Die Stellung des symbolischen Rechnens im Wissenschaftsgebäude

Hans-Gert Gräbe
Institut für Informatik, Universität Leipzig

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Stellung der Computeralgebra innerhalb des Wissenschaftsgebäudes bestimmt und die Konsequenzen für Wissenschaft und Gesellschaft näher beleuchtet, die sich aus einer solchen "Technologisierung des Denkens" ergeben. Es wird dargestellt, dass diese neuen Werkzeuge nicht schlechthin eine unter vielen neuen Computeranwendungen darstellen, sondern einen Meilenstein markieren auf dem Weg der praktischen Realisierung des theoretischen Anspruchs, den die Church'sche These impliziert.

Der Beitrag schließt mit einigen Überlegungen zu curricularen Konsequenzen aus diesen Entwicklungen.

Vorab sei bemerkt, dass im deutschsprachigen Raum die Begriffe "symbolisches Rechnen" und "Computeralgebra" gewöhnlich synonym zur Kennzeichnung des Fachgebiets verwendet werden, um das es in diesem Beitrag geht. Ich werde im Weiteren den Begriff "symbolisches Rechnen" verwenden, wenn ich den Blick stärker auf die Potenzen des Fachgebiets fokussiere, den Begriff "Computeralgebra" dagegen, wenn ich dessen aktuelle Möglichkeiten thematisieren möchte.

1 Zur Genese von Wissenschaft im Industriezeitalter

Folgen wir den Ausführungen eines Standard-Nachschlagewerks zum Stichwort Wissenschaft, etwa [2], so stellen wir zunächst fest, dass es den heute geläufigen Wissenschaftsbegriff mit seinen mannigfachen Verzweigungen und Verästelungen noch gar nicht so lange gibt.

Bis hinein ins Mittelalter wurde Wissenschaft ganzheitlich und mit dem Anspruch betrieben, die Welt in ihrer gesamten Komplexität zu begreifen. Für Goethes Faust galt es noch, Philosophie, Medizin, Juristerei und Theologie, die vier Zweige eines klassischen wissenschaftlichen Studiums jener Zeit, nicht alternativ, sondern gemeinsam und in ihrer gegenseitigen Wechselbeziehung zu studieren. Zugleich war das Wissenschaftlerdasein elitär geprägt und "das Privileg meist wohlhabender, oft adliger Privatgelehrter" (ebenda, S. 278). Im Alltag spielten wissenschaftliche Kenntnisse eine absolut untergeordnete Rolle, ja selbst (aus heutiger Sicht elementare) Grundfertigkeiten wie Lesen, Schreiben und Rechnen waren kaum verbreitet.

Das änderte sich grundlegend mit dem Aufbruch ins Industriezeitalter. Dieses begann mit der Trennung zwischen Geistes- und Naturwissenschaften, genauer gesagt mit der Abspaltung der letzteren, die sich, statt ganzheitlicher Beschreibungen, stärker auf funktionale und kausale Erklärungen von Phänomenen ausrichten. Ein solches Verständnis ist die Basis und ermöglicht erst das "Eingreifenkönnen und Beherrschen natürlicher Prozesse und Dinge" (ebenda, S.278).

Ursache für diese veränderte Stellung von Wissenschaft sind zweifelsohne die gewachsenen Anforderungen, die ein industriell organisierter Arbeitsprozess sowohl an die beteiligten Akteure als auch an die geistige Durchdringung der Prozesse selbst stellt. Diese Art *wissenschaftlicher Rationalität* wird im Folgenden zum beherrschenden Wissenstypus im Bereich der Natur- und Technikwissenschaften, denen wir uns im Weiteren ausschließlich zuwenden werden. Zugleich beginnt Wissenschaft auch im Alltag eine wichtigere Rolle einzunehmen; abzulesen etwa in der Einrichtung von Volksschulen, die die Fertigkeiten des Lesens, Schreibens und Rechnens verbreiten.

Ein solcher Rationalitätsbegriff prägt das heutige Selbstverständnis der einzelnen Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie, ...) als Fachwissenschaften: sie haben als Ziel, in der Natur ablaufende Prozesse aus der Sicht ihres jeweiligen Fachgebiets adäquat zu beschreiben und damit Modellvorstellungen zu entwickeln, auf deren Basis man Vorhersagen über diese Prozesse treffen oder sie sogar bewusst ausnutzen oder beeinflussen kann. Letzteres ist mit leicht anderer Schwerpunktsetzung auch Gegenstand der Technikwissenschaften.

Die "wissenschaftliche Strenge", die für eine solche Rationalität an den Tag zu legen ist, unterliegt fachübergreifenden Standards. Die Existenz derartiger Standards hat ihre Ursache nur zum Teil im gemeinsamen Ursprung der Einzelwissenschaften. Eine wesentlich wichtigere Quelle liegt in der gemeinsamen Methodologie und dem dabei verwendeten erkenntnistheoretischen Instrumentarium:

- aus einer Fülle von experimentell gewonnenem Datenmaterial werden *Regelmäßigkeiten* herausgefiltert,
- diese in Hypothesen mit dem bisherigen Kenntnisstand verbunden und entsprechend den Regeln wissenschaftlicher Schlussweise zu neuen *Gesetzmäßigkeiten* verdichtet,
- diese im Zuge weiterer Systematisierung und experimenteller Verifikation zu neuen *Theorien* zusammengefasst,
- um schließlich für praktische Anwendungen in einem handhabbaren *Kalkül* fixiert zu werden[1],
- der seinerseits die Basis für die Gewinnung neuen Datenmaterials auf der nächst höheren Abstraktionsebene bildet.

Eine solche in Richtung zunehmender Abstraktion weisende Erkenntnisspirale ist typisch für die "reinen" Wissenschaften. Um Wissenschaften im Zuge zunehmender Industrialisierung produktiv werden zu lassen, spielt die Anwendbarkeit und Anwendung theoretischen Wissens auf die gesellschaftliche Praxis eine ebenso wichtige Rolle. Diese Domäne der "angewandten" und Technik- oder Ingenieurwissenschaften folgt einem anderen erkenntnistheoretischen Paradigma:

- Reale Prozesse werden mit Hilfe eines geeigneten Kalküls *simuliert*.
- Die Simulation wird auf dem Hintergrund der verwendeten Theorie durch Analyse zu einem *Modell* verdichtet.
- Das Modell wird experimentell überprüft (und gegebenenfalls weiter verfeinert)
- Die gewonnenen Erkenntnisse werden in die Praxis implementiert.

[1] Buchberger [3, S. 808] spricht in diesem Zusammenhang von der "Trivialisierung" einer Problemklasse (der symbolischen Mathematik).

In diesem Kreislauf spielen fertige Theorien und konkrete, bereits entwickelte Kalküle (nicht nur der Mathematik) eine zentrale Rolle.

Übergreifende Gesetzmäßigkeiten dieser Erkenntnisprozesse sind Gegenstand von *Querschnittswissenschaften*, von denen hier vor allem Philosophie, Mathematik und inzwischen auch die Informatik zu nennen sind.

Während die Philosophie die Denk- und Abstraktionsprozesse in ihrer Allgemeinheit zum Gegenstand hat, befasst sich die Mathematik mit übergreifenden Gesetzmäßigkeiten, die beim Quantifizieren von Phänomenen auftreten. Quelle und Target dieser Bemühungen sind die entsprechenden logischen Strukturen der Einzelwissenschaften, die oft erst durch die Anstrengungen der Mathematik eine streng deduktiven Ansprüchen genügende Konsistenz erhalten.

Die Mathematik leistet so einen unverzichtbaren und eigenständigen Beitrag für die methodische Fundierung der Einzelwissenschaften, ohne welchen letztere nur wenig über ein empirisches Verständnis ihres Gegenstands hinauskommen würden. Mathematik und mathematischen Methoden kommt damit besonders in der Phase der Hypothesen- und Theoriebildung, aber auch bei der Modellierung und Analyse realer Prozesse, ein wichtiger Platz für die Leistungsfähigkeit und argumentative Tiefe einzelwissenschaftlicher Erkenntnisprozesse zu. Sie ist außerdem die Grundlage einzelwissenschaftlicher Kalküle, egal, ob diese Quantenphysik, Elektronik, Statik oder Reaktionskinetik heißen. Mathematik ist in diesem Sinne die "lingua franca" der Wissenschaft, was Marx zu der Bemerkung veranlasste, dass "sich eine Wissenschaft erst dann als entwickelt betrachten könne, wenn sie dahin gelangt sei, sich der Mathematik zu bedienen".

Im Gegensatz zu spezielleren Kenntnissen aus einzelnen Bereichen der Natur- oder Ingenieurwissenschaften sind mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten damit in unserer technisierten Welt nicht nur in breiterem Umfang notwendig, sondern werden auch an verschiedenen Stellen des (Berufs-)Lebens selbst bei Facharbeitern oder vergleichbaren Qualifikationen schlichtweg vorausgesetzt. Eine gewisse "mathematische Kultur", die über einfache Rechenfertigkeiten hinausgeht, ist damit heute für eine qualifizierte Teilhabe am sozialen Leben unumgänglich.

Jedoch ist nicht nur der Einzelne auf solche Kenntnisse angewiesen, sondern auch die Gesellschaft als Ganzes. Denn erst eine solche "Kultur des Denkens" sichert die Fähigkeit, innerhalb der Gesellschaft auf einem Niveau zu kommunizieren, wie es für die Beherrschung der sozialen Prozesse notwendig ist, die sich aus der immer komplexeren technologischen Basis ergeben. Unter diesem Blickwinkel mag es nicht weiter verwundern, dass der Teil des durch die Mathematik entwickelten methodischen und begrifflichen Rüstzeugs, der inzwischen in die Allgemeinbildung Einzug gehalten hat, stetig wächst.

Obwohl es immer wieder Diskussionen über die Angemessenheit solcher Elemente im Schulunterricht gibt, zeigt sich im Lichte der TIMMS-Studien der letzten Jahre, die die mathematischen Fertigkeiten von Schülern in verschiedenen Ländern vergleicht, dass die allgemeine mathematische Kultur, die die Schule in Deutschland derzeit vermittelt, eher als mittelmäßig einzustufen ist.

Mit der allgegenwärtigen Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechentechnik wird diese "Verwissenschaftlichung" gesellschaftlicher Zusammenhänge auf eine qualitativ neue Stufe gehoben. Viele, auch umfangreichere Kalküle können nun mechanisiert oder sogar automatisiert werden und stehen damit für einen breiteren Einsatz zur Verfügung, womit sich zugleich die Reichweite wissenschaftlicher Gedankenführung für einen weiten Kreis von Anwendungen deutlich erhöht. Neben Pflege, Weiterentwicklung und Vermittlung entsprechender *Denk-Kalküle*, dem traditionellen Gegenstand mathematischer Bildung, tritt damit eine weitere Querschnittswissenschaft, die die Erstellung, Pflege, Nutzungsunterweisung und Einbettung für solche technikbasierte Hilfsmittel geistiger Arbeit, kurz, eine sich neu herausbildende "technologische Seite des Denkens", zum Gegenstand hat. Ein solches Verständnis von Informatik[2] lässt Raum für eine

weitergehende Symbiose von Kalkül und Technologie als Gegenstand eines Faches zwischen Mathematik und Informatik,

dem Grabmeier in [6] den provisorischen Namen "Computermathematik" gegeben hat. Das Symbolische Rechnen ist ein wesentlicher Teil dieses Gebiets.

Dass sich daraus auch die Rechtfertigung eines eigenständigen Schulfaches "Informatik" ableitet, sei hier nur in Parenthese angemerkt.

2 Symbolisches Rechnen und der Computer als Universalmaschine

Die Entwicklung der Mathematik als Ganzes ebenso wie ihre curriculare Vermittlung in der Schule beginnt mit dem Zahlbegriff als Abstraktion und führt vom einfachen Kalkül der Arithmetik über den Einsatz von Variablen, mit deren Hilfe man über den Arithmetikkalkül räsonieren kann, und viele Windungen der Abstraktionsspirale hin zu komplizierten und kompliziertesten symbolischen Kalkülen.

Interessanterweise wiederholt sich diese Entwicklung auch in der Geschichte des Einsatzes des Computers als Hilfsmittel geistiger Arbeit. Historisch wurde das Wort Computer bekanntlich zuerst mit einer Maschine zur schnellen Ausführung numerischer Rechnungen verbunden. Nachdem dies in der Anfangszeit ebenfalls auf einfache arithmetische Operationen beschränkt war (und für Taschenrechner lange so beschränkt blieb), können auf entsprechend leistungsfähigen Maschinen heute auch kompliziertere Anwendungen wie das Berechnen numerischer Werte mathematischer Funktionen, die Approximation von Nullstellen gegebener Polynome oder von Eigenwerten gegebener Matrizen realisiert werden. Solche numerischen Verfahren spielen (derzeit) die zentrale Rolle in Anwendungen mathematischer Methoden auf Probleme aus Naturwissenschaft und Technik und bilden den Kern einer eigenen mathematischen Disziplin, des *Wissenschaftlichen Rechnens*[3].

All diesen Anwendungen ist gemein, dass sie zwar unter Verwendung ausgefeilter Programmiersprachen die Programmierfähigkeit eines Computers ausnutzen, sich letztlich aber allein auf das Rechnen mit (Computer)zahlen zurückführen lassen. Der Computer erscheint in ihnen stets als außerordentlich präzise und schnelle, im übrigen aber stupide *Rechen*maschine, als "number cruncher".

Genau so kommt der Computer auch in vielen großen numerischen Simulationen praktischer Prozesse zum Einsatz, so dass ein Bild seiner Fähigkeiten entsteht, das sowohl aus in-

[2]Gängige Definitionen des Gegenstands der Informatik fokussieren stärker auf eine einzelwissenschaftliche Betrachtung, etwa als "Wissenschaft von der systematischen Verarbeitung von Informationen, besonders der automatischen Verarbeitung mit Digitalrechnern" ([4]).

[3]Allerdings definiert sich Wissenschaftliches Rechnen normalerweise nicht über die verwendeten Kalküle, sondern in Abgrenzung zur "reinen Mathematik" über das zu Grunde liegende (und weiter oben bereits beschriebene) Anwendungsparadigma.

nermathematischen als auch informatik-theoretischen Überlegungen heraus eher einer künstlichen Beschränkung seiner Einsatzmöglichkeiten gleichkommt. Zeigt uns doch die Berechenbarkeitstheorie in Gestalt der Churchschen These, dass der Computer eine *Universalmaschine* ist, die prinzipiell in die Lage versetzt werden kann, jede nur denkbare algorithmische Tätigkeit auszuüben, wenn sie nur mit einem geeigneten Programm versehen ist. Er sollte also auch in der Lage sein, Symbole und nicht nur Zahlen nach wohlbestimmten Regeln zu verarbeiten.

Dass ein Computer auch zu einer solchen Symbolverarbeitung fähig ist, war übrigens lange vor dem Bau des ersten "echten" (von-Neumann-)Rechners bekannt. Bereits Charles Babbage (1792 - 1838), der mit seiner "Analytical Engine" 1838 ein dem heutigen Computer ähnliches Konzept entwickelte, ohne es aber je realisieren zu können, hatte diese Fähigkeiten einer solchen Maschine im Blick. Seine Assistentin, Freundin und Mäzenin, Lady Lovelace, schreibt (zitiert nach [8, S. 1]) :

> Viele Menschen, die nicht mit entsprechenden mathematischen Studien vertraut sind, glauben, dass mit dem *Ziel* von Babbage's Analytical Engine, Ergebnisse in Zahlennotation auszugeben, auch deren *Inneres* arithmetisch-numerischer Natur sein müsse statt algebraisch-analytischer. Das ist ein Irrtum. Die Maschine kann ihre numerischen Eingaben genau so anordnen und kombinieren, als wären es Buchstaben oder andere allgemeine Symbole; und könnte sie sogar *in einer solchen Form ausgeben*, wenn nur entsprechende Vorkehrungen getroffen würden.

Ein solches Computerverständnis ist uns, im Gegensatz zu den Pionieren des Computer-Zeitalters, im Lichte von ASCII-Code und Textverarbeitungssystemen heute allgemein geläufig, wenigstens was den Computer als intelligente Schreibmaschine betrifft. Mit dem Siegeszug der Kleinrechentechnik in den letzten 20 Jahren entwickelte er sich dabei vom Spielzeug und der erweiterten Schreibmaschine hin zu einem unentbehrlichen Werkzeug der Büroorganisation, wobei vor allem seine Fähigkeit, (geschriebene) Information speichern, umordnen und verändern zu können, eine zentrale Rolle spielt. In diesem Anwendungssektor kommt also die Fähigkeit des Computers, *symbolische Information* verarbeiten zu können, bereits unmittelbar auch für den Umgang mit Daten zum Einsatz. Dabei verwischt sich, genau wie von Lady Lovelace vorausgesehen, durch die binäre Kodierung symbolischer Information die Grenze zwischen Zahlen und Zeichen, die zuerst so absolut schien.

Auf dieser Abstraktionsebene ist es auch möglich, die verschiedensten Nachschlagewerke und Formelsammlungen, also in symbolischer Form kodiertes Wissen, mit dem Computer aufzubereiten, in datenbankähnlichen Strukturen vorzuhalten und mit entsprechenden Textanalyseinstrumenten zu erschließen. Es wird sogar möglich, auf verschiedene Weise symbolisch kodierte Informationen in multimedialen Produkten zu verknüpfen, was das ungeheure innovative Potential dieser Entwicklungen verdeutlicht. In der Hand des Ingenieurs und Wissenschaftlers entwickelt sich damit der Computer zu einem sehr effektiven Instrument, das nicht nur den Rechenschieber, sondern auch zunehmend Formelsammlungen abzulösen in der Lage ist. Auf diesem Niveau handelt es sich allerdings noch immer um eine *syntaktische* Verarbeitung von Information, wo der Computer deren *Sinn* noch nicht in die Verarbeitung einzubeziehen vermag.

Kehren wir zum Einsatz des Computers zu *numerischen* Zwecken zurück. Obwohl nicht so deutlich sichtbar, enthält dieser bereits eine wichtige symbolische Komponente: Er hat das Programm für die Rechnungen in adäquater Form in seinen Speicher zu bringen und von dort wieder zu extrahieren. Diese Art symbolischer Information ist bereits *semantischer Art*, da die auf diese Weise dargestellten *Algorithmen* inhaltliche Aspekte der verarbeiteten Zahlengrößen erschließen. Dass dies vom Nutzer nicht in gebührender Form wahrgenommen wird, hängt in erster Linie mit der strikten Trennung von (numerischen) Daten und (symbolischem) Programm sowie der Betrachtung des Computers als virtuelle Maschine ("Das Programm macht der Programmierer, die Rechnung der Computer") zusammen.

Bringt man beide Ebenen, die Daten und die Programme, zusammen, ermöglicht also algorithmische Operationen auch auf symbolischen Daten, geht man einen großen Schritt in die Richtung, semantische Aspekte auch symbolischer Information einer automatischen Verarbeitung zu erschließen. Denken lernt der Computer damit allerdings nicht, denn auch die Algorithmik symbolischer Informationsverarbeitung benötigt zunächst den in menschlicher Vorleistung erdachten *Kalkül*, den der Computer dann in der Regel schneller und präziser als der Mensch auszuführen vermag.

In diesem Schnittpunkt moderner Entwicklungen befindet sich die *Computeralgebra*. Mit ihrem ausgeprägten Werkzeugcharakter und einer starken Anwendungsbezogenheit steht sie paradigmatisch dem (klassischen Gegenstand des) Wissenschaftlichen Rechnen nahe und wurde lange Zeit nur als Anhängsel dieser sich aus der Numerik heraus etablierten mathematischen Disziplin verstanden. Ihre Potenzen sind aber vielfältiger. Zunächst steht sie in einer Reihe mit anderen nichtnumerischen Applikationen einer "Mathematik mit dem Computer" wie z.B. Anwendungen der diskreten Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie) oder der diskreten Optimierung, die *endliche* Strukturen untersuchen, die sich *exakt* im Computer reproduzieren lassen.

Die *strukturelle Endlichkeit* ihrer Konstrukte prädestinierte die diskrete Mathematik, eine Vorreiterrolle der Computerisierung der "exakten" Mathematik zu spielen; und sie tat dies auch spätestens seit dem spektakulären Beweis des Vier-Farben-Satzes durch Appel und Haken [1]. Damit zog zugleich neben dem bis dahin dominierenden numerischen ein deduktives Mathematikverständnis in den Computerbereich ein, das den Ansprüchen wissenschaftlicher Rationalität wesentlich näher steht. Das tiefere Verständnis der Unterschiede zwischen beiden Zugängen ist ein wichtiges Element bei der Bestimmung des Platzes, der dem symbolischen Rechnen als *Technologie* zukommt, soll hier aber nicht vertieft werden, vgl. etwa [9].

Mathematische Konstrukte sind allerdings in der Regel nicht strukturell, sondern nur *beschreibungs-endlich*, so dass in allgemeineren Situationen noch einmal eine Reduktionsleistung vollbracht werden muss. Diese ergibt sich in vielen Fällen auf natürliche Weise aus der Art, wie Theorien und vor allem deren Kalküle inner-mathematisch formuliert werden. Diese Formulierungen müssen "nur noch" in computeradäquate Strukturen umgesetzt werden. Hier hat die Computeralgebra eines ihrer großen Aufgabenfelder.

Neben konkreten Implementierungen wichtiger mathematischer Verfahren reicht die Bedeutung der Computeralgebra aber über den Bereich der algorithmischen Mathematik hinaus. Die Vielzahl mathematischer Verfahren, die in einem modernen CAS unter einer *einheitlichen* Oberfläche verfügbar sind, machen dieses zu einem $\boxed{\text{metamathematischen Werkzeug}}$ für Anwender, ähnlich den Numerikbibliotheken, die heute schon im Wissenschaftlichen Rechnen eine zentrale Rolle spielen.

Der Aspekt der Symbiose mit informatischen Entwicklungen ist im Bereich der Computeralgebra derzeit am deutlichsten ausgeprägt. Er wird dazu führen, dass sich die heute noch getrennt agierenden Bereiche zu der bereits erwähnten "Computermathematik" vereinen werden, in der computergestützte numerische, diskrete und symbolische Methoden gleichberechtigt nebeneinander stehen und in praktischen Applikationen ineinander greifen.

Wie die Mathematik als lingua franca das Denken in weiten Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften prägt, so wird diese Computermathematik das Herzstück computergestützter fachwissenschaftlicher "Denkwerkzeuge" sein und das zentrale Element einer *Technologie des Denkens* bilden. Das Verständnis für computer-mathematische und damit insbesondere auch für computer-algebraische Denkweisen wird auch in Bereichen eine Rolle spielen, die sich heute noch weit entfernt von Mathematik und Informatik wähnen. Die Bedeutung dieser Denkweisen für eine mathematische Kultur der Gesellschaft ist deshalb kaum zu unterschätzen.

3 Was ist Computeralgebra ?

Nach dieser allgemeinen Einordnung wollen wir nun den Gegenstand der Computeralgebra näher bestimmen. Wir hatten bereits gesehen, dass sie eine spezielle Art von Symbolverarbeitung ist, in der, im Gegensatz zur Textverarbeitung, die Symbole mit Inhalten, also einer *Semantik*, verbunden sind. Auch geht es bei der Verarbeitung um Manipulationen eben dieser Inhalte und nicht primär der Symbole selbst.

Von der Natur der Inhalte und der Form der Manipulationen her können wir den Gegenstand der Computeralgebra also in erster Näherung als

$$\boxed{\text{symbolisch-algebraische Manipulationen mathematischer Inhalte}}$$

bezeichnen.

Gehen wir eher von der syntaktischen Form aus, in der uns diese Inhalte entgegentreten, so lässt sich der Gegenstand grob als

$$\boxed{\text{Rechnen mit Symbolen, die mathematische Objekte repräsentieren}}$$

umreißen. Diese Objekte können neben ganzen, rationalen, reellen oder komplexen Zahlen (beliebiger Genauigkeit) auch algebraische Ausdrücke, Polynome, rationale Funktionen, Gleichungssysteme oder sogar noch abstraktere mathematische Objekte wie Gruppen, Ringe, Algebren und deren Elemente sein.

Das Adjektiv *symbolisch* bedeutet, dass das Ziel der mathematischen Problemstellung nicht die Suche nach numerischen Werten, sondern nach einer geschlossenen oder approximativen Formel im Sinne des deduktiven Mathematikverständnisses ist. *Algebraisch* bedeutet, dass eine *exakte* mathematische Ableitung aus den Ausgangsgrößen durchgeführt wird, anstatt näherungsweise Fließkommaarithmetik einzusetzen. Beispiele für solche algebraisch-symbolischen Umformungen sind die Polynomfaktorisierung, die Berechnung von Ableitungen und Stammfunktionen, die Reihenentwicklung von Funktionen, analytische Lösungen von Differentialgleichungen, exakte Lösungen polynomialer Gleichungssysteme oder die Simplifikation mathematischer Formeln.

Der Begriff "algebraisch" beinhaltet dabei keine Einschränkung auf spezielle Teilgebiete der Mathematik, sondern eine der verwendeten Methoden. Diese sind als mathematische Schlussweise weit verbreitet, denn auch Anwendungen aus der Analysis, wie z.B. Grenzwert- oder Integralbegriff, die per definitionem Näherungsprozesse untersuchen, verwenden in ihrem eigenen Kalkül solche algebraischen Umformungen.

In diesem Sinne beschreibt J.Grabmeier in [6], auf R.Loos zurückgehend,

> *Computeralgebra als den Teil der Informatik und Mathematik, der algebraische Algorithmen entwickelt, analysiert, implementiert und anwendet.*

Buchberger kommt in [3, S. 799] ganz ohne das Adjektiv "algebraisch" aus:

> *Symbolisches Rechnen* (dort als Synonym für Computeralgebra, vgl. S. 800 – HGG) *ist der Teil der algorithmischen Mathematik, der sich mit dem exakten algorithmischen Lösen von Problemen in abstrakten mathematischen Strukturen befasst.*

Im Weiteren unterstreicht Buchberger die Bedeutung der Algebraisierung und Algorithmisierung mathematischer Fragestellungen, um sie einer computeralgebraischen Behandlung im engeren Sinne zugänglich zu machen, und schlägt diesen Aufwand dem symbolischen Rechnen zu, während die informatischen Aspekte etwas aus dem Blickfeld geraten.

Diese sollte man mit Blick auf die zunehmende Kompliziertheit der entstehenden Werkzeuge nicht unterschätzen, so dass ich obige Definitionen noch erweitern will um den Aspekt der

> *Entwicklung des zu Implementierung und Management solcher Systeme notwendigen informatik-theoretischen und -praktischen Instrumentariums.*

Die Computeralgebra befindet sich damit an der Schnittstelle zentraler Entwicklungen verschiedener Gebiete sowohl der Mathematik als auch der Informatik.

In ihrem Computeralgebra-Report [7] definiert die Fachgruppe Computeralgebra der Gesellschaft für Informatik (GI) ihr eigenes Fachgebiet etwas ausführlicher so:

> *Die Computeralgebra ist ein Wissenschaftsgebiet, das sich mit Methoden zum Lösen mathematisch formulierter Probleme durch symbolische Algorithmen und deren Umsetzung in Soft- und Hardware beschäftigt. Sie beruht auf der exakten endlichen Darstellung endlicher oder unendlicher mathematischer Objekte und Strukturen und ermöglicht deren symbolische und formelmäßige Behandlung durch eine Maschine. Strukturelles mathematisches Wissen wird dabei sowohl beim Entwurf als auch bei der Verifikation und Aufwandsanalyse der betreffenden Algorithmen verwendet. Die Computeralgebra kann damit wirkungsvoll eingesetzt werden bei der Lösung von mathematisch modellierten Fragestellungen in zum Teil sehr verschiedenen Gebieten der Informatik und Mathematik sowie in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.*

In diesem Spannungsfeld zwischen Mathematik und Informatik findet die Computeralgebra zunehmend ihren eigenen Platz und nimmt dabei wichtige Entwicklungsimpulse aus beiden Gebieten auf. So mag es nicht verwundern, dass die großen Durchbrüche der letzten Jahre sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik die von der Computeralgebra produzierten Werkzeuge wesentlich beeinflusst haben und umgekehrt. Mit der Computerisierung mathematischer Verfahren erweitert sich zugleich der Kognitionsbereich "durchschnittlicher" Mathematiker, so dass mathematische Ergebnisse, die noch vor einigen Jahrzehnten intellektuelle Vorposten darstellten, zum Allgemeingut werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Computeralgebra nicht eine weitere Computeranwendung schlechthin unter vielen anderen ist, sondern *in natürlicher Weise* Entwicklungen, die die Informatik als Ganzes hervorgebracht haben, weiterführt: Der Computereinsatz für symbolische Rechnungen eröffnet einen neuen Abschnitt auf dem Weg des Computers vom primitiven Bitknipser zu einem Universalwerkzeug für geistige Arbeit. Es beginnt damit eine neue Etappe auf dem Weg der praktischen Realisierung des theoretischen Anspruchs, den die Church'sche These impliziert.

Ein pikantes Detail liegt in der Ignoranz dieser Entwicklungen durch Teile der etablierten Informatik selbst, denn Darlegungen zur Computeralgebra sucht man in verschiedenen Quellen, die sich eine umfassende Darstellung der Informatik vorgenommen haben, vergebens. So enthalten weder der "Duden Informatik" [4] noch das "Lexikon Informatik" [11] ein Stichwort *symbolisches Rechnen* oder *Computeralgebra.* Aber auch hier scheinen sich Gewichte zu verschieben, wie ein Blick in das neue "Handbuch Informatik" [10] belegt, in dem ein ganzer Abschnitt dem symbolischen Rechnen gewidmet ist (aus dem wir weiter oben bereits zitiert haben).

Wie wird es weiter gehen?

Die von der Computeralgebra produzierten Werkzeuge spielen bereits heute eine stark zunehmende Rolle sowohl in den Natur- als auch in den Ingenieurwissenschaften. Dies dokumentiert sowohl die wachsende Zahl von Anwenderpaketen der verschiedenen großen Systeme als auch eine beeindruckende Zahl von Büchern zu dieser Thematik. Für einen vollständigeren Überblick über Tendenzen und Anwendungen der Computeralgebra sei auf den Computeralgebra-Report [7] verwiesen.

Den Einfluss dieser neuen Arbeitsmittel auf den Umbruch unserer technisierten Arbeitswelt insbesondere im ingenieurtechnischen Bereich kann man kaum überschätzen. Dort, wo heute noch dicke Formelsammlungen und Tafelwerke das Berufsbild prägen, die trotz ihrer Dicke genau wie ein Berg numerischer Daten immer nur eine sehr beschränkte Sicht auf *Fakten* und keine *Einsichten* vermitteln können, werden Werkzeuge, die auf symbolischen Fähigkeiten im beschriebenen Sinne aufsetzen, diese Bereiche geistiger Arbeit in vielleicht noch nachhaltigerer Weise revolutionieren als dies mit der Erfindung des Buchdrucks geschah.

Schließlich eröffnen die damit verbundenen Möglichkeiten, nun auch algorithmisches Know How in großem Umfang zu vergegenständlichen, vollkommen neue Dimensionen der Wissensrepräsentation.

J.Grabmeier beschreibt die Perspektiven eines solchen *Übergangs von einer fakten- zu einer stärker algorithmenorientierten Wissensrepräsentation* in [6] wie folgt:

> Viele Probleme aus der Ingenieurwelt, den Naturwissenschaften und den Wirtschaftswissenschaften sind heute ohne massiven Einsatz von Computern nicht lösbar. Die dahinterliegenden Probleme werden mit den Methoden des Wissenschaftlichen Rechnens angegangen. Dabei werden mehr und mehr die traditionellen numerischen Rechnungen durch symbolisches Rechnen mit dem Computer ersetzt bzw. ergänzt...
>
> Der Siegeszug der Computeralgebra in den letzten Jahren ist eng gekoppelt mit der stürmischen Entwicklung von immer neuen Rechnergenerationen, die es erst möglich gemacht hat, die besonders rechen- und speicherintensiven Programme und Systeme zum symbolischen Rechnen zu realisieren.
>
> Aber der Aufwand lohnt sich: Wenn man statt einer Zahl eine parameterabhängige Formel als Ergebnis erzielt, hat man nicht nur ein Problem gelöst, sondern eine Klasse von möglicherweise *unendlich vielen* Problemen erledigt. Dadurch wird ein Qualitätssprung möglich, denn die Formel erlaubt es nun z.B., die Parameter zu optimieren oder schnell auf Veränderungen zu reagieren. ...

> Wie heute ein Taschenrechner zum Alltag gehört, wird künftig jeder Ingenieur und jeder, zu dessen Aufgaben das Lösen, Erlernen oder Lehren mathematischer Probleme gehört, Zugriff auf ein Computeralgebra-System haben. Die verschiedenen schon heute verfügbaren Komponenten für numerisches und symbolisches Rechnen, für Statistik und andere mathematische Gebiete, für Graphik und Animation, Textverarbeitung und Dokumentation mit Hypertext-Systemen und vieles mehr sehe ich in nicht allzu ferner Zukunft über entsprechende Schnittstellen zu individuell kombinierbaren Computermathematik-Systemen für das Wissenschaftliche Rechnen zusammenwachsen. Die Computeralgebra leistet damit einen wesenlichen Beitrag für eine der Schlüsseltechnologien unserer technikbestimmten Gesellschaft.

Diese Zusammenführung der Computermathematik mit anderen Technologien in einer vollkommen neuen Qualität eines *persönlichen digitalen Assistenten* (PDA) prägt heute schon das Erscheinungsbild Mathematica und Maple, die Vorreiter unter den CAS. Sie ermöglichen es,

> als bequeme Werkzeuge für die eigene geistige Arbeit lokal auf dem Schreibtisch des Wissenschaftlers oder Ingenieurs einen immer größeren Teil des globalen Know Hows verschiedener Fachrichtungen in einer auch algorithmisch leicht zugänglichen Form bereitzuhalten und mit anderen Wissensmanagement-Techniken (Internet, Datenbanken, Desktop-Publikationssysteme) zu verknüpfen.

Curriculare Konsequenzen

Die curricularen Konsequenzen aus diesen Entwicklungen werden ähnlich tiefgreifend sein müssen wie die Entwicklungen selbst, wenn die studentische Ausbildung mit den neuen Anforderungen Schritt halten will.

Konsequenzen für den Einsatz von Computeralgebra (in der oben thematisierten technologischen Dimension) sind dabei einzubetten in Konsequenzen, die sich generell aus der zu erwartenden Allgegenwart des Computers ergeben. Eine elementare Prämisse stellt die Verankerung einer informatischen Allgemeinbildung im Schul-Curriculum dar, um die derzeit nicht nur in Sachsen erbitterte Grabenkämpfe zwischen der Ministerialbürokratie und dem Rest der Welt geführt werden. Statt provisorischer Augenblickslösungen, die sich an großzügige und nur auf den ersten Blick uneigennützige Angebote großer Firmen aus dem Computer- oder Telekommunikationsbereich wie an einen Strohhalm klammern, sind dabei langfristig materiell, personell und auch didaktisch abgesicherte Konzepte gefragt. Gute "offizielle" Konzepte in dieser Richtung sind Mangelware. Eine Gruppe interessierter (und betroffener) Informatiklehrer aus Sachsen ([5]) hat ein solches Konzept entwickelt, das propädeutische Elemente in der Grundstufe, eine systematische Einführung in allgemeinbildende Aspekte der Informatik in der Sek I und ausgewählte weiterführende Anwendungsaspekte in der Sek II vorsieht.

Auf einer solchen Ausbildung kann die Unterweisung des naturwissenschaftlichen und ingenieurtechnischen Nachwuchses im Einsatz speziellerer computermathematischer Werkzeuge aufsetzen, wobei wie beim Taschenrechner-Einsatz die drei Etappen

1. propädeutische Sensibilisierung
2. fachwissenschaftlicher Einsatz
3. systematisierende Einführung

zu durchlaufen sind. Die propädeutische Sensibilisierung kann durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen im Unterricht der Sek II erreicht werden (derzeit ebenfalls stark in der Diskussion, siehe [12]), so dass wir in absehbarer Zeit auf Studienanfänger hoffen können, denen der Gebrauch dieser Denkwerkzeuge nicht mehr fremd ist.

Die durchgängige Verwendung in der fachwissenschaftlichen Ausbildung ist der Platz, an dem die genannte Zielgruppe weitere eigene Erfahrungen im Einsatz computeralgebraisch basierter Werkzeuge sammeln kann. Auf die unbestreitbaren didaktischen Potenzen, diesen Studenten in dem Zusammenhang auch die Mathematik etwas näher zu bringen, will ich hier nicht eingehen.

Auf der Basis dieser Erfahrungen ist es angezeigt, die Studenten mit den Möglichkeiten und Grenzen von Computeralgebra-Werkzeugen *in systematisierender Form* vertraut zu machen, damit sie die Komplexität dieser Instrumente gezielt, qualifiziert und kulturvoll zum Einsatz bringen können, kurz, einen guten "Programmierstil" entwickeln. Dies kann im Rahmen einer Grundausbildung Informatik geschehen und dort auf entsprechende Systematisierungen von Algorithmen, Datenstrukturen und Programmiererfahrungen aufbauen, bietet aber auch genug Stoff für eine eigenständige zweistündige Lehrveranstaltung. Die hier zu vermittelnden Konzepte und Begrifflichkeiten bedürfen noch einer deutlicheren Fixierung seitens der Computeralgebra selbst und sollten wegen der Beispielwirkung auch beim Einsatz von Computeralgebra in der fachwissenschaftlichen Ausbildung durch die jeweiligen Lehrkräfte Berücksichtigung finden.

Bis wir diesen Idealzustand in seiner vollen Schönheit erreicht haben, wird allerdings noch viel Wasser in den Bodensee hinein- und wieder herausfließen. In der Zwischenzeit wird viel zu improvisieren sein, um einer äußerst heterogen vorgebildeten und motivierten Studentenschar die Schönheit und Wichtigkeit dieser Technologie nahe zu bringen und sie möglichst gut auf den qualifizierten Einsatz dieser Instrumente in ihrer eigenen beruflichen Laufbahn vorzubereiten.

Literatur

[1] K. Appel and W. Haken. A proof of the four color theorem. *Discrete Math.*, 16:179–180, 1976.

[2] *Brockhaus Enzyklopädie in 26 Bänden.* F.A. Brockhaus, Mannheim, 1994.

[3] B. Buchberger. Symbolisches Rechnen. In P. Rechenberg and H. Pomberger, editors, *Informatik-Handbuch*, chapter E5, pages 799 – 817. Hanser, München, 1997.

[4] H. Engesser, editor. *Duden Informatik.* Dudenverlag, Mannheim, 1993.

[5] GI-Fachgruppe 7.0.3 für InformatiklehrerInnen, Landesgruppe Sachsen. Siehe `marvin.sn.schule.de/~gi/`.

[6] J. Grabmeier. Computeralgebra – eine Säule des Wissenschaftlichen Rechnens. *it + ti*, 6:5 – 20, 1995.

[7] J. Grabmeier and V. Weispfenning, editors. *Computeralgebra in Deutschland – Bestandsaufnahme, Möglichkeiten, Perspektiven.* Fachgruppe der GI, DMV, GAMM, Passau and Heidelberg, 1993. Eine überarbeitete und wesentlich erweiterte Auflage erscheint im Jahr 2000 bei Springer.

[8] D.E. Knuth. *The art of computer programming.* Addison Wesley, 1991.

[9] R. Pavelle, M. Rothstein, and J.P. Fitch. Computer algebra. *Scientific American*, 245(6):102 – 113, dec 1981.

[10] P. Rechenberg and H. Pomberger, editors. *Informatik-Handbuch.* Hanser, München, 1997.

[11] Schneider, editor. *Lexikon Informatik.* Oldenbourg, München, 4.0 edition, 1997.

[12] Teachers teaching with technology. Siehe `www.uni-muenster.de/ZKL-t3/`.