



$$m'_{s'} + t'_{s'} = a^s_{s'}(m_s + t_s), \text{ also } t'_{s'} = a^s_{s'} t_s.$$

Die sortimente transformieren sich ko-, der zugriff kontravariant. **prüfen.** welcher nutzen?

Die Schaltregel kann auch als ein Tensor aufgefaßt werden, und zwar entweder  $R \in \mathbf{Q}^S \otimes \mathbf{Q}^T$  oder  $R \in \mathbf{Q}^S \otimes \mathbf{Q}^{T*}$  oder  $R \in \mathbf{Q}^{S*} \otimes \mathbf{Q}^T$  oder  $R \in \mathbf{Q}^* \otimes \mathbf{Q}^{T*}$ , \* bedeutet den Dualraum. Wenn mit dem Netz z.B. die Belieferung und Entnahme aus einem Lager modelliert werden soll, so erscheint  $R \in \mathbf{Q}^S \otimes \mathbf{Q}^{T*}$  als die zweckmäßige Auffassung. Dem Ändern von Liefer- und Entnahmeeinheiten entspricht eine kontravariante Koordinatentransformation in  $\mathbf{Q}^S$ , soll dabei der ursprüngliche Materialfluß unverändert bleiben, so müssen sich die mit  $T$  indizierten Komponenten von  $R$  kovariant transformieren. Welche weiteren Folgerungen sich aus dieser Auffassung ergeben, muß hier offen bleiben. Diese früher als fußnote 5 gegebene anmerkung ist etwas falsch.

Ergänzend dazu:

Beispiel:  $\mathbf{e}_1$ =schraube,  $\mathbf{e}_2$ =u-scheibe,  $\mathbf{e}_3$ =mutter geht über in  $\mathbf{e}'_1+2\mathbf{e}'_2+\mathbf{e}'_3=\mathbf{e}'_1$ =verschraubung, ...  $\mathbf{e}'_1$ -dinge liegen in stelle i, markierung=lagerbestand. Nach ko-trafo ist das lager umgeräumt und neu sortimentiert. Auf der neuen stelle i' liegen  $\mathbf{e}'_1$ -dinge, woraus die alten wiederherstellbar sind. (ggf. vielfache).

Transi t ist lieferung und verbrauch. t könne nur die  $\mathbf{e}_i$ , nicht aber die  $\mathbf{e}'_i$  liefern und holen. im neuen transport t' muß aber das alte in der summe drin sein, d.h. die bewegung der alten dinge auf dem lager bleibt invariant, d.h wenn die dinge aus t' ausgepackt und einzeln hingelegt werden, ists wieder das alte t.

Sei z.b.  $t=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3=(1,2,1)$ , dann ist  $t'=\mathbf{e}'_1=(1,0,0)$ . D.h. die t's transformieren sich invers zu den  $\mathbf{e}'_i$ 's. Das sind aber trafos in  $\mathbf{Q}^S$ , nicht aber in  $\mathbf{Q}^S \otimes \mathbf{Q}^T$  oder sowas ähnlichem!!!!!! Evtl. kann t als affine. abb über den markierungen aufgefaßt werden, d.h.  $m \in \mathbf{Q}^S$  und  $t \in \mathbf{Q}^{S*}$  (?), was die ko- und kontravarianz verständlich machen könnte. Wenn sich die lieferanten und verbraucher neu zusammentun, ergibt sich für stellenvektoren und feste liefertouren vermutlich ähnliches. Ko- und kontravariante anteile in einem tensor gibts nur, wenn nur ein Vektorraum V und sein duales  $V^*$  im ggf. mehrfachen tensorprodukt auftauchen. Bei netzen hätte das nur sinn bei  $S=T$  oder zumindest  $|S|=|T|$ .

Sei  $R=(R_s)_{s \in S}$  und  $B \in \mathbf{Q}^{S \times S}$  eine nicht ausgeartete Transformation  $\beta: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} := \mathbf{Q}^S$  (noch dualraum schlampig), d.h.  $\det(B) \neq 0$  und sei  $R\tau=0$ , d.h.  $R_s\tau=0$  für alle  $s \in S$ , d.h. R entspricht lineare Abbildung  $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$  mit  $\mathbb{T} = \mathbf{Q}^T$ . Sei  $R' := BR = (BR_s)_{s \in S}$ . Also  $B(R_s\tau)=0$ . Es ist  $(BR_s)\tau=0$ , weil in  $\sum b_s^s, \sum R_s^t \tau_t$  die Summen vertauschbar sind. Das ist gleichbedeutend mit kern  $\rho = \text{kern}(\beta \circ \rho)$ . D.h. eine  $\mathbb{T}$ -Invariante eines Netzes bleibt es, wenn auf die Stellen eine lineare Transformation ausgeübt wird.

buchhaltung als tensorrechnung

preis von waren, äquivalente, (1,1)-tensoren? wechselkurse und ihre anpassungen.

**frage:** wenn menge  $A=B \times C$ , ist dann  $\mathbf{Q}^A = \mathbf{Q}^{B \times C} \cong \mathbf{Q}^B \otimes \mathbf{Q}^C$  ????

Dann wäre bei  $S=S' \times S''$   $R \in (\mathbf{Q}^{S'} \otimes \mathbf{Q}^{S''}) \otimes \mathbf{Q}^T \cong \mathbf{Q}^{S'} \otimes (\mathbf{Q}^{S''} \otimes \mathbf{Q}^T) \cong \mathbf{Q}^{S'} \otimes \mathbf{Q}^{S'' \times T}$ , d.h. man hätte ein neues netz mit S' als Stellen- und S''xT als transitionenmenge.

Was ist mit höheren tensorprodukten? entsprichts gefärbten netzen? läßt sich da pommaret unterbringen?

Eulers satz über graphen: knoten - kanten + flächen = 2, läßt sich das als spezialfall der cramerschen regel  $\dim \text{kern} + \dim \text{bild} = \dim \text{quelle}$  darstellen, wenn man graphen als matrizen und die flächen als daraus linear abgeleitete matrizen (bipartit, d.h. petrisch) darstellt. (s. Berge, s. 16-21)? Hat die 2 was mit 2-azyklizität bei pommaret zu tun oder ist das doof?

Gibts ne andre vorstellung, so daß ne schaltregel n anderer tensor wird?

Einen algorithmus zur **netzanalyse wieder als netz** darstellen, was kommt dabei fürn netz raus?!!

PN und automaten? Moore Mealy? primzahlen in die hardware bauen, geht dann arithmetik besser?

### **multigrid und pn:**

widerstandsnetz, iterationsstern bei multigrid, numerik bis zum bit runter darstellen. Dort gibt es nicht "ein bit oder kein bit", sondern ein a-bit und ein b-bit (flipflop leitet rechts oder links) erst in der verschaltung zu einem addierer werden a die 0 und b die 1. Pro gitterpunkt n bits zur wertspeicherung, die konkrete verarbeitung gibt dem bit einen stellenwert. Das netz hat eine gewisse markenerhaltung, weil immer ein a oder ein b in einem ff ist. Außerdem hats beschränkte kapazität, präzisieren., ggf als ein beispiel. Synchronisationsgraf? oder welcher netztyp?

feines gitter: Alle bits, die großen wie die kleinen, einer kleinen nachbarschaft werden benutzt.

grobes gitter: nur die großen bits einer großen nachbarschaft werden genutzt. S.a. multigrid-kurs und Joppichs buch.

### **läßt sich daraus ne hardware-filosofie in arithmetik und nebenlauf machen?!!!!**

Konvergenz heißt, das zugehörige pn läuft sich (relativ) tot. wie tot? welche markierungen sind nicht mehr erreichbar? Algebraische charakterisierung? galoisgruppe, fixkörper? im p-netz?