S T R E C K U N G S R I N G E

DISSERTATION B

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor scientiae naturalium (Dr. sc. nat.)

eingereicht beim
Wissenschaftlichen Rat
der Pädagogischen Hochschule
"Dr. Theodor Neubauer"
Erfurt/Mühlhausen

von

Dr. Hans-Gert Gräbe
geb. am 13.11.1955
in Adorf/V.

Angenommen vom Senat des Wissenschaftlichen Rates der Pädagogischen Hochschule "Dr. Theodor Neubauer" Erfurt/Mühlhausen

Vorsitzender des Wissenschaftlichen Rates :

1. Gutachter : Prof. Dr. sc. nat. G. Pfister

2. Gutachter : Prof. Dr. sc. nat. K. Rosenbaum

3. Gutachter : Prof. Dr. sc. nat. W. Vogel

Datum des Beschlusses über die Verleihung des akademischen Grades :

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mit weiterer Verbreitung der Rechentechnik, insbesondere von Personalcomputern, ist es in den letzten Jahren möglich geworden, auch in der Mathematik selbst in größerem Maße Beispiele mit hohem Rechenaufwand zu analysieren. Damit vergrößerte sich das Interesse an entsprechender Software und algorithmische Fragestellungen rückten wieder mehr in den Vordergrund des Interesses. Auch die kommutative Algebra blieb von diesem Trend nicht verschont.

Seit den grundlegenden Arbeiten zur Syzygientheorie am Anfang unseres Jahrhunderts ist bekannt, daß algorithmische Probleme der kommutativen Algebra im Prinzip sehr kompliziert sind. Versuche, etwa für die Syzygienberechnung generelle Gradschranken anzugeben, führten auf doppelt exponentielle Schranken. Neuere Ergebnisse [40] zeigen, daß diese Schranken im Wesentlichen auch scharf sind. Damit sind praktischen Verfahren auf dieser Basis, die generell funktionieren, natürliche Grenzen gesetzt.

Demgegenüber erwies sich der Zugang über Gröbnerbasen als sehr fruchtbar. Dieser 1965 von B.Buchberger in seiner Dissertationsschrift eingeführte Begriff gestattet es, aufwendige Gradabschätzungen durch einen "konstruktiv endlichen" Prozeß zu ersetzen. Genauer gesagt, während man bei dem ersten Verfahren stets bis zur Gradschranke für den theoretisch ungünstigsten Fall rechnen muß, um sicherzugehen, alle Syzygien berechnet zu haben, ergibt sich hier die Terminationsbedingung aus der Abarbeitung einer mit dem konkreten Ideal verbundenen Menge von Bedingungen. Der Rechenaufwand hängt also vom vorgegebenen Ideal ab. Damit sind natürlich keine generell besseren Gradschranken zu erwarten (was entsprechende Komplexitätsuntersuchungen [40], [43] auch belegen). Allerdings tritt der "ungünstige Fall" nur mit Wahrscheinlichkeit Null ein (auch wenn eine solche Aussage mit Vorsicht zu genießen ist. Die Punkte auf einer komplexen Mannigfaltigkeit sind mit Wahrscheinlichkeit Eins regulär und doch sind gerade die singulären Punkte die interessanten) und bei praktisch interessanten idealen reduziert sich der Rechenaufwand beträchtlich. Viele Fragen, die sich auf die Syzygienberechnung reduzieren lassen, etwa Idealdurchschnittsberechnungen, Enthaltenseinstests, Idealquotientenberechnung, Berechnung der Hilbertfunktion o.ä. rücken so in den Bereich praktisch zugänglicher Verfahren. Entsprechende Programme sind in vielen Computeralgebrasystemen implementiert.

Auf der anderen Seite ist die Idee, die Leitmonome der Elemente eines Ideals zu betrachten (die Grundidee der Gröbnerbasen), im Zusammenhang mit Versuchen, kombinatorische Ideen zur Untersuchung von Fragestellungen der kommutativen Algebra anzuwenden, wenigstens bis zu F.S.Macaulay zurückzuverfolgen. Stark entwickelt wurde diese Idee insbesondere im Zusammenhang mit der Untersuchung von Determinantenidealen durch W.D.Hodge in den vierziger Jahren. Einen neuen Aufschwung erlebten sie in den siebziger Jahren in den Arbeiten [13] bis [16], die in der Einführung des Begriffs der Hodgealgebren ihre theoretische Verallgemeinerung fanden.

In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere Verallgemeinerung, der Begriff des Streckungsringes formuliert, der sowohl die Gröbnerbasen als auch die Hodgealgebren umfaßt. Es zeigt sich, daß sich die Ideen beider Gebiete, durch eine solche Verallgemeinerung vereinigt, gegenseitig ergänzen.

Bei den bisherigen Untersuchungen zu Gröbnerbasen und auch Hodgealgebren blieben die Analogien und Parallelen sowohl der Methoden als auch der Ergebnisse dieser Richtung zu denen über assoziierte graduierte Ringe weitgehend unberücksichtigt. Grob gesagt ist dies die Erwartung, daß der Ring selbst nicht "schlechter" als sein assoziierter graduierter Ring bzw. sein diskreter Streckungsring ist. Diese Idee wird im Teil 3 der vorliegenden Arbeit genauer entwickelt. Ausgehend von einer geeigneten Modifizierung der Spektralsequenztechnik, die sich im Falle des assoziierten graduierten Rings als sehr nützlich erwiesen hat, lassen sich fast alle klassischen Ergebnisse über assoziierte graduierte Ringe für Streckungsringe entsprechend modifizieren.

Der bisher am intensivsten untersuchte Fragenkomplex ist der Zusammenhang zwischen Gröbnerbasen und freien Auflösungen ([41], [7] u.a). Im Teil 5 zeigen wir, daß auch für Strekkungsringe eine minimale Auflösung des diskreten Streckungsrings stets zu einer (nicht notwendig minimalen) Auflösung des Ausgangsringes geliftet werden kann. Obwohl in Computeralgebrasystemen die Syzygienberechnung meist über mehrfaches Anwenden des Gröbnerbasisalgorithmus realisiert wird, ist es in diesem und auch anderem Zusammenhang (etwa zur Berechnung der Hilbertfunktion) interessant, als Startpunkt eine minimale oder wenigstens fast minimale Auflösung des diskreten Streckungsringes zu finden. Ausgehend von der bekannten Auflösung in [58] geben wir dazu in Teil 4 verschiedene Verfahren an, die eine "fast" minimale Auflösung in den meisten Fällen liefern. Diese Ergebnisse sind eine gute Grundlage für den Nachweis der Exaktheit von Auflösungen ganzer Idealklassen wie etwa der monomialen Raumkurven oder monomialer Gorensteinkurven im $\mathbb{A}^4$, vgl. [28].

Im Teil 6 schließlich werden die für Streckungsringe erhaltenen Ergebnisse auf verschiedene Determinantenideale angewandt. Deren kombinatorische Streckungsringstruktur ist nach [14] gut bekannt. Wir nutzen die erhaltenen Ergebnisse, um in kompakter Form eine Reihe von Invarianten dieser Ideale zu berechnen, von denen die meisten allerdings bereits bekannt sind.

Teil 7 enthält schließlich die Beschreibung eines Computeralgebrasystems in Turbo-PASCAL, das der Autor für den Einsatz am PC 1715 entwickelt hat. Seine Möglichkeiten entsprechen in etwa denen des kommerziell vertriebenen Systems MACAULAY für IBM-kompatible Personalcomputer, tragen allerdings dem wesentlich geringeren Speicherplatzangebot am PC 1715 Rechnung.

Zum Schluß sei bemerkt, daß verschiedene Autoren Gröbnerbasen auch für nichtkommutative Ringe untersucht haben. So werden etwa in [2] und [3] Syzygien in Liealgebren berechnet. Auch die Idee des Streckungsringes kann man in dieser allgemeineren Situation formulieren, wobei sich viele Ergebnisse aus Teil 3 ebenfalls verallgemeinern lassen. Da jedoch im nichtkommutativen Fall eine entwickelte Homologietheorie nicht zur Verfügung steht, wollen wir uns auf den kommutativen Fall beschränken.

Bezeichnungen

$[n] = [1<2<\ldots<n]$ $\qquad$ $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$

$e_i = (0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) \in \mathbb{N}^H$ $\qquad$ $a(I,J) = \#\{(i,j) : i>j\}$

$\langle a,b\rangle := \sum a_h b_h$ das übliche Skalarprodukt in $\mathbb{R}^H$

$a|b$ bzw. $x^a|x^b$ die Teilbarkeitsrelation für Monome.

Für eine Halbordnung $(H,<)$ bezeichnen

$M(H) = \{a \in \mathbb{N}^H : s(a)$ ist keine Kette in $H\}$

das Monoid der Nichtmultiketten in H,

$\langle I\rangle$ das von I erzeugte Ordnungsideal.

Weiterhin bezeichnen

R-Mod die Kategorie der R-Moduln,

R-$\underline{\text{Mod}}$ die Kategorie der homogenen R-Moduln.

$\mathbb{H}\mathrm{om}$ den Hom-Funktor in der abgeleiteten Kategorie von R-Mod.

Im Text werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

Seite	Bezeichnungen
8	$s(a)$
9	$r(H)$, $a<_t b$, $\deg_t$
11	$K(\sigma)$, $K_{\mathbb{R}}(\sigma)$
12	F_r, $\mathfrak{r}'$
13	$Z(P,n)$, c_k, $J(Q)$, $F(P,t)$
14	$G(M,N)$, grade M, depth, dim, id, pd, fd, id^k, fd^k
15	$P_R(t)$, $u_i(p,M)$, gldim R, $k(p)$, K_R, K_M^i
16	R_m^i, R_n, S_n, T_n, $H(M,n)$, $h(M,n)$, $F(M,t)$
17	$e(M)$
18	H^-, p^*, $M_{(p)}$
20	$\mathrm{reg}(M)$
21	Σ, $Mo(a)$
33	$\hom_R(M,N)$, $\mathrm{gr}^a(M)$, F_a, $F_{<a}$

Seite	Bezeichnungen
34	E_n^a, Z_n^a, B_n^a
37	$F_a(M\ N)$, $F_a(\mathrm{Hom}(M,N))$
38	N_I, F_aM_i
43	M^*, W_R, G-dim
44	L."
45	Ind_k, $M(I)$, $e(I,J)$
46	$g(I)$
50	$R(t)$, $I(t)$, S_t
56	$\mathbb{G}(d,n)$, $G(d,n)$, $B(d,n)$
57	$F(\mathfrak{a})$, $\mathbb{O}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$
58	$O(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$
59	$P(d,m)$
60	$I(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, I_r, $Q(r)$
61	$R(\mathfrak{a}\mid\mathfrak{b})$, $Q(\mathfrak{a}\mid\mathfrak{b})$
62	$F(\mathfrak{a}\mid\mathfrak{b})$
64	m-$\mathfrak{a}$
65	$N(u_1\ldots u_r;m)$
66	$Pf(n)$
67	$I(c)$, $R(c)$, $Q(2c,n)$, $Pf(2c,n)$

Teil 1: Grundlagen

1.0. Vereinbarungen

k sei ein kommutativer noetherscher Ring mit 1, H eine endliche Menge und $S:=k[x_v : v\in H]$ der Polynomring in x_v, $v\in H$, über k. $a=(a_v)\in \mathbb{N}^H$ bzw. $x^a:=\prod x_v^{a_v}$ wollen wir (synonym) als <u>Monome</u> bezeichnen, $s(a)=s(x^a):=\{v : a_v\neq 0\}$ als dessen <u>Träger</u>.

Eine <u>D-Graduierung</u> auf den Monomen ist eine additive Abbildung $\deg:\mathbb{N}^H \longrightarrow D$ der Monome in einen Monoid D. $T=(\deg x_v : v\in H)\in D^H$ heißt dann <u>Gradvektor</u>. $\mathbb{N}$-Graduierungen sollen (einfache) Graduierungen, $\mathbb{N}^t$-Graduierungen <u>Multigraduierungen</u> heißen. In diesen Fällen wollen wir stets, wenn nicht anders vereinbart, $\deg x_v\neq 0$ für $v\in H$ voraussetzen. Dies bedeutet, daß $\{a\in \mathbb{N}^H : \deg a \text{ fixiert}\}$ eine endliche Menge ist. Falls überdies k ein D-graduierter Ring ist, kann man die Gradfunktion von $\mathbb{N}^H$ auf ganz S fortsetzen (insbesondere also, wenn alle Elemente aus k homogen vom Grad 0 sind).

Sei für $D=\mathbb{N}^t$ und für ein Monom m $\deg m=(a_1,\ldots,a_t)$. Dann bezeichnen wir $|m|:=a_1+\ldots+a_t$ als den <u>Totalgrad</u> von m und die zugehörige $\mathbb{N}$-Graduierung die zu deg gehörende <u>einfache Graduierung</u>.

1.1. Halbordnungen

Im weiteren benutzen wir die Terminologie von [1]. Darüber hinaus heiße eine Halbordnung $<$ auf $\mathbb{N}^H$

<u>monoton</u> $:\Leftrightarrow$ $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

<u>homogen</u> $:\Leftrightarrow$ $a<b$ nur wenn $\deg a=\deg b$ für eine gegebene Gradfunktion

<u>lokal endlich</u> $:\Leftrightarrow$ $|\{a : a<b\}|$ ist endlich (besser intervallendlich)

<u>mit Kettenbedingung</u> (noethersch) $:\Leftrightarrow$ in jedem abgeschlossenen Intervall ist jede absteigende Kette endlich.

Jede homogene Ordnung ist nach Definition der Gradfunktion lokal endlich, jede lokal endliche Ordnung erfüllt die Kettenbedingung. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

Ist auf H eine Halbordnung $<$ gegeben, dann sei

$a \lhd b :\Leftrightarrow$ in $b-a \in \mathbb{Z}^H$ gilt für alle maximalen bzgl. $<$ Elemente $i \in s(b-a)$: $a_i < b_i$

die <u>lexikographische Ordnung</u>. Sie ist monoton und erfüllt die Kettenbedingung, ist aber im allgemeinen nicht lokal endlich. Man beachte, daß die dazu inverse Ordnung nicht noethersch ist.

Besitzt $\mathbb{N}^H$ weiterhin eine Gradfunktion, dann kann man bzgl. der zugehörigen einfachen Ordnung außerdem die <u>graduiert lexikographische Ordnung</u>

$a \lhd b :\Leftrightarrow |a| = |b|$ und in $b-a \in \mathbb{Z}^H$ gilt für alle maximalen bzgl. $<$ Elemente $i \in s(b-a)$ $a_i < b_i$

sowie die <u>verallgemeinerte graduiert lexikographische Ordnung</u>

$a \lhd b :\Leftrightarrow |a| < |b|$ oder $|a| = |b|$ und in $b-a \in \mathbb{Z}^H$ gilt für alle maximalen bzgl. $<$ Elemente $i \in s(b-a)$ $a_i < b_i$

definieren. Beide Ordnungen sind monoton und lokal endlich. Ist die Ordnung auf H linear, dann auch die lexikographische und verallgemeinerte graduiert lexikographische Ordnung auf den Monomen.

$p_1 < \ldots < p_n$ ist eine Kette der <u>Länge n</u> in H. Als <u>Rang</u> $r(H)$ von H bezeichnet man die maximal mögliche Kettenlänge in H.

Definiert $\underline{t} \in \Omega^H$ eine Ω-Graduierung auf $\mathbb{N}^H$, so sei

$a <_t b :\Leftrightarrow \deg_t a < \deg_t b$

mit $\deg_t a := \langle a, \underline{t} \rangle$ die <u>zugehörige Ordnung</u>.

<u>1.2. Einbettung monotoner Ordnungen in lineare Ordnungen</u>

Unter einer Ordnungsrelation $<$ wollen wir im weiteren stets eine transitive, irreflexive, monotone Halbordnung auf $\mathbb{N}^H$ oder $\mathbb{Z}^H$ verstehen. Für $<$ gilt die <u>Kürzungsregel</u>, wenn aus $a+c<b+c$ stets $a<b$ folgt.

<u>Satz 1:</u> Die Ordnung $<$ hat absteigende Ketten unendlicher Länge genau dann, wenn es eine Relation $b > a+b$ mit $a \in \mathbb{N}^H$ gibt. Gilt die Kürzungsregel, so ist dies äquivalent zur Existenz einer Relation $0 > a$.

Beweis : Aus der Monotonie folgt $b > a+b > 2a+b > \ldots$. Für die Umkehrung zeigen wir, daß in einer unendlichen Kette $a_1 > a_2 > \ldots$ zwei Indizes mit $a_i | a_j$ existieren. Sei $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kN})$. Enthält die Folge (a_{k1}) eine unendliche beschränkte Teilfolge, so enthält sie auch eine stationäre Teilfolge. In diesem Fall ersetzen wir die Ausgangsfolge (a_k) durch die entsprechende Teilfolge. Andernfalls ist (a_{k1}) eine unbeschränkt wachsende Folge. Verfahren wir analog mit $(a_{k2}),\dots,(a_{kN})$, erhalten wir im Ergebnis eine Teilfolge der Ausgangsfolge, deren Komponenten entweder konstante oder unbeschränkt wachsende Folgen bilden. Die Auswahl von i und j ist nun ohne Schwierigkeiten möglich. #

<u>Folgerung 1:</u> Ist $<$ eine monotone Ordnung mit Kettenbedingung, so auch $a \lhd b \;:\Leftrightarrow$ es existiert ein c mit $a+c<b+c$.

Bemerkung: Im Gegensatz dazu muß sich die lokale Endlichkeit nicht übertragen, wie ein Beispiel weiter unten zeigen wird.

<u>Folgerung 2:</u> Für $\underline{t} \in \mathbb{Q}^H$ erfüllt $<_t$ die Kettenbedingung genau dann, wenn $\underline{t} \in (\mathbb{Q}_{\geq 0})^H$.

Betrachten wir vorerst ein Beispiel, das den Unterschied zwischen lokaler Endlichkeit und Kettenbedingung demonstriert:

Beispiel: $(a,b)<(c,d) \;:\Leftrightarrow b<d$ oder $b=d$ und $a<c$.

Dies ist genau die lexikographische Ordnung. Insbesondere gilt $(n,0)<(0,1)$ für alle n, d.h. die Ordnung ist nicht lokal endlich, erfüllt aber die Kettenbedingung.

<u>Satz 2:</u> Jede monotone Ordnung mit Kettenbedingung kann in eine ebensolche <u>lineare</u> Ordnung eingebettet werden.

Beweis : Wir konstruieren eine entsprechende Erweiterung der Ordnung in mehreren Schritten. Die jeweils alte Ordnung sei dabei mit $<$, die jeweilige neue Ordnung mit $\lhd$ bezeichnet.

1. Erweiterung: Nach Satz 1 können wir alle noch fehlenden Relationen $a \lhd a+b$ hinzunehmen und davon die transitive Hülle bilden:

$a \trianglelefteq a' \;:\Leftrightarrow$ es existieren Zwischenglieder $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$

$$\text{mit } a\leq a_1,\ a_1+b_1\leq a_2, a_2+b_2\leq a_3,\dots, a_n+b_n\leq a'$$

Diese Ordnung ist offensichtlich transitiv und monoton. Sie genügt der Kettenbedingung, denn wäre $a=a'+b$, dann wäre $a+(b_1+\dots+b_n) < a'+(b_1+\dots+b_n)$ im Widerspruch zu Satz 1. Nach Satz 1 erfüllt damit jede weitere monotone Erweiterung der Ordnung automatisch die Kettenbedingung.

2. Erweiterung: Die Erweiterung sei

$$a \lhd b \;:\Leftrightarrow \text{es ex. } c \text{ mit } a+c<b+c$$

Die neue Ordnungsrelation ist offensichtlich monoton und transitiv und erfüllt die Kürzungsregel.

3. Erweiterung: Seien c und d noch nicht vergleichbar. Dann sind auch $a+c$ und $a+d$ nicht vergleichbar, da die Kürzungsregel gilt. Fügen wir deshalb alle Relationen der Art $a+c \lhd a+d$ für fixierte c und d hinzu und bilden davon die transitive Hülle:

$a \lneq a'$:<=> es existieren Zwischenglieder $a_1, \ldots, a_n$

$$\text{mit } a \leq a_1+c,\ a_1+d \leq a_2+c, \ldots, a_n+d \leq a'$$

Monotonie und Transitivität sind offensichtlich.

Führt man nun wieder die zweite Erweiterung aus und so fort, so liefert ein Induktionsschluß (etwa durch eine geeignete Numerierung der Monompaare, die zu betrachten sind) den Beweis unseres Satzes. #

Dabei kann man es bei Vorliegen einer lokalen endlichen Halbordnung im allgemeinen nicht vermeiden, daß die entstehende totale Ordnung nicht mehr lokal endlich ist, sondern nur noch der Kettenbedingung genügt.

Beispiel: Betrachten wir die Ordnung $(a,b) \leq (c,d)$:<=> $b \leq d$ und $a \leq 2^{d-b}c$. Dies ist eine monotone, lokal endliche Ordnung auf $\mathbb{N}^2$, in der $(2n,0) < (n,1)$ gilt. In einer Erweiterung zu einer totalen Ordnung $\lhd$ gilt die Kürzungsregel, also $(n,0) \lhd (0,1)$ für alle n.

Ist die Ordnung, von der wir ausgehen, dagegen homogen, so kann man stets eine homogene, totale, monotone Erweiterung angeben, im Sinne, daß $\deg a < \deg b \Rightarrow a \lhd b$ gilt.

Eine Ordnung heiße <u>normal</u>, wenn gilt

$$m*a > 0 \Rightarrow a > 0 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_+.$$

Jede monotone Ordnung mit Kürzungsregel σ auf $\mathbb{Z}^H$ wird durch ihren Positivkegel

$$K(\sigma) := \{a \in \mathbb{Z}^H : a >_\sigma 0\}$$

eindeutig bestimmt: $a >_\sigma b$:<=> $a-b >_\sigma 0$.

Ist σ überdies normal, so wird σ sogar durch die konvexe Hülle $K_{\mathbb{R}}(\sigma)$ von $K(\sigma)$ in $\mathbb{R}^H$ bestimmt, denn dann gilt

$$K(\sigma) = K_{\mathbb{R}}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^H.$$

$K_{\mathbb{R}}(\sigma)$ ist ein Kegel "mit Spitze", d.h enthält keinen nichttrivialen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^H$ (obwohl der Abschluß von $K_{\mathbb{R}}(\sigma)$ im Fall einer linearen Ordnung sogar eine Hyperebene enthält, vgl. [45]).

<u>Satz 3:</u> Jede monotone, normale Ordnung mit Kürzungsregel ist der Durchschnitt der sie enthaltenden linearen monotonen Ordnungen.

Dies folgt sofort aus der Beschreibung linearer monotoner Ordnungen in [45]. Für eine beliebige monotone Ordnung sei der Durchschnitt der sie enthaltenden linearen monotonen Ordnungen ihr <u>Abschluß</u> genannt. Dies ist die kleinste normale monotone Ordnung mit Kürzungsregel, die die vorliegende Ordnung umfaßt.

<u>Korollar :</u> Der Abschluß einer monotonen Ordnung mit Kettenbedingung erfüllt ebenfalls die Kettenbedingung.

<u>1.3. Kombinatorische Grundlagen</u>

<u>Partitionen und Ferrersdiagramme</u>

Die Sequenz $\mathbf{r}=(r_1\geq\ldots\geq r_k)$ natürlicher Zahlen nennt man eine <u>Partition</u> der Zahl n, wenn $r_1+\ldots+r_k=n$ gilt. Jeder solchen Partition kann man ein <u>Ferrersdiagramm</u> zuordnen, das aus genau r_i Kästchen in der i-ten Zeile besteht:

$$\mathbf{r} \dashrightarrow F_r:=\{(i,j)\in \mathbb{N}^2 ; 1\leq j\leq r_i , 1\leq i\leq k\}$$

Die zu $\mathbf{r}$ <u>konjugierte Partition</u> $\mathbf{r}'$ erhält man aus F_r durch Vertauschen der Zeilen und Spalten.

Die Inklusionsrelation von Ferrersdiagrammen induziert eine teilweise Ordnung der Partitionen. Gilt dabei $\mathbf{r}<\mathbf{s}$ und sind F_r und F_s die zugehörigen Ferrersdiagramme, so gilt also $F_r\subset F_s$ und man kann das <u>schiefe Ferrersdiagramm</u> $F=F_s-F_r$ betrachten.

Beispiel: $\mathbf{r}=(4,3,3,1)$ und $\mathbf{s}=(2,2,2)$

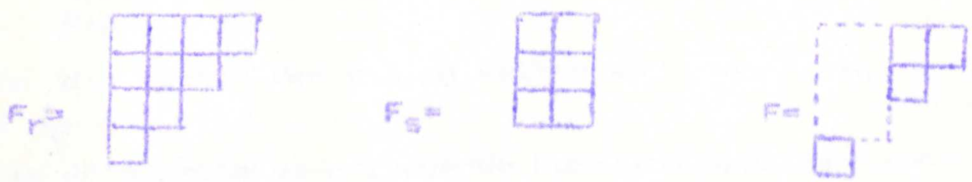
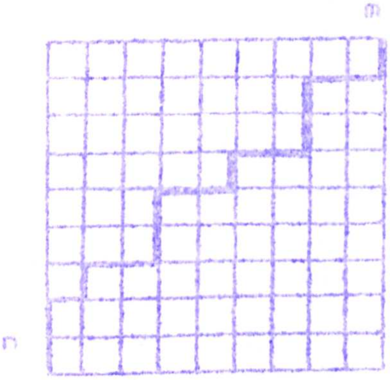


Bild 1: Die Ferrersdiagramme $F_r\supseteq F_s$ und $F = F_r-F_s$

Jedes Ferrersdiagramm F ist selbst eine halbgeordnete Menge bzgl. der komponentenweisen Ordnung auf $\mathbb{N}^2$. Eine ordnungsumkehrende Funktion $F\dashrightarrow\mathbb{N}$ kann man sich deshalb als Tabelle mit dem <u>Format</u> F vorstellen, in der die Zahlen zeilen- und spaltenweise monoton fallen.

Eine Partition ist eine <u>(m,n)-Partition</u>, wenn $r_1\leq m$ und $r_1'\leq n$ gilt. Dann kann F in einem (m,n)-Rechteck untergebracht werden.

Lemma ([39.1.7.]): Ist r eine (m,n)-Partition, dann stellen die Zahlen r_i+n-i, $i=1,\dots,n$, und $n-1+j-r_j'$, $j=1,\dots,m$, eine Permutation der Zahlen $0,\dots,m+n-1$ dar.



Beweis: Numeriert man die Segmente der Trennlinie in nebenstehendem Diagramm von unten beginnend mit $0,\dots,m+n-1$, so stehen an den vertikalen Segmenten die Zahlen r_i+n-i und an den horizontalen $n-1+j-r_j'$. #

Bild 2:
(m,n)-Partition F_r im (m,n)-Rechteck

Die zur (m,n)-Partition $r=(r_1\geq\dots\geq r_n)$ komplementäre Partition ist die Partition $(m-r_n\geq\dots\geq m-r_1)$. Ihr Ferrersdiagramm entsteht aus dem Komplement von F_r im (m,n)-Rechteck durch Spiegeln an der Nebendiagonalen.

Zetapolynom ([1])

Für eine Halbordnung P bezeichne $Z(P,n)$ die Zahl der Multiketten der Länge n, d.h. die Zahl der Ketten

$$x_1\leq\dots\leq x_n \quad \text{mit} \quad x_i\in P.$$

$$Z(P,n)=\sum_{k>0}^{r}\binom{n-1}{k-1}c_k$$ ist ein Polynom für alle $n>0$, wobei c_k gerade die Zahl der echten Ketten der Länge k in P angibt ($c_k=0$ für $k>r(P)$).

Für die entsprechende erzeugende Funktion erhalten wir

$$F(P,t):=\sum_{n>0}Z(P,n)t^n=\sum_{k>0}c_k\left(\frac{t}{1-t}\right)^k$$

vgl. auch [29].

Sei $P=J(Q)$ der Ordnungsidealverband einer Halbordnung Q (derartige Verbände sind gerade die distributiven Verbände; Q besteht dabei aus den vereinigungsirreduziblen Elementen von P). Die Multiketten $p_1\leq\dots\leq p_n$ stehen in eineindeutiger Korrespondenz zu den antimonotonen Abbildungen $f:Q\longrightarrow[n+1]$ via

$$f(q)=\#\{i:p_i\ni q\}+1 \qquad p_i=\{q:f(q)>n-i+1\}$$

Es gilt also

$$Z(P,n) = w(Q,n+1) := \#\{ \text{ antimonotone } f:Q \longrightarrow [n+1] \ \}$$

$$c_k = \tilde{w}(Q,k+1) := \#\{ \text{ surj. antimonotone } f:Q \longrightarrow [k+1] \ \}$$

$$F(P,t) = \sum_{k \geq 0} \tilde{w}(Q,k)\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k+1} + 1$$

$$r(P) = |Q|+1$$

Hat P die Gestalt $P=J(Q)-\{\emptyset\}$, dann gilt analog

$$Z(P,n) = w(Q,n+1)-w(Q,n)$$

$$F(P,t) = \sum_{k \geq 0} \tilde{w}(Q,k)\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k}$$

$$r(P) = |Q|$$

Ist auf P eine Gewichtsfunktion $w:P \longrightarrow \mathbb{N}_+$ definiert, dann kann man analog

$$Z_w(P,n) := \#\ \{ \text{ Ketten in } P \text{ vom Gewicht } n \ \}$$

definieren (Das Gewicht einer Kette ist gleich der Summe der Gewichte seiner Glieder). Für die entsprechende enzeugende Funktion erhalten wir

$$F_w(P,t) := \sum Z_w(P,n)t^n = \sum \frac{t^{w(p_1)+\ldots+w(p_k)}}{(1-t^{w(p_1)})\ldots(1-t^{w(p_k)})}$$

wobei über alle <u>echten</u> Ketten $p_1<\ldots<p_k$ zu summieren ist.

1.4. Grundlagen aus der Algebra

Wir benutzen die Terminologie von [38].

Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k oder ein Faktorring des Polynomrings $S=k[x_1,\ldots,x_n]$ und M,N R-Moduln. Dann bezeichnen wir mit

$G(M,N) := \inf\{i:\mathrm{Ext}_R^i(M,N)\neq 0\}$,

insbesondere

depth $N := G(k,N)$	die <u>Tiefe</u>,
grade $M := G(M,R)$	die Länge einer maximalen regulären Sequenz in $(\mathrm{Ann}\ M)$.

dim M die Dimension von M,

id M, pd M, fd M resp. die injektive, projektive und flache Dimension von M,

$\mathrm{id}^k M := \sup\{i:\mathrm{Ext}_R^i(k,M)\neq 0\}$,

$\mathrm{fd}^k M := \sup\{i:\mathrm{Tor}_i^R(k,M)\neq 0\}$.

Ist M endlich erzeugt und R lokal, dann gilt

$$\mathrm{id}^k M = \mathrm{id}\, M \quad \text{und} \quad \mathrm{fd}^k M = \mathrm{fd}\, M = \mathrm{pd}\, M.$$

Ist R kein lokaler Ring, so gilt dies ebenfalls für H-lokale Ringe (d.h. graduierte Ringe R mit einem einzigen homogenen maximalen Ideal $\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)$), da man in der entsprechenden homogenen Kategorie rechnen kann, vgl. (1.5.), bzw. für Ringe R über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper, da dann alle Lokalisierungen in abgeschlossenen Punkten von Spec R den Restklassenkörper k liefern, aber $\mathrm{id}\, M = \sup\{\mathrm{id}\, M_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m}\ \mathrm{Spec}\, R\}$ usw. gilt. Viele der folgenden Ergebnisse sind auch für nicht algebraisch abgeschlossene Grundkörper gültig, weil invariant unter Körperwechsel.

$$\mathrm{gldim}\, R := \sup\{i : \mathrm{Tor}_i^R(k,k) \neq 0\}$$

bezeichnet die *globale Dimension*. Für eine lokalen Ring gilt $\mathrm{gldim}\, R < \infty$ genau dann, wenn R regulär ist. Für eine Faktorring bzgl. eines Polynomrings über einem algebraisch abgeschlossenen Körper bedeutet $\mathrm{gldim}\, R < \infty$, daß Spec R in allen abgeschlossenen Punkten regulär ist.

$$P_R(t) := \sum \dim_k \mathrm{Tor}_i^R(k,k)\, t^i$$

heißt die *Poincarereihe* von R.

$H(\varkappa, M)$ bezeichnet die Koszulhomologien des Moduls M bzgl. der Sequenz $\varkappa=(x_1,\dots,x_m)$.

$$\mu_i(p,M) := \dim_{k(p)} \mathrm{Ext}^i_{R_p}(k(p), M_p)$$

mit $k(p)=R_p/pR_p$ für $p \in \mathrm{Spec}\, R$ heißen *Basszahlen* von M.

Ein endlich erzeugter R-Modul heißt

perfekt $:\Leftrightarrow \mathrm{pd}\, M = \mathrm{grade}\, M \ (<\infty)$,

Cohen-Macaulay(CM) $:\Leftrightarrow \mathrm{depth}\, M = \dim M$,

Gorenstein $:\Leftrightarrow \mathrm{id}\, M < \infty$.

Für einen Cohen-Macaulay-Modul M der Dimension d ist

$$\mathrm{typ}\, M := \dim_k \mathrm{Ext}^d_R(k,M)$$

der *Typ* von R. Ein Cohen-Macaulay-Ring ist Gorenstein genau dann, wenn $\mathrm{typ}\, R = 1$ gilt.

Sei nun R ein Faktorring eines Gorensteinringes S, etwa eines Polynomrings, $\dim R = d$, $\dim S = n$. Dann nennt man

$$K_R := \mathrm{Ext}^{n-d}_S(R,S)$$

den *kanonischen Modul* von R. Allgemeiner bezeichnen wir wie in [51] für einen endlich erzeugten S-Modul M mit $\dim M = r$

$$K_M^i := \mathrm{Ext}^{n-i}_S(M,S)$$

und $K_M := K_M^r$.

Für einen lokalen Ring S sind die Moduln K_M^i dual zu den lokalen Kohomologiemoduln $H_m^i(M)$, vgl. etwa [51].

Ein lokaler Ring R heißt _verallgemeinerter CM-Ring_, wenn seine niederen lokalen Kohomologiemoduln $H_m^i(M)$ $(i<\dim R)$ endliche Länge haben. Äquivalent dazu ist, daß alle K_R^i $(i<\dim R)$ endlicher Länge sind. Dies wollen wir als Definition auch für den allgemeineren Fall nehmen, wenn R ein Faktorring eines Polynomrings ist. Genau wie oben bedeutet dies, daß Spec R dann lokal in allen abgeschlossenen Punkten ein verallgemeinerter CM-Ring ist, denn für ein maximales Ideal $m \in \operatorname{Spec} R$ gilt $K_{R_m}^i \cong (K_R^i)_m$.

Ein R-Modul M erfüllt die _Serrebedingung_

(S_n) $:\Leftrightarrow$ depth $M_p \geq \min(n, \dim M_p)$ für alle $p \in \operatorname{Spec} R$.

R erfüllt die Bedingungen

(R_n) $:\Leftrightarrow$ Für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ gilt: $\dim R_p \leq n \Rightarrow R_p$ ist regulär,

(T_n) $:\Leftrightarrow$ Für alle $p \in \operatorname{Spec} R$ gilt: $\dim R_p \leq n \Rightarrow R_p$ ist Gorenstein.

Die Hilbertfunktion

Ist R eine ($\mathbb{N}$)-graduierte Algebra über dem Körper k und M ein endlich erzeugter homogener R-Modul, so bezeichnet man

$$H(M,n) := \dim_k [M]_n$$

als die _Hilbertfunktion_ von M und

$$F(M,t) := \sum H(M,n)\, t^n$$

als dessen _Hilbertreihe_. $F(M,t)$ ist eine rationale Funktion in t. Wird R als k-Algebra durch Elemente vom Grad 1 erzeugt, dann ist $H(M,n)$ für $n \gg 0$ sogar ein Polynom $h(M,n)$, das _Hilbertpolynom_. Ein solches numerisches Polynom kann man bekanntlich in der Form

$$(1)\quad h(M,n) = \sum_{m=0}^{d} \binom{m+n}{m} a_m \qquad (a_d > 0)$$

mit ganzzahligen a_m darstellen. Für die entsprechende erzeugende Funktion $F_h(t) := \sum_{n \geq 0} h(M,n) t^n$ erhalten wir daraus

$$(2) \quad F_h(t) = \sum_{m=0}^{d} a_m (1-t)^{-(m+1)} = \frac{\sum a_m (1-t)^{d-m}}{(1-t)^{d+1}}$$

und rat.deg $F_h = -\min\{m : a_m \neq 0\} - 1$ als Grad einer rationalen Funktion in t. Andererseits gilt

$$h(M,n) = 0 \ (= H(M,n)) \text{ für } 0 > n > -r \iff a_0 = a_1 = \ldots = a_r = 0$$

und damit in diesem Fall

$$\deg F_h = \max\{n < 0 : h(M,n) \neq H(M,n)\}.$$

Generell gilt

$$F(M,t) = F_h(t) + \sum_{n \geq 0} [H(M,n) - h(M,n)] \cdot t^n$$

und damit entweder

$$h(M,n) = H(M,n) \text{ für } \underline{\text{alle}}\ n \geq 0 \text{ und } F(M,t) = F_h(t)$$

oder $\quad h(M,n) \neq H(M,n)$ für ein $n \geq 0$ und

$$\text{rat.deg } F(M,t) = \max\{n \geq 0 : H(M,n) \neq h(M,n)\}.$$

Da man durch eine Gradverschiebung stets erreichen kann, daß M nur positiv graduiert ist, erhält man in beiden Fällen folgenden Satz:

<u>Satz</u>: Sei R eine von R_1 erzeugte ($\mathbb{N}$-graduierte) k-Algebra und M R-<u>Mod</u> endlich erzeugt. Dann gilt

$$(3) \quad \text{rat.deg } F(M,t) = \max\{n : H(M,n) \neq h(M,n)\}.$$

Weiterhin zeigen obige Überlegungen, daß $F_h(t)$ gerade der Hauptteil der Laurentzerlegung von $F(M,t)$ in $t=1$ und a_d aus (1) der Koeffizient vor dem Hauptterm in dieser Zerlegung ist. Diesen Koeffizienten nennt man die <u>Multiplizität</u> oder den <u>Grad</u> von M, <u>e(M)</u>. Die Dimension von M stimmt mit der Ordnung der Polstelle von $F(M,t)$ in $t=1$ überein und beträgt $\dim M = d+1$.

Schließlich sei noch folgender Satz von POPOVICIU zitiert:

<u>Satz</u>: $(4) \quad F(M,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [H(m,n) - h(M,n)]\, t^n$

ist die Entwicklung von $F(M,t)$ als Laurentreihe in t= .

<u>Lokale Dualität und Hilbertfunktion</u>

Sei R weiterhin homogen und $\mathfrak{m} := \bigoplus_{n>0} [R]_n$ das maximale homogene Ideal von R. Dann gilt für die lokalen Kohomologiemoduln $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ des endlich erzeugten homogenen R-Moduls M

$$(5) \qquad F(M,t) = \sum (-1)^i\, F(H^i_{\mathfrak{m}}(M), t)$$

als rationale Funktionen. Dies folgt aus dem lokalen Dualitätssatz, vgl. [56]. Insbesondere gilt dies für M=R. Im Fall eines Cohen-Macaulay-Moduls verschwinden die niederen lokalen Kohomologien und es gilt (d=dim M)

(6) $\qquad F(M,t) = (-1)^d\, F(H^d_m(M),t) = (-1)^d\, F(K_M,t^{-1})$

Wir bekommen daraus eine notwendige Bedingung dafür, daß ein CM-Ring R Gorenstein ist. Es muß dann für ein $m \in \mathbb{Z}$

(7) $\qquad F(R,t) = (-1)^d t^m F(R,t^{-1})$

sein, da für Gorensteinringe $K_R \cong R$ gilt. F(R,t) soll in diesem Fall <u>numerisch Gorenstein</u> heißen. Nach [55] ist ein CM-Integritätsbereich, dessen Hilbertreihe numerisch Gorenstein ist, selbst bereits Gorenstein. Nach [55,5.4.] ist außerdem die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} w(Q,n)\cdot t^n$ genau dann numerisch Gorenstein, wenn in Q alle maximalen Ketten gleichlang sind, d.h Q eine Rangfunktion besitzt.

1.5. Graduierte Ringe

Sei R ein $\mathbb{Z}^n$-graduierter Ring. Wir wollen in diesem Abschnitt die Kategorien der R-Moduln R-Mod und der homogenen R-Moduln R-<u>Mod</u> miteinander vergleichen. Da R-<u>Mod</u> ebenfalls eine abelsche Kategorie ist, kann man in dieser genauso eine kommutative und homologische Algebra entwickeln wie in R-Mod. Die entsprechenden Größen seien durch Unterstreichen bzw. den Vorsatz "H-" gekennzeichnet.

Für einen endlich erzeugten Modul $M \in$ R-<u>Mod</u> ist dessen Primärzerlegung in R-<u>Mod</u> möglich. Insbesondere besteht Ass(M) aus homogenen Primidealen, vgl [7,IV.3.] und H-prime Ideale sind prim. Dagegen müssen H-maximale Ideale nicht unbedingt maximal sein, wie das Beispiel $R=k[T,T^{-1}]$ zeigt. Für $M \in$ R-<u>Mod</u> und ein Primideal $p \in \operatorname{Spec} R$ bezeichnen wir mit

- p^* das größte homogene in p enthaltene Ideal (dieses ist prim),
- M_p die gewöhnliche Lokalisierung nach R-p,
- $M_{(p)}$ die Lokalisierung nach allen homogenen Elementen außerhalb p.

Die folgenden Resultate ergeben sich aus [27].

Für die Basszahlen gilt [27,1.2.3.]

$$u_i(p^*,M) = \underline{u}_i(p^*,M), \text{ speziell also } \mathrm{id}_{R_{p^*}} M_{p^*} = H\text{-}\mathrm{id}_{R_{p^*}} M_{p^*}$$

sowie

$$u_i(p,M) = \begin{cases} \emptyset & i<d = \mathrm{ht}(p/p^*) \\ u_{i-d}(p^*,M) & i \geq d \end{cases}$$

Für die Dimension erhalten wir [27,1.2.1.+2.]

$$H\text{-}\mathrm{Supp}\ M \subseteq \mathrm{Supp}\ M\ ,$$

$$p \in \mathrm{Supp}\ M \Rightarrow p^* \in H\text{-}\mathrm{Supp}\ M \text{ und}$$

$$\dim M_{p^*} = \dim M_p - \mathrm{ht}(p/p^*) = H\text{-}\dim M_{(p)}$$

Ist (R,m) ein H-lokaler Ring (d.h. m einziges homogenes maximales Ideal), so folgt weiter wegen $m=m^*$

$$H\text{-depth}\ M = \mathrm{depth}_{R_m} M_m \ (=B(R/m,M)),$$

$$H\text{-}\dim M \quad = \dim M_m,$$

$$H\text{-}\mathrm{id}\ M \quad = \mathrm{id}\ M_m,$$

und M ist H-CM $\Leftrightarrow$ M_m ist Cohen-Macaulay,

M ist H-Gorenstein $\Leftrightarrow$ M_m ist Gorenstein,

R ist H-regulär $\Leftrightarrow$ R_m ist regulär.

Aus der Charakterisierung der Basszahlen folgt ferner

$$\mathrm{depth}\ M_{p^*} = \mathrm{depth}\ M_p - \mathrm{ht}(p/p^*) = H\text{-depth}\ M_{(p)}$$

und M_p ist CM $\Leftrightarrow$ M_{p^*} ist CM $\Leftrightarrow$ $M_{(p)}$ ist H-CM,

M_p ist Gorenstein $\Leftrightarrow$ M_{p^*} ist Gorenstein $\Leftrightarrow$ $M_{(p)}$ ist H-Gorenstein,

R_p ist regulär $\Leftrightarrow$ R_{p^*} ist regulär $\Leftrightarrow$ $R_{(p)}$ ist H-regulär.

Damit übertragen sich auch die Serrebedingungen

M erfüllt (S_r) $\Leftrightarrow$ M erfüllt H-(S_r),

R erfüllt (R_r) bzw. (T_r) $\Leftrightarrow$ R erfüllt H-(R_r) bzw. H-(T_r).

Des weiteren sei bemerkt, daß man für H-lokale Ringe mit Restklassenkörper k den Begriff einer minimalen Auflösung von $M \in R$-Mod analog [38] einführen kann. $\mathrm{Tor}_i^R(k,M)$ sind dann homogene R-Moduln und bestimmen Anzahl und Grade der Basiselemente der freien Moduln in einer solchen Auflösung. Insbesondere gilt das für homogene k-Algebren R. Auch kann man allgemeiner k als einen H-Körper annehmen, d.h. als einen H-Ring mit nur trivialen H-Idealen. Für H-Moduln über k-Algebren R bzgl. eines solchen H-Körpers k hat man dann ebenfalls Hilbertreihen zur Verfügung, da jeder homogene k-Modul frei ist, vgl. [27,1.4.4.].

Mumford führt in [46, Lektion 14] den Begriff der m-Regularität ein. Ein homogener Modul M S-Mod mit $S=k[x_0,\dots,x_n]$ ($\deg x_i=1$) heißt <u>m-regulär</u>, wenn

$$[H^i_{\mathfrak{m}}(M)]_j=0 \quad \text{für alle } i,j: i+j>m$$

gilt.

$$\operatorname{reg}(M):=\inf\{m\in\mathbb{Z}: M \text{ ist } m\text{-regulär}\}$$

bezeichnet man dann als die <u>Castelnuovoregularität</u> von M.

<u>Satz</u>: Sei $M\in S$-<u>Mod</u> wie oben und

$$0 \longrightarrow \bigoplus S(-e_{rj}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus S(-e_{0j}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung von M. Dann gilt

1. $\min\limits_j(e_{0j})<\min\limits_j(e_{1j})<\dots<\min\limits_j(r_{rj})$

   und für einen perfekten Modul M auch

   $\max(e_{0j})<\max(e_{1j})<\dots<\max(r_{rj})$.
2. $\operatorname{reg}(M)=\max\limits_{i,j}(e_{ij}-i)$ ($=\max(e_{rj}-r)$ für perfekte Moduln)
3. Ist M Cohen-Macaulay, so gilt

   $$\begin{aligned}\operatorname{reg}(M) &= \dim M + \max\{n: H(M,n)\neq h(M,n)\}\\ &= \dim M + \text{rat.deg } F(M,t).\end{aligned}$$

$\{e_{0j}\}$ gibt dabei die Grade der Erzeugenden des Moduls M an. Ist insbesondere M ein CM-Ideal, dessen Erzeugende alle den Grad d haben, so nennt Schenzel in [50] ein solches Ideal <u>extremal CM</u>, wenn $\operatorname{reg}(I)=d$ gilt. Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, daß alle Abbildungen in einer minimalen linearen Auflösung linear sind. Ist I sogar Gorenstein, dann muß nach der Serredualität allerdings die Syzygie höchster Stufe vom Grad d sein. Deshalb heißt ein solches Ideal in [50] <u>extremal Gorenstein</u>, wenn in einer minimalen freien Auflösung alle außer dieser Abbildung linear sind, d.h. wenn $\operatorname{reg}(I)=2d-1$ gilt. Hat I eine dieser Eigenschaften, kann man dessen Hilbertreihe explizit angeben, vgl. [50].

Beweis: 1. ist klar nach der Definition einer minimalen freien Auflösung. Der zweite Teil der Behauptung folgt daraus, daß obige Auflösung nach Anwendung von $\operatorname{Hom}_S(\#,S)$ eine minimale freie Auflösung von $\operatorname{Hom}_S(M,S)$ liefert. Für 2. vgl. [19]. 3. folgt aus der lokalen Dualität (1.4.4.+6.). #

Im Cohen-Macaulay-Fall erhalten wir also auf diese Weise eine leicht zugängliche Schranke für die Erzeugendengrade und die Grade der Syzygien in einer Auflösung.

Teil 2: Streckungsringe

2.1. Definitionen

Sei H eine endliche Menge von Indizes, $S:=k[x_v: v\in H]$ der Polynomring in den Unbestimmten x_v, $v\in H$, über dem kommutativen Ring k und

a) in $\mathbb{N}^H$ ein Monomideal Σ (d.h. $\Sigma+\mathbb{N}^H\subseteq\Sigma$) gegeben.

Die Monome x^a, $a\notin\Sigma$ heißen Standardmonome.

b) auf $\mathbb{N}^H$ eine monotone Halbordnung $<$ mit Kettenbedingung definiert (in den meisten Fällen ist $<$ sogar lokal endlich).

c) $R=S/I$ ein freier k-Modul, für den die Standardmonome eine Basis bilden.

d) Ist für Nichtstandardmonome

$$x^a \equiv \sum r_{ab}x^b =: st(a) \pmod{I}$$

die eindeutige Darstellung als Linearkombination von Standardmonomen ($b\notin\Sigma$) in R, so soll $b<a$ für alle wirklich vorkommenden x^b (d.h. für $b\in \underline{Mo(a)}:=\{b: r_{ab}\neq 0\}$) gelten. Die eindeutige Darstellung $x^a\equiv st(a) \pmod{I}$ heißt Streckungsformel von x^a.

Dann heißt R Streckungsring über H, Σ und k.

Insbesondere ist $R_\emptyset=S/I_\emptyset$ mit $I_\emptyset=(x^a: a\in\Sigma)$ ein Streckungsring, der diskrete Streckungsring über H, Σ und k. Dieser Ring ist homogen bzgl. der Graduierung, die durch $\deg x_v=e_v\in\mathbb{N}^H$ induziert wird. Diese Graduierung wollen wir als die monomiale Graduierung bezeichnen.

Wenn überdies R ein graduierter Ring ist und die Ordnung auf den Monomen diese Graduierung respektiert, nennen wir R einen graduierten Streckungsring.

Aus der Definition lassen sich folgende einfache Eigenschaften ablesen:

Satz 1: 1. $\{x^a-st(a): a\in\Sigma\}$ bilden eine k-Basis von I.

2. Die Menge der Basisstreckungsformeln

$\{x^a-st(a): a$ aus der Basis von $\Sigma\}$ bilden eine Idealbasis von I. Diese muß nicht minimal sein.

3. d) reicht es, für Basiselemente $a\in\Sigma$ zu überprüfen.

4. Ein Nichtnullteiler $t \in k$ ist auch ein Nichtnullteiler in R.

Beweis: 2. Sei I' das von den gegebenen Elementen erzeugte Ideal. Gilt $a \in \Sigma$, so kann man eine Darstellung $a = \sum m_i a_i$ für gewisse Basiselemente $a_i \in \Sigma$ und $m_i \in \mathbb{N}$ finden. Dann gilt auch

$$x^a \equiv \prod st(a_i)^{m_i} \pmod{I'}.$$

$St(a_i)$ besteht aus Summanden x^b mit $b < a_i$. Ausmultiplizieren liefert Summanden x^c mit $c < a$. Zerlegt man die entstehenden Nichtstandardmonome nach derselben Methode weiter, so bekommt man nach endlich vielen Schritten (mod I') eine Zerlegung von x^a in eine Linearkombination von Standardmonomen. Wegen $I' \subseteq I$ kann dies aber nur $st(a)$ sein. Also gilt $x^a \equiv st(a) \pmod{I'}$ für alle $a \in \Sigma$ und damit $I' = I$. Daß die Basis nicht unbedingt minimal sein muß, werden wir in einem späteren Beispiel sehen.
3. folgt sofort aus dem Beweis von 2., 4. gilt wegen c). ∎

Ist Σ ein von quadratfreien Monomen über H erzeugtes Monoid, so kann man mit diesem einen simplizialen Komplex

$$\Delta := \{ s \subseteq H : x_s \notin \Sigma \}$$

verbinden, so daß Σ genau aus allen "Nichtseitenmonomen" von Δ besteht:

$$\Sigma = \Sigma(\Delta) := \{ x^a \in \mathbb{N}^H : s(a) \notin \Delta \}.$$

Solche Streckungsringe nennen wir _quadratfrei_. Der zugehörige Streckungsring ist dann ein Stanley-Reisner-Ring im Sinne von [29].

2.2. Literaturvergleich

Vergleich mit [6]

Dort ist k ein Körper und H eine teilweise geordnete Menge sowie $\Sigma = M(H)$. H hat eine Rangfunktion r, die eine Gradfunktion auf den Monomen, die _Farbgraduierung_ induziert:

$$f : \mathbb{N}^H \longrightarrow \mathbb{N}^s \quad (s = r(H)+1)$$

$$\text{via } e_h \longrightarrow e_{r(h)+1}.$$

Bei Baclawski ist b) durch die Bedingung

b') in $\mathbb{N}^s$ ist eine "verträgliche" (d.h. monotone und lokal endliche) Ordnung $<_1$ gegeben

ersetzt. Aus dieser kann man eine Halbordnung auf $\mathbb{N}^H$ konstruieren:

$$a \lhd b \;:\Longleftrightarrow\; f(a) <_1 f(b)$$

Diese ist monoton und lokal endlich wie $<_1$. Der Vorteil dieses Zugangs besteht darin, daß man im diskreten Streckungsring immer ein farbhomogenes Parametersystem zur Verfügung hat.

<u>Vergleich mit [14]</u>

<u>Satz 2</u>: Graduierte Hodgealgebren im Sinne von [14] sind Streckungsringe.

Bei diesen wird b) und d) durch folgende Bedingung ersetzt:

Auf H ist eine Halbordnung $<$ gegeben, für welche gilt

d') Ist $a \in \Sigma$ ein Basiselement von Σ und

$$st(a) = \sum r_{ab}\, x^b \text{ die Streckungsformel, so gilt}$$

$$\forall\, b: r_{ab} \neq 0 \quad \forall i \in s(a) \quad \exists j \in s(b): j < i.$$

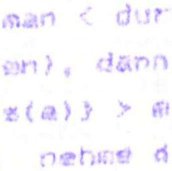
Als Spezialfall für $\Sigma = H(H)$ erhalten wir die <u>gewöhnlichen Hodgealgebren</u>.

Ist auf H eine lineare Ordnung gegeben (für die meisten Zwecke kann man $<$ durch eine Fortsetzung zu einer linearen Ordnung ersetzen), dann besagt d') einfach

$$\min\{s(a)\} > \min\{s(b)\} \text{ für alle } b \in Mo(a).$$

Beweis: Man nehme die inverse graduiert lexikographische Ordnung $\triangleleft$ auf $\mathbb{N}^H$, die durch die zu $(H,<)$ inverse Ordnung induziert wird. d') liefert dann d) für die Basiselemente, was nach Satz 1 ausreicht. #

Bemerkung: Ähnlich kann man für <u>affin graduierte Hodgealgebren</u> (d.h. solche mit einer $\mathbb{N}$-Graduierung, so daß $\deg x^b \leq \deg x^a$ für alle $b \in Mo(a)$, a ein Basiselement) mit Hilfe der verallgemeinerten graduiert lexikographischen Ordnung verfahren. Folgendes Beispiel von EISENBUD zeigt die Grenzen des Konzepts der Hodgealgebra im allgemeinen Fall, vgl. auch [14, Prop. 1.1.]:

Beispiel: $H =$ 

$\Sigma = H(H)$, k sei ein Körper.

Die Basisstreckungsrelation sei

$$yz = x(y^2 + z^2)$$

Sie erfüllt d'). Bei dem Versuch, eine Streckungsrelation für y^2z zu erhalten, bekommen wir nacheinander die Summanden y^2z, xyz^2, $x^2y^2z, \ldots$ und damit eine unendliche Kette. Eine entsprechende Ordnungsrelation auf den Monomen würde nicht der Kettenbedingung genügen. Allerdings ist dies auch keine Hodgealgebra, da man y^2z nicht durch Standardmonome ausdrücken kann.

Es erhebt sich die Frage, ob jede Hodgealgebra affin graduierbar ist. Streckungsringe sind es stets, wie wir in (2.5.) sehen werden.

Von obigem Satz gilt folgende Umkehrung:

<u>Satz 3</u>: Jeder graduierte Streckungsring über einer Halbordnung $(H,<)$ mit $\Sigma=M(H)$ und der zugehörigen inversen graduiert lexikographischen bzgl. $(H,>)$ Ordnung der Monome als $\triangleleft$ ist eine gewöhnliche Hodgealgebra.

Beweis: Erzeugende sind dann

$$x_i x_j=\sum r_a x^a \quad \text{mit } a\triangleleft e_i+e_j$$

für unvergleichbare $i,j\in H$. Da $s(a)$ eine Multikette ist, folgt z.B. $j\notin s(a)$. Dann ist für $b=a-(e_i+e_j)$ die Komponente $b_j<0$, j also nicht minimal in $s(b)$. Sei $k<j$, $k\in s(b)$. Da i und j unvergleichbar sind, folgt $k\neq i$, also $k\in s(a)$. Ist $i\notin s(a)$, argumentiere man genauso. Ist dagegen $i\in s(a)$, so sind i und k vergleichbar. $i\leq k<j$ ist dabei nicht möglich, also gilt $k<i$. #

Wir wollen deshalb im weiteren Streckungsringe über $\Sigma=M(H)$ mit einer endlichen Halbordnung <u>Hodgealgebren</u> nennen.

<u>Gröbnerbasen</u>

Gegeben sei ein Ideal I im Polynomring S sowie eine lokal endliche, monotone <u>lineare</u> Ordnung $<$ der Monome aus $\mathbb{N}^H$ (in den meisten Anwendungen die verallgemeinerte graduiert lexikographische Ordnung bzgl. der Gradfunktion, die jeder Variablen den Grad 1 zuordnet und einer linearen Ordnung auf H). Für $f\in I$ sei $M(f)$ das bzgl. dieser Ordnung größte in f vorkommende Monom. $\Sigma=\{M(f):f\in I\}$ bildet dann ein Monomideal und $R=S/I$ bei gegebenem Grund<u>körper</u> k einen Streckungsring. Die durch die Basisstreckungsformeln gegebenen Erzeugenden des Ideals I nennt man die <u>Gröbnerbasis</u> von I (bzgl. der vorgegebenen Ordnung). Diese muß nicht minimal sein, erlaubt aber im allgemeinen weitergehende Rückschlüsse auf das Ideal I als eine Minimalbasis. Diese Idee der Ordnung von Monomen, die in den letzten Jahren von einer Reihe von Autoren verfolgt wurde, geht in ihren Wurzeln bereits mindestens bis auf F.S.Macaulay zurück. Ausgangspunkt der verstärkten Untersuchungen von Gröbnerbasen bildeten die Arbeiten [9] und [41] sowie Bayers Thesis [7].

Für die Ordnung auf den Monomen wird dort gefordert:

1. $<$ ist eine lineare Ordnung,
2. $x^{a+c} \geq x^a$ für alle $c \in \mathbb{N}^H$,
3. $x^a \leq x^b \iff x^{a+c} \leq x^{b+c}$.

Die dritte Eigenschaft ist für lineare Ordnungen äquivalent zur Monotonie von $<$, die zweite äquivalent zur Kettenbedingung. (1.2. Satz 1). Ist k ein Körper und $<$ eine lineare Ordnung (bzw. im homogenen Fall wenigstens linear auf der Menge der Monome gleichen Grades), dann kann man eine Gröbnerbasis aus einer Minimalbasis auch in endlich vielen Schritten herstellen, vgl. [9]. Sei dazu $\{f_i = x^{a_i} - st(a_i)\}$ eine (Minimal)basis von I und $b+a_i=c+a_j=kgv(a_i,a_j)$ eine Syzygie des Monomideals, das von den x^{a_i} erzeugt wird.

$x^b f_i - x^c f_j = x^c st(a_j) - x^b st(a_i) \in I$, das zugehörige S-Polynom, ist eine Summe von Monomen $d < a_i+b = a_j+c$. Ist x^d im konstruierten Monomideal enthalten, so kann man diese Differenz weiter reduzieren, bis schließlich ein Standardausdruck stehenbleibt. Ist dieser nicht trivial, so stelle man das größte vorkommende Potenzprodukt x^{a_k} als Linearkombination kleinerer dar und füge $f_k = x^{a_k} - st(a_k)$ der Idealbasis hinzu. Das von den Basisleitmonomen erzeugte Ideal ist um das Basiselement x^{a_k} zu vergrößern. Dabei entsteht eine wachsende Kette von Idealen, die sich nach endlich vielen Schritten stabilisieren muß. Dann reduzieren alle S-Polynome zu trivialen Standardausdrücken.

Satz 4 ([9]): Die so bzgl. einer linearen Ordnung $<$ konstruierte Basis ist eine Gröbnerbasis und R ein Streckungsring über $\Sigma = \langle a_k : \text{alle } k \rangle$, H und dem Körper k.

Beweis: Wir zeigen, daß für ein beliebiges $f \in I$ $M(f)$ in Σ liegt. Dann gilt $\Sigma = \{M(f) : f \in I\}$ und R ist ein Streckungring. Sei $f = \sum r_i x^{b_i} \cdot f_i$ $(r_i \in k)$ sowie x^a das maximale unter allen in einem der Summanden $x^{b_i} \cdot f_i$ vorkommenden Monome. Hebt sich x^a in f nicht weg, gilt $M(f) = a = b_i + a_i \in \Sigma$. Hebt sich x^a dagegen weg, d.h. ist $\sum_{a_i+b_i=a} r_i = 0$, so läßt sich $\sum_{a_i+b_i=a} r_i x^{b_i} \cdot x^{a_i}$ als Linearkombination von Basissyzygien von Σ darstellen. Sei $x^{b_i} \cdot x^{a_i} - x^{b_j} \cdot x^{a_j} = 0$ eine solche Syzygie. Dann läßt sich $x^{b_i} \cdot f_i - x^{b_j} \cdot f_j = x^{b_j} \cdot st(a_j) - x^{b_i} \cdot st(a_i)$ durch die Basisrelationen nach Voraussetzung zum trivialen Standardausdruck reduzieren, d.h. in der Form $\sum r_k x^{b_k} f_k$ mit $b_k + a_k < a$ darstellen. Ersetzen wir in

$$f = \sum_{a_i + b_i = a} r_i x^{b_i} \cdot f_i + \sum_{a_i + b_i < a} r_i x^{b_i} \cdot f_i$$

$$= - \sum_{a_i + b_i = a} r_i x^{b_i} \cdot st(a_i) + \sum_{a_i + b_i < a} r_i x^{b_i} \cdot f_i$$

den ersten Summanden durch diese Ausdrücke, erhalten wir eine Darstellung von f durch die f_i mit maximalen Monomen kleiner a. Ein Induktionsargument beendet den Beweis. #

Aus obigen Überlegungen folgt, daß man generell die Syzygien des Monomideals Σ zu solchen von I liften kann ([7,I.2.11.1]). Wir gehen darauf näher in Teil 5 ein.

Da man jede monotone Ordnung mit Kettenbedingung zu einer ebensolchen linearen Ordnung fortsetzen kann, erhalten wir damit folgende

<u>Folgerung</u>: Über einem Körper k hat bzgl. einer vorgegebenen monotonen Ordnung mit Kettenbedingung auf den Monomen jedes Ideal I eine Gröbnerbasis und damit der entsprechende Faktorring auch eine Streckungsringstruktur.

Stanley gibt in [55,(21)] einen anderen Beweis dieses Resultats (bzgl. der lexikographischen Ordnung <). Er konstruiert dazu sukzessiv eine k-Basis B von R wie folgt: $b_1 = 1$. b_{i+1} sei das kleinste bzgl. < von $\{b_1, \ldots, b_i\}$ linear unabhängige Monom in R. Diese Basis stellt bzgl. der Teilbarkeit von Monomen einen Ordnungsfilter dar und ist somit ein Monomideal, das den Bedingungen für eine Streckungsringstruktur auf R genügt.

Beispiel: $R = k[x,y,z]/(xy-xz, x^2, y^2, z^3-yz^2)$

Wir wollen auf diese nulldimensionale k-Algebra Stanleys Algorithmus zur Berechnung der Streckungsringstruktur über $H = (x<y<z)$ anwenden.

$$B = \{1, x, y, z, xy, yz, z^2, yz^2\}.$$

Damit wird $\Sigma = \mathbb{N}^3 - B$ erzeugt von

$$\Sigma = \langle x^2, xz, y^2, z^3 \rangle.$$

Die zugehörigen Relationen sind

$$x^2 = 0 \qquad xz = xy \qquad y^2 = 0 \qquad z^3 = yz^2 .$$

Dies ist keine Hodgealgebra im Sinne von [14], da $xz = xy$ der Bedingung d') nicht genügt. Geht man umgekehrt von $H = (x>y>z)$ aus, so erhält man

$$B = \{1, x, y, z, xz, yz, z^2, z^3\}.$$

und Σ wird erzeugt von

$$\Sigma = \langle x^2, xy, y^2, xz^2, yz^2, z^4 \rangle.$$

Die zugehörigen Relationen sind

$$x^2 = 0 \qquad xy = xz \qquad y^2 = 0 \qquad yz^2 = z^3$$

$$xz^2\ (=xyz=xy^2) = 0 \qquad z^4\ (=yz^3=y^2z^2) = 0\ ,$$

wovon die beiden letzten in einer Minimalbasis überflüssig sind. Dies ist auch keine Hodgealgebra wegen $yz^2=z^3$. Dieses Beispiel zeigt, daß die in (2.1.,Satz 1) angegebene Basis keine Minimalbasis des Ideals I sein muß. Mehr noch kann die Zahl dieser Basiselemente von der konkreten Realisierung als Streckungering abhängen.

Hibi führt in [34], um in obigem Beispiel doch noch eine Hodgealgebrastruktur zu erhalten, eine weitere Variable ein. Dieses Beispiel, zusammen mit obigem Satz bilden also ein gewichtiges Argument dafür, daß sich beim Konzept des Streckungsringes gegenüber dem der Hodgealgebra einige dort beobachtete Zusammenhänge klarer und einfacher darstellen lassen sollten. Dies werden wir auch in den folgenden Punkten noch sehen.

2.3. Neue Streckungsringe aus alten

Sei R ein Streckungsring über Σ, H und k.

Satz 1: 1. Ist $k' \supseteq k$ ein Oberring, so ist $R \otimes_k k'$ ein Streckungsring über Σ, H und k' mit denselben Streckungsformeln.

2. Ist $t \in k$ keine Einheit, so ist $R/t \cdot R$ ein Streckungsring über Σ, H und $k/t \cdot k$. Die Streckungsformeln sind dazu (mod t) zu reduzieren.

Diese Tatsachen folgen unmittelbar daraus, daß R ein freier k-Modul ist.

Satz 2: Ist R ein Streckungsring über Σ, H und k und k ein Streckungsring über Γ, F und k', so ist R ein Steckungsring über

$$\Omega = \Sigma \times \mathbb{N}^F + \mathbb{N}^H \times \Gamma \subseteq \mathbb{N}^{H \vee F},$$

$H \vee F$ und k'.

Beweis: Eine Standardbasis von R über k' besteht genau aus allen Monomen $x^a y^b$, $a \notin \Sigma$, $b \notin \Gamma$, wenn R ein Faktorring von $k[x_v : v \in H]$ und k ein Faktorring von $k'[Y_w : w \in F]$ ist. Die

Streckungsformel von x^a, $a \in \Sigma$, über k' bekommt man aus der von x^a über k

$$x^a = \sum_{b \in Mo(a)} r_{ab} x^b,$$

indem man die Elemente $r_{ab} \in k$ durch ihre Streckungsformeln darstellt. Bzgl. der Ordnung

$$(a,a') < (b,b') :\Leftrightarrow a < b \text{ in } \mathbb{N}^H \text{ oder}$$
$$a = b \text{ und } a' < b' \text{ in } \mathbb{N}^F$$

auf $\mathbb{N}^H \times \mathbb{N}^F$ erfüllen dann die Streckungsformeln die an sie gestellten Bedingungen. Die Monotonie und Kettenbedingung folgen für die neue Ordnung aus den entsprechenden Eigenschaften für die alten Ordnungen. #

<u>Satz 3</u>: Ist R ein Streckungsring über Σ und H sowie Σ' ein Monomideal in $\mathbb{N}^H$, so ist

$$R' = R/(x^a : a \in \Sigma')$$

ein Streckungsring über H und $\Sigma \cup \Sigma'$ bzgl. derselben Ordnung auf den Monomen genau dann, wenn in den Streckungsformeln von Nichtstandardmonomen x^a, $a \in \Sigma'$, nur Standardmonome aus Σ' vorkommen, d.h.,

$$a \in \Sigma' \Rightarrow Mo(a) \subseteq \Sigma'$$

gilt. Insbesondere ist diese Bedingung erfüllt, wenn Σ' ein Monomordnungsideal ist, d.h. noch

$$a \in \Sigma',\ b < a \Rightarrow b \in \Sigma' \text{ gilt.}$$

Beweis: Wegen $x^a = \sum_{\substack{b \in Mo(a) \\ b \notin \Sigma'}} r_b x^b$ in R' ist nur zu prüfen, daß die Standardmonome in R' eine k-Basis bilden. Da diese offensichtlich R' erzeugen, muß nur deren lineare Unabhängigkeit in R' gesichert werden. Wäre $\sum r_a x^a = 0$ in R' für $a \notin \Sigma \cup \Sigma'$ eine lineare Abhängigkeitsrelation, bedeutete dies

$$\sum r_a x^a = \sum s_b x^b \quad \text{in } R \text{ mit } b \in \Sigma'.$$

Zerlegen wir die rechte Seite nach den Streckungsformeln in Standardmonome in R, so erhalten wir wegen $Mo(b) \subseteq \Sigma'$

$$\sum r_a x^a = \sum t_c x^c \quad \text{in } R \text{ mit } c \in \Sigma' \text{ und } c \notin \Sigma.$$

Damit sind beide Seiten die triviale Linearkombination, da auf der rechten Seite Standardmonome $c \in \Sigma'$, auf der linken dagegen Standardmonome $a \notin \Sigma'$ stehen.

Gibt es umgekehrt ein $a \in \Sigma'$ mit $Mo(a) \not\subseteq \Sigma'$, so liefert

$$x^a = \sum r_b x^b = st(a) \text{ in } R$$

die lineare Abhängigkeitsrelation

$$\vartheta = \sum_{\substack{b\in Mo(a)\\ b\notin \Sigma'}} r_b x^b \quad \text{in } R'. \ \#$$

<u>Folgerung 1</u>: $R' = R/(x_v : v\notin H')$ für $H'\subseteq H$ ist ein Streckungsring über $\Sigma \cap \mathbb{N}^{H'}$ und H' bzgl. der induzierten Ordnung auf den Monomen genau dann, wenn

$$s(a)\nsubseteq H' \Rightarrow \forall\, b\in Mo(a): s(b)\nsubseteq H'$$

gilt. Die Streckungsformeln sind dabei $\bmod(x_v : v\notin H')$ zu reduzieren. Insbesondere induziert die Projektion

$$k[x_v : v\in H] \longrightarrow k[x_v : v\in H']$$

in diesem Fall eine Projektion $R \longrightarrow R'$.

Zum Beweis nehme man $\Sigma' = \langle e_h : h\in H-H'\rangle$. Analog gilt

<u>Folgerung 2</u>: Sei R wie oben und

$$R' = k[x_v : v\in H']/I \cap k[x_v : v\in H']$$

der Faktorring nach einem Eliminationsideal. R' ist ein Streckungering über $\Sigma \cap \mathbb{N}^{H'}$ und H' genau dann, wenn

$$a\in \Sigma \cap \mathbb{N}^{H'} \Rightarrow Mo(a)\subseteq \mathbb{N}^{H'}$$

gilt. Dann gilt

$$I\cap k[x_v : v\in H'] = (x^a - st(a) : a\in \Sigma \cap \mathbb{N}^{H'}).$$

Insbesondere induziert die Inklusion

$$k[x_v : v\in H'] \longrightarrow k[x_v : v\in H]$$

in diesem Fall eine Inklusion $R' \longrightarrow R$.

Schließlich wollen wir noch ein hinreichendes Kriterium der Übertragung der Streckungeringstruktur beim Ausfaktorisieren der Differenz zweier Variablen angeben.

<u>Satz 4</u>: Ist $R=S/I$ ein Streckungering über Σ, H und einem Körper k sowie für $v,w\in H$ $e_v < e_w$, dann ist $R' = R/(x_v - x_w)$ ein Streckungsring über $\Sigma + \langle e_w\rangle$, wenn

$$x_w \cdot x^a \equiv x_v \cdot x^a \pmod I$$

für alle Basiselemente von Σ der Form $e_w + a$ gilt.

Beweis: Man setze die Ordnung auf den Monomen zu einer linearen monotonen noetherschen Ordnung fort. Dann beschreiben die Basiselemente von Σ eine Gröbnerbasis von I und wir zeigen, daß die neue Relation $x_w - x_v$ keine zusätzlichen Gröbnerbasiselmmente in $I' = I + (x_w - x_v)$ erzeugt. Dazu müssen wir nur zeigen, daß sich alle Syzygien des Ideals $I_0' = (x^a : a\in \Sigma + \langle e_w\rangle)$ zu solchen von I' liften lassen. Nichthebbare Syzygien sind aber höchstens solche zwischen x_w und x^c, $c\in \Sigma$. Für $w\notin s(c)$ ist dies eine Hauptsyzygie und damit sicher hebbar. Sei deshalb $x^c = x_w x^a$ und $x_w x^a = \sum r_b x^b$ (mod I) die Streckungsformel. Dann ist das zugehörige S-Polynom $x_v x^a - \sum r_b x^b$ schon (mod I) auf Null reduzierbar, da $x_v x^a = x_w x^a$ (mod I) dieselbe Streckungsformel $\sum r_b x^b$ (mod I) haben. #

2.4. Einfache Eigenschaften

(1) Ist R ein graduierter Streckungsring über einem Körper k, so gilt

$$F(R,t) = F(R_\emptyset, t).$$

Daraus folgt insbesondere für R=B/I

$$\dim R = \dim R_\emptyset,$$
$$\mathrm{ht}\ I = \mathrm{ht}\ I_\emptyset,$$
$$e(I) = e(I_\emptyset).$$

(2) Ist $(H,<)$ eine Halbordnung und R ein $\mathbb{N}$-graduierter Streckungsring über $\Sigma = M(H)$ und einem Körper k, $w = (\deg x_v)$ der Gradvektor, so gilt

$$F(R,t) = F_w(H,t) = \sum \frac{t^{w(p_1)+\ldots+w(p_k)}}{(1-t^{w(p_1)})\ldots(1-t^{w(p_k)})}$$

wobei über alle echten Ketten $p_1 < \ldots < p_k$ in H zu summieren ist. Insbesondere gilt

$$\dim R = r(H) =: r$$

und $\quad e(R) = \sum (w(p_1)\ldots w(p_k))^{-1}$

wobei über alle echten Ketten der Länge r in h zu summieren ist, vgl. (1.3.).

(3) Gilt überdies unter obiger Voraussetzung $\deg x_v = 1$ für alle $v \in H$, so erhalten wir

$$F(R,t) = \sum c_k \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^k,$$
$$e(R) = c_{r(H)},$$

wobei c_k die Zahl der echten Ketten der Länge k in H angibt. Insbesondere stimmen Hilbertfunktion und Hilbertpolynom für alle n>0 überein.

(4) Gilt $H = J(Q)$, so ist $\dim R = |Q|+1$, für $H = J(Q) - \{\emptyset\}$ dagegen $\dim R = |Q|$. Zur Berechnung der Hilbertfunktion kann man das Ordnungspolynom $w(Q,n)$ entsprechend (1.3.) heranziehen. In beiden Fällen gilt $e(R) = \tilde{w}(Q,|Q|)$. Dies ist die Zahl aller möglichen linearen Fortsetzungen der Ordnung auf Q. In beiden Fällen stimmen Hilbertfunktion und Hilbertpolynom auch

für n=0 überein, da $\sum(-1)^k c_k=0$ gilt. Das ist Ph.Halls Theo-
rem, vgl. [1,4.32]. Dies folgt auch aus der Tatsache, daß der
simpliziale Komplex der Ketten aus H kontrahierbar ist, also
azyklisch, da in H ein Element mit allen anderen vergleichbar
ist. Damit verschwinden dessen reduzierte Homologiemoduln und
die Behauptung folgt aus der Beschreibung der lokalen Kohomo-
logiemoduln für Stanley-Reisner-Ringe, vgl. [29], und der loka-
len Dualität (1.4.5.).

2.5. Zur Auswahl der Ordnung

Im folgenden wollen wir einige Bemerkungen zum Einfluß der
Wahl der Ordnung auf den Monomen auf die Streckungsringstruk-
tur darlegen.

Die Streckungsringstruktur ändert sich nicht, wenn man
(1) Die Ordnung auf den Monomen durch eine monotone Fortsetzung
die Ordnung auf den Monomen durch eine monotone Fortsetzung
ersetzt, solange diese die Kettenbedingung erfüllt. Insbeson-
dere können wir nach (1.2.,Satz 2) o.B.d.A. annehmen, daß die
Ordnung < linear oder wenigstens abgeschlossen ist, wenn dies
notwendig sein sollte.

(2) Andererseits gibt es eine kleinste abgeschlossene Ord-
nung, die eine gegebene Streckungsringstruktur liefert. Sind

$$x^a-st(a) \quad \text{mit} \quad st(a)=\sum_{b\in Mo(a)} r_b x^b$$

die Streckungsformeln, dann muß stets $a-b>0$ für $b\in Mo(a)$ gel-
ten. Die kleinste abgeschlossene Ordnung σ mit dieser Eigen-
schaft wird durch den Kegel, vgl. (1.2.),

$$K(\sigma)=\langle a-b: a\in\Sigma,\ b\in Mo(a)\rangle$$

der bzgl. σ positiven Elemente in $\mathbb{Z}^H$ bestimmt. Dabei erzeugen
bereits die zu a aus einer Basis von Σ gehörenden Vektoren
$K(\sigma)$. $K(\sigma)_{\mathbb{R}}$ ist damit ein endlich erzeugter, also abge-
schlossener Kegel mit Spitze. Der zu ihm duale Kegel

$$K^*:=\{t\in\mathbb{R}^H: \langle t,K(\sigma)\rangle\geq 0\}$$

enthält also innere Punkte. $t\in int(K^*)$ definiert aber eine $\mathbb{R}$-
Graduierung auf $\mathbb{N}^H$, für welche

$$a>_\sigma b \Rightarrow deg_t x^a > deg_t x^b$$

gilt.

(3) Mehr noch ist wegen der Kettenbedingung für σ
$(\mathbb{Z}_{\leq 0})^H\cap K(\sigma)=(0)$, vgl. (1.2.,Folgerung 2). Da beides abge-

schlossene Kegel sind, gibt es eine sie trennende Hyperebene, d.h. $t \in \mathbb{Z}^H$ mit $\langle t, (\mathbb{Z}_{\leq 0})^H - (0) \rangle < 0$ und $\langle t, K(\sigma) - (0) \rangle > 0$. Die erste Bedingung bedeutet aber $t \in (\mathbb{N}_+)^H$. Es gibt also sogar eine $\mathbb{N}_+$-Graduierung auf $\mathbb{N}^H$, für welche

$$a >_\sigma b \Rightarrow \deg_t x^a > \deg_t x^a$$

gilt. Zur Untersuchung von Streckungsringen können wir also auch o.B.d.A. annehmen, daß $<$ eine zu einer $\mathbb{N}_+$-Graduierung zugehörige Ordnung ist.

(4) Sei $R=S/I$ ein Streckungsring und auf S eine $\mathbb{Z}$-Graduierung durch den Gradvektor $T=(\deg x_v) \in \mathbb{Z}^H$ gegeben. R heiße <u>affin homogen</u>, wenn $\deg_t x^a \geq \deg_t x^b$ für alle $b \in Mo(a)$ gilt. Gilt sogar stets die echte Relation, soll R <u>streng affin homogen</u> heißen. (3) kann man dann formulieren als

<u>Satz</u> :([7]) Jeder Streckungsring ist streng affin $\mathbb{N}_+$-graduierbar.

Teil 3 : Die Kategorie der Streckungsringe

In diesem Abschnitt wollen wir kategorielle Untersuchungen vornehmen und insbesondere die Techniken der homologischen Algebra auf Streckungsringe anwenden. Nach (1.2.) kann man jede monotone Halbordnung mit Kettenbedingung in eine ebensolche lineare Ordnung einbetten. Das legt nahe, mit einer solchen Ordnung gefilterte Ringe zu betrachten. Der wesentliche Unterschied zu $\mathbb{Z}$- bzw. $\mathbb{N}$-gefilterten Ringen, wie sie etwa in [8] untersucht werden, besteht darin, daß die Addition und die Nachfolgeroperation nicht mehr miteinander gekoppelt sind.

3.1. Gefilterte Ringe und Moduln

In diesem Abschnitt sei $<$ eine lineare monotone Ordnung mit Kettenbedingung auf $D=\mathbb{Z}^M$. Im folgenden betrachten wir gefilterte Ringe R und Moduln M mit Filtrierungen, die durch Elemente aus D indexiert sind. Dabei seien Filtrierungen stets als aufsteigend vorausgesetzt, d.h. $F_aM \subseteq F_bM$ für $a<b$. Außerdem fordern wir $1 \in F_0R$, $F_aR=0$ für $a \notin \mathbb{N}^M$ und $\bigcup_a F_aR=R$.

Die Filtrierung F_*M eines Moduls heißt

P. diskret, wenn $F_aM=0$ für alle $a<a_0$ (a_0 fixiert, von M abhängig),

separiert, wenn $\bigcap F_aM=0$ und

ausschöpfend, wenn $\bigcup F_aM=M$ gilt.

Insbesondere hat F_*R alle diese Eigenschaften. Die Kategorie der gefilterten R-Moduln besteht dann aus gefilter-

filt$_R$-mod der gefilterten R-Moduln besteht dann aus gefilter-

ten (d.h. $F_aR \cdot F_bM \subseteq F_{a+b}M$) R-Moduln als Objekten und Morphismen $f \in \hom_R(M,N)$ vom Filtergrad 0 (d.h. $f(F_aM) \subseteq F_aN$). Genau wie im klassischen Fall existiert ein Funktor

$$gr: filt_R\text{-}mod \longrightarrow gr(R)\text{-}mod$$

der gefilterten R-Moduln in die Kategorie der D-graduierten gr(R)-Moduln via

$$gr^a(M) := F_aM/F_{<a}M$$

wobei für $a \in D$ $F_{<a}M := \bigcup_{b<a} F_bM$ sei.

Sei $L_. : \ldots \longrightarrow L_n \xrightarrow{d} L_{n-1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} L_0 \longrightarrow 0$ ein Komplex gefilterter R-Moduln mit einem Differential vom

Filtergrad 0. Einen solchen Komplex nennen wir auch kurz <u>gefilterten Komplex</u>. $F_a L. \dashrightarrow L.$ ist dann eine Einbettung von Komplexen. Die zugehörige Abbildung der Homologien induziert eine Filtrierung von $H(L.)$ via

$$F_a H.(L.) := \mathrm{im}[H.(F_a L.) \dashrightarrow H.(L.)]$$

Dabei gilt

$$F_{<a} H.(L.) := \mathrm{im}[H.(F_{<a} L.) \dashrightarrow H.(L.)]$$

Sei nun ähnlich wie für klassische Spektralsequenzen

$$gr^a(L.) := F_a L./F_{<a} L.$$

$$E_n^a(L.) := H_n(F_a L./F_{<a} L.)$$

$$Z_n^a(L.) := \mathrm{im}[H_n(F_a L.) \dashrightarrow H_n(F_a L./F_{<a} L.)]$$

$$B_n^a(L.) := \mathrm{im}[H_{n+1}(L./F_a L.) \dashrightarrow H_n(F_a L./F_{<a} L.)]$$

Dann gilt

$$B_n^a(L.) \subseteq Z_n^a(L.) \subseteq E_n^a(L.)$$

und $\qquad Z_.^a(L.)/B_.^a(L.) = gr^a(H.(L.))$

$$(\cong \mathrm{im}[H.(F_a L.) \dashrightarrow H.(L./F_{<a} L.)])$$

Zum Beweis modifiziere man [11, Kap. 15] entsprechend. Dies liefert

<u>Satz 1</u>: $gr^a(H_n(L.))$ ist ein Subfaktor von $H_n(gr^a(L.))$. Dabei ist H_n diskret und ausschöpfend filtriert, wenn dies $F_* L.$ ist. Dann gilt

$$H_n(gr(L.)) = 0 \Rightarrow H_n(L.) = 0$$

Im folgenden wollen wir einige Ergebnisse von [52] über Z-gefilterte Ringe auf unsere Situation übertragen. Auf die entsprechenden Beweise wollen wir großteils verzichten, da dies nur minimale Modifikationen der Originalbeweise erfordert.

Ein Morphismus $f \in \hom_R(M,N)$ heißt <u>strikt</u>, wenn für alle $a \in D$ $f(F_a M) = F_a N \cap \mathrm{im}\, f$ gilt. $L \in \mathrm{filt}_R\text{-mod}$ heißt <u>filterfrei</u>, wenn L ein freier R-Modul ist mit einer Basis $\{x_i\}_{i\in I}$ und $p(i) \in D$, so daß $F_a L = \bigoplus_{b+p(i)=a} F_b R \cdot x_i$ gilt.

M heißt <u>filterendlich erzeugt</u>, wenn eine endliche Menge $\{x_i, p(i)\}$ mit $x_i \in M$, $p(i) \in D$ existiert, so daß

$$F_a M = \sum_{b=a+p(i)} x_i \cdot F_b R \quad \text{für } a \in D$$

gilt. M ist filterendlich erzeugt genau dann, wenn es einen strikten Epimorphismus eines endlich erzeugten filterfreien Moduls L auf M gibt. Wenn $F_* M$ separiert und ausschöpfend ist, so ist M genau dann filterendlich erzeugt, wenn gr(M) endlich erzeugt ist ([52, Lemma 14]). [52, Lemma 1] überträgt sich wortwörtlich, da der Beweis nur auf der Kettenbedingung beruht :

Satz 2: Sei

(1) $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$

eine Sequenz in $filt_R$-mod. Betrachten wir außerdem

(2) $gr(K) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow gr(N)$

Dann gilt

(a) (2) ist exakt, wenn (1) strikt exakt ist,

(b) Ist (2) exakt und M ausschöpfend filtriert, so ist g strikt,

(c) Ist (2) exakt und M diskret filtriert, so ist f strikt.

Daraus ergibt sich sofort wie in [52]

Satz 3: Sei $M \in filt_R$-mod ausschöpfend filtriert. Dann existiert eine Auflösung

(1) $\ldots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{f_2} L_1 \xrightarrow{f_1} L_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$

in der alle L_n filterfrei und alle f_n strikte Morphismen sind. Eine solche Auflösung heißt strikte filterfreie Auflösung von M. Ist M diskret filtriert, dann kann man das auch bei allen $F_g L_n$ erreichen. Ist gr(R) noethersch, $F_g M$ außerdem diskret und gr(M) endlich erzeugt, dann kann man alle L_n als endlich erzeugt voraussetzen.

In jedem Falle ist

(2) $\ldots \longrightarrow gr(L_2) \longrightarrow gr(L_1) \longrightarrow gr(L_0) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow 0$

eine freie Auflösung von gr(M) über gr(R).

Ist umgekehrt (1) ein Komplex in $filt_R$-mod und (2) exakt, dann ist (1) eine strikte filterfreie Auflösung von M, wenn alle $F_g L_n$ diskret sind.

Foxby definiert in [22] den Begriff der freien Auflösung eines nach oben begrenzten Komplexes. Satz 3 kann darauf folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz 3': Sei X. ein nach oben begrenzter Komplex ausschöpfend filtrierter R-Moduln mit strikten Randabbildungen. Dann existiert ein strikter filterfreier Komplex L. und ein Komplexmorphismus L. ---> X. , der einen Isomorphismus in den Homologien (als gefilterte R-Moduln) erzeugt. Sind alle $H_n(X.)$ diskret filtriert, dann kann man dies auch bei allen L_n erreichen. Ist gr(R) noethersch, alle $F_g H_n(X.)$ außerdem separiert und alle $gr(H_n(X.))$ endlich erzeugt, dann kann man alle L_n als endlich erzeugt voraussetzen. In jedem Falle ist $gr(L.) \longrightarrow gr(X.)$ ein <u>Quasiisomorpismus</u>, d.h. erzeugt einen Isomorphismus der Homologien.

Wegen der zentralen Rolle, die Satz 3 und 3' im weiteren spielen, sei eine kurze Beweisskizze von Satz 3' gegeben:

Seien $Z.$, $B.$, $C.$ und $H.$ entsprechend die Zyklen, Ränder, Koränder und Homologien von $X.$ mit ihren natürlichen (ausschöpfenden) Filtrierungen

$$F_aZ_n := F_aX_n \cap Z_n,$$

$$F_aB_n := d(F_aX_{n+1}) = F_aX_n \cap B_n \text{ (da } d \text{ strikt ist)},$$

$$F_aC_n := F_aX_n + B_n/B_n,$$

$$F_aH_n := F_aZ_n + B_n/B_n = F_aC_n \cap H_n.$$

Betrachten wir nun wie in [22] die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d, "="] & D_m \arrow[r, "e_m"] \arrow[d, "h_m"] & K_m \arrow[r] \arrow[d, "k_{m-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_m \arrow[r, "c_m"] & C_m \arrow[r, "d_m"] & B_{m-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "k_m"] & L_m \arrow[r, "l_m"] \arrow[d, "a_m"] & D_m \arrow[r] \arrow[d, "h_m"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_m \arrow[r] & X_m \arrow[r, "b_m"] & C_m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

in denen die unteren Zeilen jeweils strikt exakt sind. Aus ihnen sind K_m, D_m, L_m rekursiv mit wachsendem m zu konstruieren: $K_m := 0$ für $m \ll 0$ und $D_m := \{(x,y) \in C_m \oplus K_m : d(x) = k(y)\}$ als die Fasersumme obigen Diagramms mit der von der Summe induzierten Filtrierung $F_aD_m := (F_aC_m \oplus F_sK_m) \cap D_m$. f_m ist dann die eindeutig bestimmte Ergänzung $f_m(x) := (c_m(x), 0)$. h_m, e_m und f_m sind strikt, letzteres wegen

$$(c_m(x), 0) \in F_aD \iff c_m(x) \in F_aC \cap \text{im } c_m = c_m(F_aH).$$

Man nehme nun $L_m \xrightarrow{l_m} D_m \longrightarrow 0$ als strikte filterfreie Auflösung von D_m und a_m als Liftung von h_m in $filt_R$-Mod, die Striktheit von b_m ausnutzend. Der so konstruierte Komplexmorphismus $a.: L. \longrightarrow X.$ ist ein Quasiisomorphismus in der gefilterten Kategorie, weil die Diagramme nach Anwendung von F_a exakt und kommutativ bleiben, da die Zeilen strikt exakt sind.

Die Aussage über diskrete Filtrierungen ergibt sich daraus, daß in einer kurzen strikt exakten Sequenz die beiden äußeren Moduln genau dann diskret filtriert sind, wenn dies der mittlere Modul ist. Damit kann o.B.d.A H_m, K_m, D_m und L_m als diskret filtriert angenommen werden. Die Endlichkeitsaussage ergibt sich, wenn man beachtet, daß filterendlich erzeugte Moduln in unserem Fall diskret filtriert sind, man rekursiv neben $gr(H_m)$ auch $gr(K_m)$ und $gr(D_m)$ als endlich erzeugt voraussetzen kann und damit L_m filterendlich erzeugen kann. #

Bemerkung : Der konstruierte Komplexmorphismus muß im allgemeinen nicht strikt sein. Diese Zusatzeigenschaft kann man durch Erhöhen der Erzeugendenzahl von L_m erreichen. Allerdings ist dann L_m selbst bei filterendlich erzeugten Homologien nicht unbedingt endlich erzeugt, da in der Kategorie $filt_R$-Mod mit <u>strikten</u> Morphismen nicht jeder freie Modul projektiv ist.

Für $M,N \in filt_R$-mod kann man deren Tensorprodukt mit der Filtrierung versehen, für die $F_a(M \otimes_R N)$ der Unter-$\mathbb{Z}$-Modul ist, der von den Elementen der Form $m \otimes n$ mit $m \in F_b M$, $n \in F_c N$, $b+c \leq a$ aufgespannt wird. Dies definiert einen Funktor

$$\otimes : filt_R\text{-mod} \times filt_R\text{-mod} \dashrightarrow filt_R\text{-mod}$$

Genau wie in [52] erhalten wir den natürlichen Epimorphismus

$$\varkappa(M,N): gr(M) \otimes_{gr(R)} gr(N) \dashrightarrow gr(M \otimes_R N)$$

([52], Lemma 3), der für filterfreies M oder N ein Isomorphismus ist ([52], Lemma 10). Tensoriert man eine strikte filterfreie Auflösung von M mit N und wendet auf diesen Komplex Satz 1 an, erhält man

<u>Satz 4</u>(vgl. [52, Lemma 11]): $gr(Tor_n^R(M,N))$ ist ein Subfaktor von $Tor_n^{gr(R)}(gr(M),gr(N))$. Sind F_*M und F_*N diskret und ausschöpfend, dann auch $F_*Tor_n(M,N)$.

Analog kann man $Hom_R(M,N)$ mit der Filtrierung

$$F_a Hom_R(M,N) = \{f \in Hom(M,N) : f(F_b M) \subseteq F_{a+b} N \text{ für alle } b\}$$

versehen. Genau wie im Fall des Tensorprodukts hat man dann einen Monomorphismus

$$\varphi(M,N): gr\ Hom_R(M,N) \dashrightarrow Hom_{gr(R)}(gr(M),gr(N)),$$

der für filterfreies M ein Isomorphismus ist ([52, Lemma 16]).

Lemma ([52, Lemma 13 und 15]): Sei M filterendlich erzeugt und ausschöpfend filtriert.

(1) Ist F_*N diskret, dann auch $F_*\mathrm{Hom}(M,N)$.

(2) Ist F_*N ausschöpfend, dann auch $F_*\mathrm{Hom}(M,N)$.

Beweisen wir z.B. (1). Es sei $\{x_i\}$ ein Erzeugendensystem von M und $p \geq \mathrm{ord}(x_i)$ für alle i. Dann gilt $x_i \in F_pM$ für alle i. Sei $F_qN=0$ für alle $q \leq q_0$. Dann gilt für $f \in F_r\mathrm{Hom}(M,N)$ mit $r \leq q_0-p$ $f(x_i) \in F_{p+r}N \subseteq F_{q0}N=0$, also $f=0$. #

Damit kann man auch für den Hom-Funktor ein Ergebnis wie Satz 4 beweisen :

Satz 5: Seien M und N ausschöpfend filtriert. Dann ist $gr(\mathrm{Ext}_R^n(M,N))$ ein Subfaktor von $\mathrm{Ext}_{gr(R)}^n(gr(M),gr(N))$. Sind überdies M und N diskret filtriert, M filterendlich erzeugt sowie gr(R) noethersch, dann ist $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ ebenfalls ausschöpfend und diskret filtriert.

Beweis : Man nehme eine strikte filterfrei Auflösung von M und wende $\mathrm{Hom}_R(\#,N)$ an. Dann folgt das Ergebnis aus Satz 1. Für die Zusatzinformation nehme man eine strikte Auflösung aus endlich erzeugten filterfreien Moduln. #

Es sei bemerkt, daß für einen filterfreien Modul $L=\oplus R[a_i]$ $\mathrm{Hom}(L,N) \dashrightarrow \prod N[-a_i]$ ein Isomorphismus in $filt_R$-mod ist, für filterendlich erzeugte freie Moduln L also insbesondere Hom(L,R) wieder filterfrei ist.

Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. $N_I:=\mathrm{Hom}_R(I,R/I)$ bezeichnet man dann als den <u>Normalenmodul</u> von I. Sei I mit der von R induzierten Filtrierung versehen. Dann hat auch N_I eine natürliche Filtrierung, die diskret und ausschöpfend ist wie die von I.

Korollar: Unter obigen Voraussetzungen ist $gr(N_I)$ ein Subfaktor von $N_{gr(I)}$.

Ist überdies R ein graduierter Ring und $M \in filt_R$-mod ein homogener R-Modul, so heißt dessen Filtrierung <u>verträglich mit der Graduierung</u>, wenn $F_aM = \oplus F_aM_i$ gilt, wobei $F_aM_i:=F_aM \cap M_i$ die auf der i-ten graduierten Komponente von M induzierte Filtrierung sei. Diese Graduierung induziert dann eine solche auf gr(M). Sei insbesondere R verträglich filtriert.

Satz 6: Sei $M \in \mathrm{filt}_R$-mod ein homogener R-Modul, dessen Filtrierung mit seiner Graduierung verträglich ist. Dann kann man in Satz 3 erreichen, daß die L_n zusätzlich verträglich filtriert und die Morphismen f_n vom Grad 0 sind.

Beweis : $F_a M$ hat dann homogene Erzeugende m_{ia} über $F_0 R$. Sei $L := \bigoplus R \cdot x_{ia}$ ein freier R-Modul mit den Erzeugenden x_{ia}, $\mathrm{ord}(x_{ia}) = a$, $\deg(x_{ia}) = \deg(m_{ia}) = i$, filtriert via $F_b L_j := \bigoplus F_{b-a} R_{j-i} \cdot x_{ia}$. Dann ist die natürliche Surjektion $L \dashrightarrow M$, die durch $x_{ia} \dashrightarrow m_{ia}$ induziert wird, ein strikter homogener Morphismus des verträglich filtrierten filterfreien Moduls L auf M vom Grad 0. Falls gr(R) und gr(M) noethersch sind, nehme man homogene Erzeugende m_i' von gr(M) und den endlich erzeugten filterfreien Modul

$L := \bigoplus R \cdot x_i$ mit $\mathrm{ord}(x_i) = a_i$, $\deg(x_i) = \deg(m_i')$

Man lifte nun m_i' homogen zu $m_i \in F_{ai} M$. $L \dashrightarrow M$ via $x_i \dashrightarrow m_i$ ist dann nach Satz 2 (c) ein homogener strikter Epimorphismus vom Grad 0. #

Da sich die Verträglichkeit der Filtrierung eines homogenen Komplexes L. auf die Homologien überträgt, sind auch die Filtrierungen $F_* \mathrm{Tor}(M,N)$ und $F_* \mathrm{Ext}(M,N)$ für homogene verträglich filtrierte Moduln mit der Graduierung verträglich. Es gelten also für verträglich filtrierte homogene Ringe R Analoga der Sätze 4 und 5 auch für die entsprechenden homogenen Komponenten.

3.2. Homologien von Streckungsringen

Sei $R = S/I$ ein Streckungering über H, Σ und dem Körper k und $<$ eine Fortsetzung der entsprechenden Ordnung auf den Monomen zu einer monotonen linearen Ordnung mit Kettenbedingung. Ist R ein graduierter Streckungsring, so schränke man die gegebene Ordnung zuerst auf Monome gleichen Grades ein und setze sie dann zu einer mit der Graduierung verträglichen linearen, monotonen, noetherschen Ordnung fort.

Eine solche lineare Ordnung kann man auf eindeutige Weise auf $D := \mathbb{Z}^H = \mathbb{N}^H - \mathbb{N}^H$ fortsetzen, indem man fordert

$a-b < c-d :\Leftrightarrow a+d < b+c$ für $a,b,c,d \in \mathbb{N}^H$.

Diese Definition ist repräsentantenunabhängig, da in einer linearen Ordnung die Kürzungsregel gilt.

Sei F_aR der von allen x^b, $b \leq a$, aufgespannte k-Unterraum von R. Dies definiert eine Filtrierung wie in Kap.3, so daß wir die Kategorie $filt_R$-mod der D-gefilterten R-Moduln betrachten können. Nach Konstruktion ist gr(R) gerade der zu R assoziierte diskrete Streckungsring. Im Gegensatz zu Filtrierungen durch Idealsequenzen gibt es allerdings für einen R-Modul keine kanonische Filtrierung.

Die Ergebnisse des vorigen Kapitels, angewandt auf verschiedene homologische Größen, ergeben folgendes Resultat:

Satz 1: Seien $M, N \in filt_R$-mod diskret und ausschöpfend filtriert. Dann gilt

1) $fd_R M \leq fd_{gr(R)} gr(M)$, 2) $fd^k_R M \leq fd^k_{gr(R)} gr(M)$,

3) $id^k_R M \leq id^k_{gr(R)} gr(M)$. 4) $depth_R M \geq depth_{gr(R)} gr(M)$.

Ist außerdem M filterendlich erzeugt (d.h. gr(M) endlich erzeugt), gilt

5) $G_R(M,N) \geq G_{gr(R)}(gr(M),gr(N))$,

6) $grade_R M \geq grade_{gr(R)} gr(M)$.

Insbesondere

7) Ist gr(M) perfekt, so auch M (derselben projektiven Dimension).

Weiter gilt

8) gldim R $\leq$ gldim gr(R),

9) $P_R(t) \leq P_{gr(R)}(t)$ (koeffizientenweise)

Ist überdies R ein graduierter Streckungsring und M ein endlich erzeugter homogener verträglich filtrierter R-Modul, gilt für die Hilbertreihen

10) $F(M,t) = F(gr(M),t)$,

also insbesondere

11) dim gr(M)=dim M,

e(gr(M)) = e(M)

und somit

12) gr(M) ist Cohen-Macaulay => M ist Cohen-Macaulay.

10) ergibt sich daraus, daß $l(M_i) < \infty$, also $F_aM_i/F_{<a}M_i$ nur für endlich viele a nicht verschwindet. Folglich ist $F_{<a}M_i = F_bM_i$ für ein geeignetes b und damit $l(M_i) = l(gr(M_i))$, da M diskret und ausschöpfend filtriert ist.

Das Ergebnis über Poincarereihen werden wir weiter unten dahingehend konkretisieren, daß man eine minimale Auflösung von k über gr(R) stets zu einer Auflösung von k über R liften kann, vgl. (5.3.).

Bezüglich derselben Ordnung kann man auch filt_S-mod betrachten. Insbesondere ist $R \in \mathrm{filt}_S$-mod diskret und ausschöpfend filtriert. Beachtet man noch S=gr(S), erhält man

<u>Satz 2:</u> $\mathrm{Tor}_m^S(R,k)$ ist ein Subfaktor von $\mathrm{Tor}_m^S(gr(R),k)$, d.h. für die Bettizahlen gilt $b_m(R) \leq b_m(gr(R))$ (vgl. [6,Ch.6]).

Weiter unten werden wir sehen, daß man sogar eine minimale Auflösung von gr(R) über S zu einer solchen von R liften kann, vgl. auch [41].

<u>Korollar:</u> Sei R ein homogener Streckungsring. Ist gr(R) Cohen-Macaulay, dann auch R und es gilt

$$\mathrm{typ}(R) \leq \mathrm{typ}(gr(R)).$$

Ist insbesondere gr(R) Gorenstein, dann auch R.

Versehen wir I mit der induzierten Filtrierung, so ist

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow S \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

eine strikt exakte Sequenz, also

$$0 \longrightarrow gr(I) \longrightarrow S \longrightarrow gr(R) \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt. Da $gr(R)=R_0$ gilt, bedeutet dies, daß gr(I) isomorph zum Ideal I_0 der Leitmonome der Elemente aus I ist. Korollar 1 zu (3.1., Satz 5) liefert dann

<u>Satz 3:</u> $gr(N_I)$ ist ein Subfaktor des Normalenmoduls von I_0. Ist R ein graduierter Streckungsring, so gilt dies auch für die entsprechenden homogenen Komponenten.

<u>Korollar</u> ([32,4.8.1]) : Ist R=S/I ein homogener Streckungsring und hat $R_0=S/I_0$ nur tangentialflache Deformationen, dann hat R=S/I ebenfalls nur tangentialflache Deformationen.

Dies folgt aus dem Kriterium (2.5.) in [32] über die tangentiale Flachheit, wohin wir den Leser auch für eine Definition dieses Begriffs verweisen. Danach hat für ein homogenes Ideal I R=S/I nur tangentialflache Deformationen genau dann, wenn der Normalenmodul N_I keine Bestandteile vom Grad kleiner -1 besitzt.

Sei nun M ein filterendlich erzeugter S-Modul. Dann gilt

Satz 4: K^i_M besitzt nach (3.1.) eine natürliche Filtrierung als S-Modul. Bezüglich dieser ist $gr(K^i_M)$ ein Subfaktor von $K^i_{gr(M)}$. Insbesondere gilt dies für den kanonischen Modul. Die Filtrierung von K^i_M ist ausschöpfend und diskret, wenn es die von M ist.

Korollar 1: Ist gr(R) ein verallgemeinerter Cohen-Macaulay-Ring, so auch R. Ist gr(R) ein verallgemeinerter Cohen-Macaulay-Ring und R ein quadratfreier graduierter Streckungsring, so ist R ein Buchsbaumring.

Letzteres folgt aus der Charakterisierung von Stanley-Reisner-Ringen, die verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Ringe sind. Dann ist nämlich $K^i_{gr(R)}$ ($i<\dim R$) im Grad 0 konzentriert. Dies gilt damit auch für K^i_R und das Ergebnis folgt aus dem Kriterium [S1,4.3.1.]. Die Beschreibung der Castelnuovoregularität in (1.5.) liefert

Korollar 2: Für die Castelnuovoregularität eines graduierten Streckungsrings gilt $reg(gr(R)) \geq reg(R)$. Ist gr(R) CM, so gilt sogar Gleichheit.

Flenners Rationalitätskriterium [21] erlaubt es, an dieser Stelle auch ein handhabbares Rationalitätskriterium für Streckungsringe zu beweisen:

Satz 5: Sei R ein graduierter Streckungsring über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0, der von Elementen vom Grad 1 als k-Algebra erzeugt wird. Habe Spec R-{m} nur rationale Singularitäten und sei R CM (etwa wenn gr(R) schon CM ist). Dann hat Spec R auch in der Spitze eine rationale Singularität genau dann, wenn $H(n,gr(R)) = h(n,gr(R))$ für alle $n \geq 0$ gilt. Ist insbesondere X=Proj R ein abgeschlossenes projektives Schema mit höchstens rationalen Singularitäten, so hat X'=Spec R, der affine Kegel über X, in der Spitze eine rationale Singularität genau dann, wenn $H(n,gr(R))=h(n,gr(R))$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Für die Definition einer rationalen Singularität sei etwa auf [21] verwiesen. Nach dem dortigen Kriterium muß man im gegebenen Fall nur nachweisen, daß K_R keine Komponenten in nichtpositiven Graden hat. Nach der lokalen Dualität kann man dies für Cohen-Macaulay-Ringe am Zusammenfallen von Hilbertfunktion und Hilbertpolynom für $n \gg 0$ ablesen. Diese sind aber für einen Streckungsring und seinen assoziierten diskreten Streckungsring dieselben. Der zweite Teil des Korollars ergibt sich daraus, daß Spec R_f für Formen $f \in R_1$ vom Grad 1 eine Überdeckung von Spec $R-\{\mathfrak{m}\}$ bilden und nur rationale Singularitäten besitzen, da wegen $R_f = (R_f)_0[t,t^{-1}]$ Spec R_f eine Etalüberlagerung von Spec$(R_f)_0 \subseteq$ Proj R ist. #

Genauso erhalten wir eine leichte Verallgemeinerung des Rationalitätskriteriums von Buchweitz [14, Vorwort]:

<u>Korollar 3</u>: Sei R wie oben, aber außerdem ein quadratfreier Streckungsring über dem Monoid $\Sigma = \Sigma(\Delta)$ mit dem entsprechenden simplizialen Komplex Δ (vgl. [29]). Ist $\tilde{H}_N(\Delta) = 0$ ($N = \dim \Delta$), dann hat auch Spec R nur rationale Singularitäten.

Dies folgt aus der Charakterisierung von $K_{gr(R)}$ in diesem Fall in [29]. #

Auf der Basis von [51,3.2.1] kann man auch ein Übertragbarkeitskriterium für die Serrebedingung (S_n) angeben:

<u>Satz 4</u>: Sei R ein graduierter Streckungsring und M ein homogener R-Modul, für den $gr(M)$ endlich erzeugt und äquidimensional ist. Dann gilt

$$gr(M) \text{ erfüllt } H\text{-}(S_n) \Leftrightarrow gr(M) \text{ erfüllt } (S_n) \Rightarrow M \text{ erfüllt } (S_n).$$

Die Äquivalenz ist (1.5.), die Implikation folgt aus Schenzels Kriterium, da im graduierten Fall auch K^i_M graduiert ist und somit $\dim K^i_M = \dim gr(K^i_M) \leq \dim K^i_{gr(M)}$ gilt. #

3.3. Die G-Dimension von Streckungsringen

Sei $M^* := \mathrm{Hom}_R(M,R)$. Nach [4] hat ein endlich erzeugter Modul M die G-Dimension

$$G\text{-}\dim M = 0 :\Leftrightarrow M \longrightarrow M^{**} \text{ ist ein Isomorphismus und } \mathrm{Ext}^i_R(M,R) = \mathrm{Ext}^i_R(M^*,R) = 0 \text{ für alle } i>0.$$

Als <u>G-Dimension</u> eines Moduls M bezeichnet man dann die minimale Länge einer Auflösung von M durch Moduln mit $G\text{-}\dim = 0$.

Betrachten wir nun

$$W_R := \{ M \in R^{fg}\text{-Mod} : M \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M,R),R) \text{ ist ein Quasiisomorphismus} \}.$$

<u>Satz 1</u>: 1) Ist $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ exakt und gehören zwei der Moduln M_i zu W_R, dann auch der dritte.

2) $G\text{-dim } M < \infty \Rightarrow M \in W_R$.

3) $M \in W_R \Rightarrow G\text{-dim } M = \sup \{ i : \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \neq 0 \} =: s(M)$.

Beweis: 1) folgt unmittelbar aus dem Vergleich der entsprechenden langen Homologiesequenzen. Ist $G\text{-dim } M = 0$, dann entartet die zu $\mathcal{H}om(\mathcal{H}om(M,R),R)$ gehörende Spektralsequenz und es folgt $M \in W_R$. Nun folgt 2) aus 1). Betrachten wir 3). Ist $s(M)=0$, so entartet die Spektralsequenz wieder und man bekommt daraus $G\text{-dim } M = 0$. Für $s(M)=n$ nehme man eine projektive Auflösung von M und schneide sie an der n-ten Stelle ab. Für den entsprechenden Syzygienmodul K gilt dann $s(K)=0$ und wie eben gezeigt $G\text{-dim } K = 0$, also insgesamt $G\text{-dim } M \leq n$. $G\text{-dim } M \geq s(M)$ gilt dagegen generell. In der Tat, eine minimale G-Auflösung

$$\ldots \longrightarrow G_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

kann man wegen $s(G_i)=0$ zur Berechnung von $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)$ heranziehen. #

<u>Satz 2</u>: Sei für einen Streckungsring R $M \in \mathrm{filt}_R\text{-Mod}$ filterendlich erzeugt und diskret und ausschöpfend filtriert. Dann gilt $G\text{-dim } gr(M) \geq G\text{-dim } M$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $G\text{-dim } gr(M) < \infty$. Dann gilt $gr(M) \in W_{gr(R)}$. Sei $L. \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine filterendliche strikte filterfreie Auflösung von M. " bezeichne die Anwendung von $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\#,R),R)$ bzw. $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\#,gr(R)),gr(R))$. Nach Definition von $W_{gr(R)}$ ist dann $gr\, L." = (gr\, L.)"$ ebenfalls eine Auflösung von $gr(M)$. Da $L."$ überdies diskret und ausschöpfend filtriert ist (3.1., Satz 5), ist nach (3.1., Satz 3) $L."$ eine strikt exakte Auflösung von $N := H_0(L.")$ und es gilt $gr(M) \cong gr(N)$. Nach (3.1., Satz 2) bedeutet dies aber auch $M \cong N$ sowie $M \in W_R$. $s(M) \leq s(gr(M))$ folgt aus (3.1., Satz 5). #

Teil 4 : Diskrete Streckungsringe

Ein diskreter Streckungsring ist nach Definition ein Faktorring eines Polynomrings nach einem Potenzproduktideal. Insbesondere fallen darunter Faktoren nach quadratfreien Potenzproduktidealen, die Stanley-Reisner-Ringe. Diese sind relativ gut untersucht und wir werden an gegebener Stelle auf entsprechende Ergebnisse zurückgreifen, ohne sie hier noch einmal zu entwickeln. Wir werden dem hier nur einige Bemerkungen zur Auflösung diskreter Streckungsringe anfügen.

Die Resolvente eines diskreten Streckungsringes

Sei $\mathfrak{m} = (M_1,\dots,M_m)$ ein Monomideal in S, Ind_k die Menge aller k-Tupel aus [m] und $\mathrm{Ind} := \bigcup \mathrm{Ind}_k$. Definiere

$$M(I) := \mathrm{kgV}(M_i : i \in I).$$

Sei $G=(\mathrm{Ind},E)$ ein Graph, der Reduktionsgraph, mit der Eckenmenge Ind und den Kanten

$$(I,J) \in E :\Longleftrightarrow |J|-|I|=1 \text{ und } M(I)=M(J).$$

Sei weiter

$$e(I,J) := \begin{cases} (-1)^{a(i,I)} & \text{,wenn } J=I\cup\{i\} \quad (i \notin J) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$0 \longrightarrow S^{\mathrm{Ind}_m} \xrightarrow{d} \dots \longrightarrow S^{\mathrm{Ind}_0} = S \longrightarrow S/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

mit

$$d_{k+1}(e_J) := \sum_{I \in \mathrm{Ind}_k} e(I,J)\,\frac{M(J)}{M(I)}\cdot e_I$$

eine Resolvente von $S/\mathfrak{m}$, vgl. [58]. Diese Auflösung ist im allgemeinen nicht minimal. Es existieren verschiedene Strategien, diese Auflösung zu minimieren. Alle beruhen auf folgendem elementaren Reduktionsschritt:

1) Wähle $(I,J) \in E$ mit $e(I,J) \neq 0$ (bzw. $=\pm 1$ im Fall $k=\mathbb{Z}$).
2) Ersetze $e(X,Y)$ durch $e(X,Y)-e(I,Y)e(X,J)/e(I,J)$ für alle (X,Y).
3) Entferne I und J aus G zusammen mit allen zugehörigen Kanten und Marken.

Bemerkungen : a) In jedem Reduktionsschritt ist $e(X,Y) \neq 0$ außer wenn $M(X) | M(Y)$.

b) $e(K,L)$ für $(K,L) \in E$ wird beim durch (I,J) bestimmten Reduktionsschritt nur dann wirklich geändert, wenn $M(I)=M(J)=M(K)=M(L)$ gilt.

Gute Reduktionsstrategien reduzieren simultan eine ganze Anzahl von Kanten, vgl. [41] oder [44]. Insbesondere vereinfacht sich die Reduktion dann, wenn keine Substitutionen auftreten. In diesem Fall ist die reduzierte Auflösung eine Subresolvente der Taylorschen. Im folgenden werden zwei Methoden beschrieben, solche Auflösungen zu konstruieren.

<u>Lemma 1</u>: Sei $M \subseteq Ind$ eine bzgl. Inklusion abgeschlossene Menge, d.h. $I \subseteq J$, $J \in M \Rightarrow I \in M$, $M_k := M \cap Ind_k$ und

$$0 \longrightarrow S^{M_m} \longrightarrow \ldots \longrightarrow S^{M_0} = S \longrightarrow S/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

eine Subresolvente der Taylorauflösung. Wähle $A \in M$, $i \notin A$ mit $M(A)=M(A \cup \{i\})$, so daß die Bedingung

(1) $I \in M$, $i \notin I \supseteq A \Rightarrow I \cup \{i\} \in M$

erfüllt ist. Dann definiert

$$N := \{I \in M : I \not\supseteq A\}$$

ebenfalls eine Subresolvente der Taylorauflösung.

Beweis: Für alle $I \in M$, die der Bedingung (1) genügen, gilt $(I, I \cup \{i\}) \in E$. Führen wir die entsprechenden Reduktionen nacheinander aus, beginnend mit Indextupeln der größten Kardinalität. $e(I,Y) \neq 0$ gilt nur für $Y \supset I \supseteq A$. Solche Indextupel sind schon entfernt worden. Folglich braucht nicht substituiert zu werden. #

Als unmittelbare Konsequenz des Lemmas erhalten wir die Subresolventen M, N und L aus [44]. Wir wollen dieses Ergebnis für die Resolvente N, die auf eine Bemerkung von Lyubeznik zurückgeht, explizit formulieren:

<u>Korollar 1</u>: Wähle $(A_1,i_1),\ldots,(A_n,i_n)$ mit $A_k \in Ind$,

(2) $M(A_k)=M(A_k \cup \{i_k\})$ und $i_k \notin \bigcup_{l<k} A_l$.

Dann definiert

$$N := \{I \in Ind : I \not\supseteq A_k \text{ für alle } k\}$$

eine Subresolvente der Taylorauflösung.

Nun wollen wir noch eine Subresolvente beschreiben, die eine Iteration nach den Erzeugenden des Monomideals ausnutzt. Sei dazu $g(I)$ der größte in $I \in Ind$ auftretende Index.

Lemma 2: Wähle für jedes $t=1,\dots,m$ eine (möglicherweise leere) Menge $(A_1(t),i_1(t)),\dots,(A_{n(t)}(t),i_{n(t)}(t))$ mit $g(A_k(t))=t$, $i_k(t)<t$ für alle k, die der Bedingung (2) genügt. Dann definiert

$$N := \{I \in \mathrm{Ind}: I \not\supseteq A_k(g(I)) \text{ für alle } k\}$$

eine Subresolvente der Taylorauflösung, sofern N bzgl. Inklusion abgeschlossen ist.

Den Beweis fuhren wir wie in Lemma 1 mit Induktion. Seien deshalb alle $I \supseteq A_l(u)$ mit $g(I)=u$, $u<t$, l beliebig und $u=t$, $l<k$ bereits entfernt und dabei die $e(X,Y)$ nur für solche Paare geändert worden, für die $Y \supseteq A_m(g(Y))$ mit geeignetem m gilt. Dann existiert eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Indextupeln $I \supseteq A_k(t)$, $g(I)=t$, die noch nicht entfernt wurden und für welche $i_k(t) \notin I$ gilt und den Tupeln $I \cup \{i_k(t)\}$. Entfernen wir diese wieder, beginnend mit den Tupeln größter Kardinalität. Substitution tritt dann höchstens für solche Paare (X,Y) auf, für die $e(I,Y) \neq 0$ gilt. Das ist aber nur möglich, wenn $Y=I \cup \{w\}$ oder $Y \supseteq A_m(g(Y))$ für geeignetes m gilt. Im ersten Fall gilt $Y \supset I \supseteq A_k(t)$. Da N als abgeschlossen bzgl. Inklusion vorausgesetzt wurde, folgt $Y \notin N$, also ebenfalls $Y \supseteq A_m(g(Y))$ für ein geeignetes m.
Hat man schließlich alle Tupel $I \notin N$ entfernt, wurden auch alle Paare (X,Y), wo möglicherweise Substitutionen aufgetreten sein könnten, wieder eliminiert. #

Wenn N nicht abgeschlossen bzgl. Inklusionen ist, kann man noch einiges retten, wenn man die Reduktionen verfolgt, wie wir im Beispiel 1 unten sehen werden. Eine minimale Auflösung eines Potenzproduktideals kann man nun wie folgt konstruieren:

1) Konstruktion eine Subresolvente der Taylorauflösung, die der minimalen nahekommt. Dabei kann man oft spezielle Eigenschaften der Erzeugenden des Ideals anwenden, etwa Lemma 2, wenn die Erzeugenden rekursiv gegeben sind.

2) Weitere Reduktion dieser Subresolventen unter Benutzung geeigneter Reduktionsstrategien oder weitere schrittweise Reduktion durch elementare Reduktionsschritte.

Beispiel 1: $\mathfrak{a}=(x,y,z)^d \subsetneq k[x,y,z]$

Stellen wir die Erzeugenden $x^a y^b z^{d-a-b}$ als Punkte $(x,y) \in Z^2$ dar und betrachten zuerst die Erzeugenden $x^a y^b$ $(a+b=d)$ und wenden Lemma 2 an. Zu fixiertem a braucht man wegen

$M((a,d-a),(b,d-b))=M((a,d-a),(b,d-b),(a-1,d-a+1))$ für $b<a-1$ nur e_I mit $I=((a,d-a),(a+1,d-a-1))$, $a=0,\dots,d-1$, zu berücksichtigen. Weiter verfahren wir rekursiv und fügen ein neues Erzeugendes $A=(a,b)$ zu den bisher gewählten Erzeugenden hinzu, so daß die entstehende Fläche in $\mathbb{Z}^2$ ein schiefes Ferrersdiagramm wird. Nach Lemma 2 sind alle e_I mit $g(I)=(a,b)=:A$ zu entfernen außer $(B,A)=((a+1,b),(a,b))$, $(C,A)=((a,b+1),(a,b))$ und $J=(B,C,A)=((a+1,b),(a,b+1),(a,b))$, wobei B, C und D die Nachbarn von A in Richtung wachsender Koordinaten wie in Bild 3 sind. Diese Menge ist nicht abgeschlossen bzgl. Inklusion und wir müssen nach dem Bild von e_J fragen. Wenn etwa C eher als B zum Diagramm hinzugefügt wurde, wurde $e_{(BC)}$ unter Verwendung von $M(BC)=M(BCD)$ substituiert. Also beschreibt

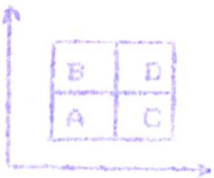


Bild 3

$$d(e_{(ABC)}) = e_{(AB)} + e_{(BD)} - e_{(CD)} - e_{(AC)}$$

und $d(e_{(AB)}) = e_{(B)} - e_{(A)}$

die minimale Auflösung von $\mathfrak{m}$ vollständig.

Beispiel 2: $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ mit

$$m_1=wz,\ m_2=w^2y,\ m_3=xz^2,\ m_4=x^2z.$$

Der Reduktionsgraph:

```
        (23)      (24)
         /         /
     (123)     (124)      (234)
                            /
                        (1234)
```

Reduktion nach Lemma 1:

k	A_k	i_k
1	(23)	1
2	(24)	1

Die Auflösung:

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\begin{Vmatrix} 0 \\ x \\ -z \\ w \end{Vmatrix}} S^4 \xrightarrow{\begin{Vmatrix} wy & xz & x^2 & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 & x \\ 0 & 0 & -w & -z \end{Vmatrix}} S^4 \longrightarrow S \longrightarrow S/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

e_I mit $I=$ 134   12 13 14 34.

Beispiel 3: $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ mit

$$m_1 = xz,\quad m_2 = yz,\quad m_3 = w^2,\quad m_4 = wx,\quad m_5 = x^2.$$

Reduktion nach Lemma 1:

k	A_k	i_k
1	(25)	1
2	(35)	4
3	(24)	1

Dann ist noch die Reduktion mit $M(13) = M(134)$ notwendig. Dies liefert insgesamt die Auflösung

$$0 \longrightarrow S^2 \xrightarrow[\left\| \begin{matrix} w^2 & 0 \\ -wy & -x \\ 0 & w \\ x & 0 \\ yz & 0 \\ 0 & z \end{matrix} \right\|]{} S^6 \xrightarrow[\left\| \begin{matrix} y & w & x & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -yz & x & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 & -w & x \\ 0 & 0 & -z & 0 & 0 & -w \end{matrix} \right\|]{} S^5 \longrightarrow S \longrightarrow S/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

Teil 5 : Deformation von Streckungsringen

5.1. Der zugehörige Deformationsring

Sei R ein Streckungsring über Σ, H und einem Körper k. Bayer gibt in [7] eine Deformation von R in $R_\emptyset$ über $\mathbb{A}^1$ an. Sei dazu auf S eine $\mathbb{Z}$-Graduierung gewählt, die t-Graduierung, bzgl. derer R affin homogen ist. Die Existenz solcher Graduierungen (sogar von $\mathbb{N}_+$-Graduierungen) wurde in (2.5.) nachgewiesen.

Ist $T \in \mathbb{Z}^H$ der zugehörige Gradvektor, sei $R(t) := S[t]/I(t)$

mit $\quad I(t) := \langle x^a - st_t(a) : a \in \Sigma \rangle$,

$$st_t(a) := \sum r_{ab} t^{\langle T, a-b \rangle} x^b$$

der zugehörige Deformationsring.

Satz ([7]): $R(t)$ ist ein bzgl. der t-Graduierung homogener Streckungsring über Σ, H und $k[t]$.

Beweis: Es bleibt nur zu zeigen, daß die Standardmonome $k[t]$-unabhängig sind. Sei o.B.d.A. k ein unendlicher Körper. Ersetzt man t durch ein Element $c \in k^*$, erhält man einen zu R isomorphen Streckungsring R_c über Σ, H und k, da

$$y_v := x_v \cdot c^{-\deg_t x_v}$$

R_c in R überführt. Ist also

$$\sum f_a(t) \cdot x^a \equiv \emptyset \pmod{I(t)}$$

eine $k[t]$-lineare Kombination von Standardmonomen, so folgt $f_a(c)=\emptyset$ für alle $c \neq \emptyset$. Mithin gilt $f_a(t)=\emptyset$. #

Bemerkung: Die in [3∅] eingeführten Deformationen graduierter Streckungsringe, die Ideen von [14] und [47] verallgemeinern, entsprechen Gradvektoren mit negativen Komponenten. Da jedoch eine t-Graduierung eines homogenen Streckungsringes stets um ein Vielfaches der Ringgraduierung abgeändert werden kann, ohne $R(t)$ zu ändern, ist es keine Einschränkung, wenn wir im folgenden wie in [7] nur positive t-Graduierungen betrachten.

5.2. Deformation einer freien Auflösung von R über S

Sei $S_t := S[t]$ und $R(t) = S_t/I(t)$ der Deformationsring von R bzgl. einer streng affinen $\mathbb{N}_+$-t-Graduierung. $R(t)$ ist ein H-lokaler

Ring und besitzt als solcher eine minimale t-homogene Auflösung über S_t

(1):

$0 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{f_i} F_i \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow F_0 = S_t \dashrightarrow R(t) \dashrightarrow 0$

Da t Nichtnullteiler auf R(t) ist (2.1., Satz 1), bekommen wir daraus nach Ausfaktorisieren von t eine minimale Auflösung des diskreten Streckungsrings $R_0 = R(0)$

$0 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow F'_{i+1} \xrightarrow{f'_i} F'_i \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow F'_0 = S_t \dashrightarrow R_0 \dashrightarrow 0$ (2)

Analog erhält man nach Ausfaktorisieren von t-1 eine Auflösung von R

$0 \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow F''_{i+1} \xrightarrow{f''_i} F''_i \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow F''_0 = S_t \dashrightarrow R_0 \dashrightarrow 0$ (3),

die aber nicht unbedingt minimal sein muß. Die Übergangsmatrizen f'_i und f''_i erhält man dabei aus f_i, indem man t=0 bzw. t=1 substituiert.

Da die minimale Auflösung eines H-lokalen Ringes eindeutig bis auf möglichen Basiswechsel in den freien Moduln bestimmt ist, folgt umgekehrt, daß man eine minimale freie Auflösung (2) des diskreten Streckungsrings stets zu einer solchen (1) des Deformationsringes R(t) liften kann. Dabei genügt es zu erreichen, daß (1) ein Komplex wird. In der Tat, $(2) \otimes_k k[t]$ ist die zu (1) assoziierte graduierte Sequenz. Nach (3.1., Satz 3) folgt aus der Exaktheit von (2) damit, daß (1) eine strikte filterfreie Auflösung von R(t) ist, vorausgesetzt (1) ist ein Komplex. Dies beweist folgenden

Satz: Sei R(t) der Deformationsring eines Streckungsringe R über einem Körper k bzgl. einer streng affin homogenen positiven t-Graduierung. Dann kann man jede minimale H-Auflösung des diskreten Streckungsrings (2) zu einer solchen (1) von R(t) liften. Dazu sind die Übergangsmatrizen der Sequenz (2) an geeigneten Stellen durch Elemente aus $(t)S_t$ (des richtigen t-Grades) zu ergänzen, so daß ein Komplex entsteht.

Jede Auflösung (1) von R(t) kann man durch Substitution t=1 in eine Auflösung (3) von R verwandeln, die jedoch nicht minimal zu sein braucht.

Folgerung: Jede minimale H-Auflösung des diskreten Streckungsrings R_0 (über einem Körper k) kann man zu einer (nicht notwendig minimalen) Auflösung von R liften.

5.3. Deformation einer freien Auflösung von k über R

Seien $R(t)$ bzw. S_t wie in (5.2.) die Deformationsringe von R bzw. S bzgl. einer streng affinen $\mathbb{N}_+$-t-Graduierung. Dann kann man genau wie in (5.2.) eine minimale freie Auflösung von $k[t]$ über $R(t)$

$$\ldots \longrightarrow G_{i+1} \longrightarrow G_i \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_\emptyset = R(t) \longrightarrow k[t] \longrightarrow \emptyset$$

betrachten. Wieder liefert Ausfaktorisieren des Nichtnullteilers $t \in R(t)$ eine minimale freie Auflösung von k über $R_\emptyset$, Ausfaktorisieren von t-1 dagegen eine nicht notwendig minimale freie Auflösung von k über R. Genau wie in (5.2.) erhalten wir also folgenden

Satz: Sei R(t) der Deformationsring eines Streckungsrings R über einem Körper k bzgl. einer streng affin homogenen positiven t-Graduierung. Dann kann man jede minimale H-Auflösung von k über $R_\emptyset$ zu einer solchen von $k[t]$ über R(t) liften. Dazu sind in den Übergangsmatrizen die Elemente aus $R_\emptyset$ durch geeignete Urbilder der durch $t \dashrightarrow \emptyset$ induzierten Abbildung $R(t) \longrightarrow R_\emptyset$ zu ersetzen, so daß ein Komplex entsteht (dieser ist dann automatisch strikt exakt).

Jede Auflösung von $k[t]$ über R(t) kann man durch Substitution von t=1 in eine Auflösung von k über R verwandeln, die jedoch nicht unbedingt minimal zu sein braucht.

Dieses Ergebnis ist für die praktische Berechnung von minimalen Auflösungen des Restklassenkörpers k über R allerdings nur von beschränktem Interesse, da man im allgemeinen selbst für Potenzproduktideale keine Verfahren kennt, diese (unendliche) Auflösung explizit anzugeben. Es beweist aber das nach (3.2., Satz 1) angekündigte Ergebnis, daß man eine minimale Auflösung von k über $R_\emptyset = R(\emptyset)$ stets in eine Auflösung von k über $R = R(1)$ deformieren kann. Mehr noch gibt es einen Hinweis darauf, daß diskrete Streckungsringe in gewissem Sinne "extremale" Poincarereihen haben, d.h. Golodringe sein sollten, wie in [5] bewiesen wird.

5.4. Deformation des kanonischen Moduls

Sei $R=S/I$ ein Streckungsring über Σ, H und k und $R(t)$ der Deformationsring bzgl. einer streng affin homogenen $\mathbb{N}_+$-t-Graduierung. Sei weiter $R_\emptyset=R(\emptyset)=S/I(\emptyset)$ der zugehörige diskrete Streckungsring.

Satz: Sei $\dim R(\emptyset)=d$ und $K^{d-1}_{R(\emptyset)}=\emptyset$. Dann kann man $K_{R(\emptyset)}$ in K_R über $\mathbb{A}^1$ deformieren.

Beweis: Sei x ein Nichtnullteiler in $R(t)$. Wendet man $\mathrm{Hom}(\#,S_t)$ auf die Sequenz

$$\emptyset \longrightarrow R(t) \xrightarrow{x} R(t) \longrightarrow R(t)/xR(t) \longrightarrow \emptyset$$

an, so ergibt die entsprechende lange exakte Homologiesequens

$$\emptyset \longrightarrow K_{R(t)} \xrightarrow{x} K_{R(t)} \longrightarrow K_{R(t)/xR(t)} \longrightarrow K^d_{R(t)}$$

$$\xrightarrow{x} K^d_{R(t)} \longrightarrow K^{d-1}_{R(t)/xR(t)}$$

Setzen wir zuerst $x=t$. Nach Voraussetzung gilt $K^{d-1}_{R(\emptyset)}=\emptyset$, also $K^d_{R(t)} = tK^d_{R(t)}$. Nach dem homogenen Nakayamalemma ist mithin $K^d_{R(t)}=\emptyset$ und in unserem Fall gilt generell

$$K_{R(t)/xR(t)} = K_{R(t)}/xK_{R(t)},$$

also insbesondere

$$K_{R(\emptyset)} = K_{R(t)}/tK_{R(t)},$$
$$K_R = K_{R(t)}/(t-1)K_{R(t)}. \ \#$$

5.5. Liften von Syzygien

Obwohl in Komputeralgebrasystemen die Berechnung der Auflösung von Idealen meist nicht über (5.2., Satz) erfolgt, sondern direkt durch mehrfaches Anwenden des Gröbnerbasisalgorithmus, seien nun einige Techniken zum Liften von Syzygien, wie nach (5.2.) bzw. (5.3.) stets möglich, angegeben. Dabei werden wir uns auf die Situation aus (5.2.) beschränken, die Ideen sind aber auch bei anderen Auflösungen anwendbar.

Zum Liften der Syzygien einer minimalen Auflösung von $R_\emptyset$ zu solchen von R wähle man im Fall eines inhomogenen Streckungsrings eine positive streng affine t-Graduierung. Diese definiert den t-Gradvektor der Syzygie von $R_\emptyset$ und damit auch von $R(t)$. Da diese Syzygie mit Elementen aus $(t)S_t$ des entsprechenden t-Grades zu einer Syzygie von $R(t)$ aufzufüllen ist und danach $t=1$ substituiert wird, ist die dieser Syzygie entsprechende Syzygie von R mit Elementen aus S echt kleineren t-Grades aufgefüllt. Da es für eine positive t-Graduierung nur endlich viele Monome beschränkten t-Grades gibt, führt das Liften einer Syzygie von $R_\emptyset$ zu einer solchen von R auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Eine weitere Vereinfachung erhält man, wenn man beachtet, daß die Syzygie von $R_\emptyset$ bzgl. aller solcher t-Graduierungen liftbar ist, also obige t-Gradbeschränkung bzgl. aller t-Graduierungen gilt.

Mehr noch, man braucht sich nicht auf streng affin homogene t-Graduierungen zu beschränken, da nach (5.2., Folgerung) eine minimale H-Auflösung von $R_\emptyset$ zu einer (nicht notwendig minimalen) Auflösung von R(t) für eine beliebige affin homogene t-Graduierung geliftet werden kann, diese ihrerseits nach Substitution $t=1$ aber eine Auflösung von R liefert:

Satz 1: Ergänzt man eine Syzygie in einer minimalen H-Auflösung von $R_\emptyset$ zu einer solchen von R, so kann diese nur durch Linearkombinationen von Monomen aufgefüllt werden, die bzgl. aller (streng) affin homogenen positiven t-Graduierungen von (echt) kleinerem Grad als die Ausgangssyzygie sind.

Ist R ein graduierter Streckungsring, so liefert dessen Ringgraduierung, im folgenden x-Graduierung genannt, weitere Einschränkungen. Dann ist die Auflösung von R(t) x-homogen und die beim Liften zu ergänzenden Ausdrücke müssen auch den richtigen x-Grad haben. Mehr noch, nach (5.1., Bemerkung) brauchen wir uns nicht auf die positiven t-Graduierungen zu beschränken:

Satz 2: Ist R ein graduierter Streckungsring, so kann eine Syzygie von $R_\emptyset$ zu einer Syzygie von R nur durch Linearkombinationen von solchen Monomen aufgefüllt werden, die bzgl. aller x-Graduierungen denselben Grad und bzgl. aller (streng) affin homogenen nicht notwendig positiven t-Graduierungen (echt) kleineren Grad als die Ausgangssyzygie haben.

Schließlich bemerken wir noch, daß ein Monom, das in einer Syzygie von $R_\emptyset$ vorkommt, an dieser Stelle nicht in der ergänzenden Linearkombination auftreten kann.

Betrachten wir zur Illustration dieser Bemerkungen das Macau-laybeispiel (bzgl. der graduiert lexikographischen Ordnung):

$\mathfrak{a} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ mit

$$m_1 = wz - xy,\ m_2 = w^2y - x^3,\ m_3 = xz^2 - y^3,\ m_4 = x^2z - wy^2.$$

Die Auflösung von $R_\emptyset$, vgl. (4.1., Beispiel 2):

$$\emptyset \longrightarrow S \xrightarrow{\begin{Vmatrix} \emptyset \\ x \\ -z \\ w \end{Vmatrix}} S^4 \xrightarrow{\begin{Vmatrix} wy & xz & x^2 & \emptyset \\ -z & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -w & \emptyset & x \\ \emptyset & \emptyset & -w & -z \end{Vmatrix}} S^4 \longrightarrow S \longrightarrow S/\mathfrak{a} \longrightarrow$$

Die Gradmatrizen der x-Graduierung

a) bzgl. deg(w,x,y,z) = (1,1,1,1)

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (2\ \ 3\ \ 3\ \ 3)$$

b) bzgl. deg(w,x,y,z) = (Ø,1,3,4)

$$\begin{Vmatrix} 3 \\ \underline{1} \\ \underline{4} \\ \underline{\emptyset} \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \underline{3} & \underline{5} & \underline{2} & 6 \\ \underline{4} & \underline{6} & 3 & \underline{7} \\ \underline{-2} & \underline{\emptyset} & \underline{-3} & \underline{1} \\ 1 & 3 & \underline{\emptyset} & \underline{4} \end{Vmatrix} \qquad (4\ \ 3\ \ 9\ \ 6)$$

Der Vergleich der beiden x-Graduierungen zeigt, daß man an d
unter b) unterstrichenen Plätzen keine Monome einfügen kann
Auch für die restlichen Plätze bleibt jeweils genau ein Mon
zur Verfügung. Die Auflösung von R lautet

$$\emptyset \longrightarrow S \xrightarrow{\begin{Vmatrix} y \\ x \\ -z \\ w \end{Vmatrix}} S^4 \xrightarrow{\begin{Vmatrix} wy & xz & x^2 & -y^2 \\ -z & \emptyset & -y & \emptyset \\ \emptyset & -w & \emptyset & x \\ -x & y & -w & -z \end{Vmatrix}} S^4 \longrightarrow S \longrightarrow S/\mathfrak{a} \longrightarrow$$

Teil 6 : Beispiele

6.1. Der Koordinatenring der Graßmannmannigfaltigkeit $G(d,n)$

Sei $n \geq d$ und $X=(x_{ij})$, $i=1\ldots d$, $j=1\ldots n$, eine Matrix von Unbestimmten. Der Koordinatenring $\underline{G(d,n)}$ der Graßmannmannigfaltigkeit der d-dimensionalen Unterräume eines n-dimensionalen Vektorraums ist dann gerade der von allen d-Minoren von X erzeugte Unterring von $K[X]$.

Wählt man $H=\underline{B(d,n)}=\{[a_1<\ldots<a_d]: 1 \leq a_i \leq n\}$ mit der Ordnung

$$[a_1<\ldots<a_d] \leq [b_1<\ldots<b_d] :\Leftrightarrow a_i \leq b_i \text{ für alle } i$$

und ordnet $[a_1<\ldots<a_d]$ dem d-Minor von X mit den Spalten $a_1,\ldots,a_d$ zu, so ist R eine gewöhnliche Hodgealgebra und damit ein Streckungsring über H und $\Sigma=M(H,<)$, wie in [14] und [16] bewiesen wurde. Die Basisstreckungsformeln, in [13] hergeleitet, ergeben sich aus der Identität

(1) $\sum (-1)^{sgn(p)}[a_1..p(a_k)..p(a_d)][p(b_1)..p(b_k)..b_d] = \emptyset$,

wobei über alle Permutationen p von $(a_k,\ldots,a_d,b_1,\ldots,b_k)$ zu summieren ist, für die $p(a_k)<\ldots<p(a_d)$ und $p(b_1)<\ldots<p(_k)$ gilt. Dabei ist $[a_1\ldots a_d]$, wenn $a_1<\ldots<a_d$ nicht gilt, entsprechend den Rechenregeln für Determinanten hinzuzudefinieren. Sind insbesondere $[a_1<\ldots<a_d]$ und $[b_1<\ldots<b_d]$ zwei nicht vergleichbare Elemente in H, alo etwa $a_i \leq b_i$ für $i<k$, aber $a_k>b_k$, erhalten wir

$$[a_1<\ldots<a_d]\cdot[b_1<\ldots<b_d] = \sum_{p \neq id} (-1)^{sgn(p)}[a_1..p(a_k)..p(a_d)][p(b_1)..p(b_k)..b_d]$$

mit $a_i \geq p(a_i)$, $i=k\ldots d$, und $b_i \leq p(b_i)$, $i=1\ldots k$, wegen $b_1<\ldots<b_k<a_k<\ldots<a_d$, also

$$[a_1\ldots a_d] > [a_1\ldots p(a_k)\ldots p(a_d)] \text{ und}$$
$$[b_1\ldots b_d] < [p(b_1)\ldots p(b_k)\ldots b_d]$$

Mehrfaches Anwenden dieser Formel liefert schließlich die Streckungsformel

$$[a_1<\ldots<a_d][b_1<\ldots<b_d] = \sum r_k[a_1^{(k)}<\ldots<a_d^{(k)}][b_1^{(k)}<\ldots<b_d^{(k)}]$$

mit $[a_1\ldots a_d] > [a_1^{(k)}\ldots a_d^{(k)}]$,
$[b_1\ldots b_d] < [b_1^{(k)}\ldots b_d^{(k)}]$ und
$[a_1^{(k)}\ldots a_d^{(k)}] < [b_1^{(k)}\ldots b_d^{(k)}]$ für alle k.

Geht man umgekehrt von $[b_1\ldots b_d][a_1\ldots a_d]$ aus, so liefert derselbe Prozess (auf anderem Wege) eine Streckungsformel, die wegen der linearen Unabhängigkeit der Standardmonome ([14, Thm. 2.1.]) mit obiger übereinstimmen muß.

Satz 1: In der Streckungsformel eines Nichtstandardprodukts (d.h. symm. ASL im Sinne von Bruns [7])

$[a_1<\ldots<a_d][b_1<\ldots<b_d]=\sum r_k[a_1^{(k)}<\ldots<a_d^{(k)}][b_1^{(k)}<\ldots<b_d^{(k)}]$

gilt für alle k

$$[a_1^{(k)}\ldots a_d^{(k)}] < [a_1\ldots a_d] < [b_1^{(k)}\ldots b_d^{(k)}] \text{ und}$$
$$[a_1^{(k)}\ldots a_d^{(k)}] < [b_1\ldots b_d] < [b_1^{(k)}\ldots b_d^{(k)}]$$

bzw. allgemeiner: In der Streckungsformel eines Nichtstandardmonoms $x^a=\sum r_{ab}x^b$ gilt für alle $j\in s(a)$ und $b\in Mo(a)$

$$\min\{i\in s(b)\} \leq j \leq \max\{i\in s(b)\} \quad \text{in} \quad (H,<).$$

(Man beachte dabei, daß s(b) in H eine Kette ist)

Die Halbordnung B(d,n) ist ein distributiver Verband, denn es gilt

$$B(d,n) \cong J([d]\times[n-d])$$

$$\text{via} \quad [a_1<\ldots<a_d] <\!\!-\!\!-\!\!> <\{(d+1-i,a_i-i):\ a_i>i\}>$$

Auf der rechten Seite steht dabei gerade das Ferrersdiagramm $F(\mathfrak{a})$ der Partition $\mathfrak{a} = (a_1-1\leq\ldots\leq a_d-d)$.

Damit erhält man für die Hilbertfunktion von R

Satz 2: $H(m,R) = Z(m,B) = w([d]\times[n-d],m+1)$

$\dim R = r(B) = d(n-d)+1.$

In (6.2) geben wir noch eine explizite Formel für die Hilbertfunktion und den Grad von G(d,n) an.

Schließlich sei bemerkt, daß $[d]\times[n-d]$ eine Rangfunktion besitzt, somit also F(R,t) numerisch Gorenstein ist und damit R als Integritätsbereich selbst auch, vgl. (1.4.7.).

Da Proj R glatt ist, hat Spec R nach dem Rationalitätskriterium (3.2., Satz 5) in der Kegelspitze eine rationale Singularität, denn R ist CM als Hodgealgebra über einem distributiven Verband und die zugehörige Hilbertfunktion ist wegen (2.4.4) ein Polynom für alle $m\geq 0$.

6.2. Der Koordinatenring einer Schubertvarietät

Seien $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} \in B(d,n)$ und $0=A_0\subsetneq\ldots\subsetneq A_n=V$ sowie $0=B_0\subsetneq\ldots\subsetneq B_n=V$ zwei Fahnen des n-dimensionalen Vektorraums V in allgemeiner Lage (d.h. $\dim A_i = \dim B_i = i$ und $A_i\cap B_{n-i} = (0)$). $\Omega(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ bezeichne dann die Untervarietät von $\mathbb{G}(d,n)$ aller d-dimensionalen Unterräume W mit $\dim(W \cap A_{a_i}) \geq i$ und $\dim(W \cap B_{n-b_i}) \geq d-i$. Dies sind gerade die schiefen Schubertvarietäten aus [57]. Für $\mathbf{b}=\{1<\ldots<d\}$ ist die zweite Bedingung automatisch erfüllt und wir erhalten $O(\mathbf{a})$, die gewöhnliche Schubertvarietät. Allgemein ist der entsprechende Koordinatenring $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ gerade

$$O(\mathbf{a},\mathbf{b}) = G(d,n)/\langle x_{\mathbf{r}} : \mathbf{r} \in \mathcal{B}(d,n) : \mathbf{r} \not\leq \mathbf{a} \text{ oder } \mathbf{r} \not\geq \mathbf{b} \rangle$$

Nach (2.3., Satz 3) induziert die Streckungsringstruktur auf $G(d,n)$ damit eine solche auf $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$, genauer sogar eine Hodge-algebrastruktur über

$$B(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{r} \in \mathcal{B}(d,n) : \mathbf{b} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{a}\}.$$

(6.1.(3)) liefert

$$B(\mathbf{a},\mathbf{b}) = J(Q(\mathbf{a},\mathbf{b}))$$

mit $Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{(d+1-i,j) : b_i-i \leq j \leq a_i-i\} \subseteq [d]\times[n-d]$.
Auf der rechten Seite steht dabei gerade ein schiefes Ferrers-diagramm, von dem die Menge der Ordnungsideale zu bilden ist.

Analog (6.1.) erhält man damit für die Hilbertfunktion von $R=O(\mathbf{a},\mathbf{b})$, vgl. auch [57]

$$H(m,R) = w(Q(\mathbf{a},\mathbf{b}),m+1) \quad \text{und}$$

$$\dim R = \sum (a_i-b_i)+1 = |Q|+1.$$

Einen expliziten Ausdruck für $H(m,R)$ liefert die Postulationsformel von Hodge und Littlewood, vgl. [57,4.2.] für deren Verallgemeinerung auf schiefe Schubertvarietäten:

<u>Satz 1</u>: $H(m,O(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \det \left\| \binom{m+a_i-b_j-i+j}{a_i-b_j} \right\|_{1\leq i,j\leq d}$

mit der Vereinbarung $\binom{a}{b}=0$ für $b<0$.

Beweisskizze: Bezeichne $H'(\mathbf{a},\mathbf{b};m)$ den Determinantenausdruck. Man zeigt zuerst, daß $H'(\mathbf{a},\mathbf{b};m)=0$ für $\mathbf{b}\not\leq\mathbf{a}$ gilt, da dann viele der Matrixelemente Null werden. Zur Berechnung der Hilbertfunktion, d.h. der Multiketten der Länge m in $B(\mathbf{a},\mathbf{b})$ verwenden wir die Rekursionsformel

$$H(\mathbf{a},\mathbf{b};m) = \sum_{\mathbf{b}\leq\mathbf{r}\leq\mathbf{a}} H(\mathbf{r},\mathbf{b};m-1)$$

und beweisen induktiv, daß für H' dieselbe Rekursionsformel gilt. Übereinstimmung der Startwerte liefert dann die Richtigkeit des Satzes. Für den induktiven Beweis für H' können wir nach obiger Bemerkung zuerst $\mathbf{b}\leq\mathbf{r}\leq\mathbf{a}$ durch $\mathbf{r}\leq\mathbf{a}$ ersetzen. Die Behauptung folgt dann leicht aus der Tatsache, daß ein Summationsindex r_i immer nur in genau einer Zeile von $H'(\mathbf{r},\mathbf{a};m-1)$ vorkommt, also Determinantenregeln Anwendung finden können. #

Insbesondere erhalten wir eine explizite Formel für die Hilbertfunktion von $G(d,n)$:

Korollar ([57,4.3a]):

$$H(m,G(d,n)) = \prod_{i=1}^{n-1} \binom{m+i}{i}^{\min(i,n-i,d,n-d)}$$

(Bruchstrich fehlt)

Beweis: Es gilt $G(d,n)=O([n-d+1\ldots n],[1\ldots d])$ und damit

$$H(m,G(d,n)) = \left|\binom{m+n-d}{n-d+i-j}\right|_{i,j} = \left|\binom{m+n-d+i-1}{n-d+i-j}\right|_{i,j} = \circledast$$

nach entsprechenden Zeilenumformungen. Zieht man aus jeder Zeile das erste Glied als Faktor heraus, danach spaltenweise die gemeinsamen Nenner, so erhält man eine verallgemeinerte van-der-Mondesche Matrix, deren Wert nach dem bekannten Satz zu berechnen ist. Dies liefert die Behauptung. #

Für den Grad erhalten wir folgende Formel:

Satz 2: $e(O(\mathfrak{a},\mathfrak{b})) = [\sum(a_i-b_i)]!\ \det\|(a_i-b_j)!^{-1}\|_{i,j}$, wobei für $a_i<b_j$ das entsprechende Element der Determinante durch $\emptyset$ zu ersetzen ist. Für gewöhnliche Schubertvarietäten erhalten wir daraus ([38,14.7])

$$e(O(\mathfrak{a})) = [\textstyle\sum(a_i-i)]!/(a_1-1)!\ldots(a_d-1)!\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

sowie $e(G(d,n)) = [d(n-d)]!$.

Beweis: Nur die Umformung der ersten Formel zur zweiten bedarf einer Erläuterung. Man setze $b_j=j$ und klammere in jeder Zeile der Determinante das erste Glied aus. Die verbleibende Determinante stellt ein antisymmetrisches Polynom in $a_1,\ldots,a_d$ dar, enthält als Faktor also $\prod(a_i-a_j)$. Gradvergleich liefert dann die Behauptung. #

6.3. Letter-Place-Algebra und Determinantenideale

Sei $X=(x_{ij})$, $i=1\ldots d$, $j=1\ldots m$, $n=m+d$, eine Matrix von Unbestimmten.

Dann hat $S=k[x_{ij}]$ neben der offensichtlichen Struktur einer diskreten Hodgealgebra noch eine zweite Hodgealgebrastruktur.

Sei dazu

$$\underline{P(d,m)} = \{(a_1<\ldots<a_k|b_1<\ldots<b_k): 1\le a_i\le d,\ 1\le b_i\le m,\ k\ge 1\}$$

eine endliche Menge mit der partiellen Ordnung

$$(a_1<\ldots<a_k|b_1<\ldots<b_k) \le (a'_1<\ldots<a'_\ell|b'_1<\ldots<b'_\ell)$$
$$:\Leftrightarrow k\ge l \text{ und } a_i\le a'_i,\ b_i\le b'_i \text{ für alle } i=1,\ldots,l$$

Ordnet man $(a_1<\ldots<a_k|b_1<\ldots<b_k)$ den k-Minor von X mit den

Zeilen $a_1,\dots,a_k$ und den Spalten $b_1,\dots,b_k$ zu, so liefert diese Darstellung auf R die Struktur einer gewöhnlichen Hodgealgebra über P. Wie in [13] gezeigt wird, hängt diese Struktur auf natürliche Weise mit der in (6.1.) angegebenen zusammen: Sie identifiziert R mit dem Koordinatenring der affinen Karte von $G(d,n)$ bzgl. $x_{[m+1<\dots<n]}=1$, d.h der Isomorphismus

$$G(d,n)/(x_{[m+1<\dots<n]}-1) \dashrightarrow R$$

identifiziert die aus (6.1.) bekannte Streckungsringstruktur der linken Seite mit der oben konstruierten Streckungsringstruktur der rechten Seite via

$$[b_1<\dots<b_k<c_{k+1}<\dots<c_d] \dashrightarrow (a_1<\dots<a_k|b_1<\dots<b_k) \qquad (1)$$

wobei sich k aus der Bedingung $b_k\le m<c_{k+1}$ ergibt und $(a_1<\dots<a_k)$ das Komplement zu $(n+1-c_{k+1}>\dots>n+1-c_d)$ in $\{1,\dots,d\}$ ist. Insbesondere induziert diese Abbildung einen Isomorphismus der Halbordnungen

$$B(d,m+d)\setminus\{[m+1<\dots<n]\} \dashrightarrow P(d,m).$$

Die Ergebnisse aus (6.1.) und (6.2.) liefern

$$P(d,m) \cong J([d]\times[m]\setminus\{(d,m)\})$$

sowie $\quad r((a_1\dots a_k|b_1\dots b_k)) = \sum a_i+\sum b_i-k(d+m+1)+dm+1.$

Analog (6.1.(2)) gilt auch hier

P. **Satz 1**: Ist für ein Nichtstandardmonom $x^a = \sum r_{ab}x^b$ die Streckungsformel, so gilt für alle Zeilen $j\in s(a)$ in $P(d,m)$

$$\min\{i\in s(b)\}\le j\le \max\{i\in s(b)\}.$$

Bezeichnet $l(a_1\dots a_k|b_1\dots b_k):=k$ die Länge einer Zeile in $P(d,m)$, so ist

$$I_r := \langle x_p : p\in P(d,m),\ l(p)\ge r \rangle$$

gerade das von der (rxr)-Minoren von X erzeugte Ideal. Satz 1 und die Folgerungen aus (2.3., Satz 3) liefern dann

Satz 2: R/I_r ist ein Streckungsring über

$$Q(r):=\{p\in P(d,m): l(p)<r\}.$$

Analog bekommt man für eine fixierte Zeile $q\in P(d,m)$, daß die Streckungsringstruktur von R eine solche auf $R/\langle x_p:p\in P,\ p\le q\rangle$, $R/\langle x_p:p\in P,\ p\ge q\rangle$, $R/\langle x_p:p\in P,\ p\not\le q\rangle$ und $R/\langle x_p:p\in P,\ p\not\ge q\rangle$ induziert, vgl. auch [6].

Die Streckungsringstruktur auf $R/\langle x_p:p\in P,\ p\not\ge q\rangle$ kommt bei obigem Isomorphismus gerade vom Koordinatenring einer affinen Karte der schiefen Schubertvarietät $\Omega(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{a} = [m+1<\dots<n]$ und $\mathfrak{b}$ als der q entsprechenden Zeile. Sei deshalb

für $(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) = (a_1 \ldots a_k | b_1 \ldots b_k)$

$R(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) := R/I(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ mit $I(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) := (x_p : p \not\geq (\mathfrak{a}|\mathfrak{b}))$
ebenfalls als <u>Schubertring</u> bezeichnet. Er ist also ein Streckungsring über $Q(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) := \{p \in P : p \geq (\mathfrak{a}|\mathfrak{b})\}$. Für diesen erhalten wir aus der Kenntnis der Rangfunktion auf $P(d,m)$

<u>Satz 3</u>: $ht(I(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})) = \sum a_i + \sum b_i - k(d+m+1) + dm$

$$\dim R(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) = k(d+m+1) - \sum a_i - \sum b_i$$

Für Determinantenideale gilt also insbesondere, auch in Übereinstimmung mit [17]

<u>Folgerung 1</u>: $ht(I_r) = dm - (r-1)(d+m-r+1) = (d-r+1)(m-r+1)$

$$\dim R/I_r = (r-1)(d+m-r+1)$$

Mehr noch, aus unserem bisherigen Stand der Kenntnis der Hilbertreihe der Determinantenideale können wir schließen

<u>Folgerung 2</u>: Spec R/I_r hat nur rationale Singularitäten.
(k sei dabei ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakterisitk $\emptyset$)

Beweis: Sei $T := k[x_{ij}]/I_r(X)$ der zu untersuchende Faktorring nach dem Ideal $I_r(X)$ der r-Minore der Matrix $X = (x_{ij})$. Dann gilt Spec $T \setminus \{\mathfrak{m}\} = \bigcup$ Spec Tx_{ij}, wobei rechts die Lokalisierungen nach den Potenzen des entsprechenden Elements stehen. Nun gilt aber $I_r(X) \cdot Tx_{11} = I_{r-1}(Y)$, denn über $R[x_1^{-1}]$ kann man X durch Zeilen- und Spaltentransformationen umformen zu

$$\begin{Vmatrix} 1 & \emptyset & \ldots & \emptyset \\ \emptyset & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \emptyset & y_{m2} & \ldots & y_{mn} \end{Vmatrix}$$

Y ist dabei die verbleibende Matrix von über $k[x_{11}, x_1^{-1}]$ algebraisch unabhängigen Unbestimmen. Da

$$Tx_{11} = k[Y]/I_{r-1}(Y) \otimes_k k[x_{11}, x_1^{-1}]$$

eine Etalüberlagerung von Spec $k[Y]/I_{r-1}(Y)$ ist und Spec $k[Y]/I_{r-1}(Y)$ nach Induktionsvoraussetzung nur rationale Singularitäten hat, hat Spec $T \setminus \{\mathfrak{m}\}$ ebenfalls nur rationale Singularitäten. T ist als Hodgealgebra über einem distributiven Verband Cohen-Macaulay und Hilbertfunktion und Hilbertpolynom stimmen für $n \gg \emptyset$ überein, vgl. (2.4.). Die Behauptung folgt nun aus dem Rationalitätskriterium (3.2., Satz 5). #

6.4. Die Hilbertfunktion der Determinantenideale

Wir wollen zunächst den Isomorphismus

$$P(d,m) \longrightarrow J([d]\times[m]\setminus\{(d,m)\})$$

besser beschreiben.

Lemma 1: Ist $(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})=(a_1\ldots a_k|b_1\ldots b_k)\in P(d,m)$, so kann man das ihm unter (6.1) entsprechende Ferrersdiagramm $F(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ wie folgt gewinnen: Teile ein (m,d)-Rechteck in vier Teile, so daß rechts unten ein (k,k)-Quadrat entsteht. Trage im linken unteren Rechteck $F(\mathfrak{b})$, im rechten oberen $F(\mathfrak{a})'$ an. Die konstruierte Trennlinie im (m,d)-Rechteck beschreibt $F(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$. (Bild 3)

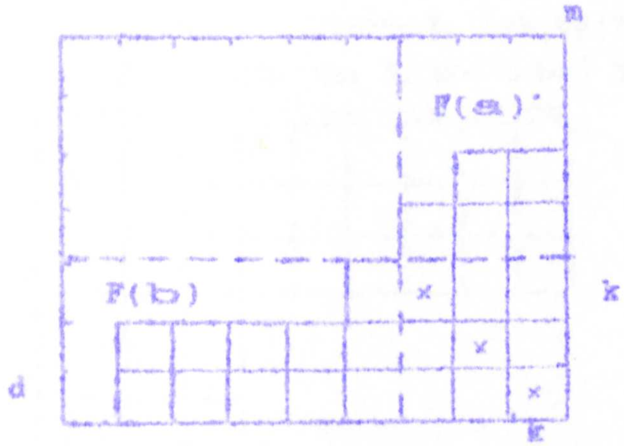


Bild 3: Das Diagramm $F(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$

Beweis: Das korrespondierende Ferrersdiagramm erhält man über die Zwischenschritte

$(a_1\ldots a_k|b_1\ldots b_k) \longrightarrow$
$[b_1\ldots b_k c_{k+1}\ldots c_d] \longrightarrow$
$F=(c_d-d\geq\ldots\geq b_k-k\geq\ldots\geq b_1-1)$

wie oben beschrieben. k ergibt sich dabei aus der Bedingung $b_k\leq m<c_{k+1}$, d.h. k ist die Nummer der letzten Zeile von F (von unten gezählt), die kein Feld $(m-i,d-i)$ enthält. Mithin ist nur noch zu zeigen, daß rechts oben $F(\mathfrak{a})'$ erscheint, d.h. $F(\mathfrak{a})=(c_d-d-m+k\geq\ldots\geq c_{k+1}-m-1)$ gilt. Dies folgt aus (1.3., Lemma), angewandt auf das rechte obere Rechteck, und der Definition der $c_{k+1},\ldots,c_d$. #

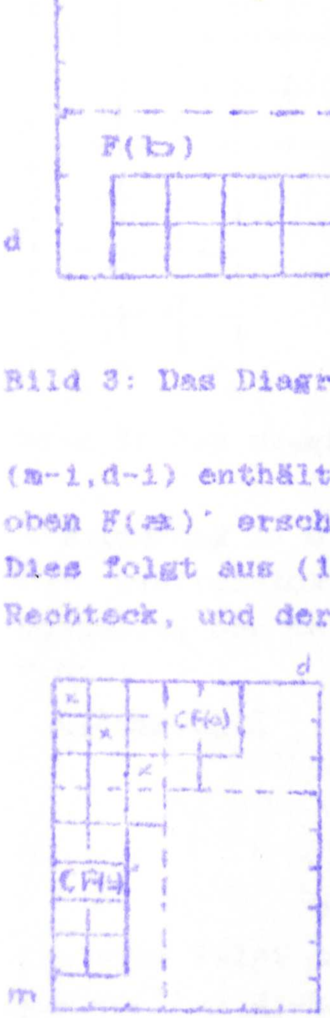


Bild 4: Das Diagramm $CF(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$

Sei $CF(p)$ die zu $F(p)$ im (m,d)-Rechteck komplementäre Partition. Die Elemente $p\in Q(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ stehen in eineindeutiger (antimonotoner) Korrespondenz zu den Ferrersdiagrammen $CF(p)\subseteq CF(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$, die $(1,1)$ enthalten. Dabei gilt $l(p) = \max\{l:(i,i)\in CF(p)\} =$

$= \#\{(i:i \in CF(p)\}$. Nach (1.3.) stehen also die Multiketten $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$ in $Q(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ in eineindeutiger Korrespondenz zu den antimonotonen Funktionen $f:CF(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(1,1)=n$, wenn man jedem Element $(i,j) \in CF(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ die Anzahl derjenigen p_m zuordnet, für welche $(i,j) \in CF(p_m)$ ist. Insbesondere gilt

$$\sum_s l(p_s) = \sum_i f(i,i)$$

und wir erhalten folgenden

<u>Satz 1</u> ([57, (5.2.)]): Für den Streckungsring $R(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ ergibt sich dessen Hilbertfunktion $H((\mathfrak{a}|\mathfrak{b});N)$ als die Zahl der antimonotonen Abbildungen $f:CF(\mathfrak{a}|\mathfrak{b}) \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit Spur N (d.h. $\sum f(i,i)=N$).

Insbesondere gilt dies für die Determinantenringe $R'=S/I_r$. Hierbei ist $CF(r)$ ein Haken der Breite $r-1$ mit Schenkeln der Länge m und d. (Bild 5)

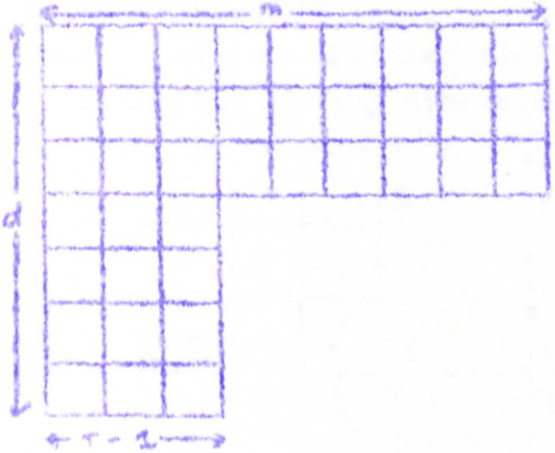


Bild 5: Das Diagramm $CF(r)$

Beweis: Bei der Berechnung der Hilbertfunktion beachte man, daß nicht alle Variablen x_p, $p \in P(d,m)$, vom Grad 1 sind, $H(R',N)$ also gleich der Zahl der Multiketten in $Q(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})$ mit $\sum l(p_m) = N$ ist. #

<u>Folgerung 1</u>: $H(S/I_2S;N) = \binom{N+d-1}{d-1}\binom{N+m-1}{m-1}$

Für zweireihige Determinantenideale erhalten wir daraus nach Anwendung der Zerlegungsformel für Binomialkoeffizienten ([49, S.25])

<u>Folgerung 2</u>:

$$F(S/I_2S,t) = (1-t)^{-(m+d-1)} \sum_{j=0}^{u-1} \binom{m-1}{j}\binom{d-1}{j} t^j$$

$$e(S/I_2S) = \binom{m+d-2}{m-1}$$

$$\mathrm{reg} = \min(m-1,d-1).$$

Lezteres folgt aus (1.5), da Determinantenideale als Hodgealgebren über distributiven Verbänden CM sind.

Kommen wir nun zur numerischen Auswertung der Formel für die Hilbertfunktion $H((\mathfrak{a}|\mathfrak{b});N)$ im allgemeinen Fall.

In [23] wird, S. Abhyankar und I. Gessel folgend, die Hilbertfunktion $H((\mathfrak{a}|\mathfrak{b});N)$ über die Zahl der Ketten $(\mathfrak{a}|\mathfrak{b})\leq p^1\leq\ldots\leq p^r$ in $P(d,m)$ berechnet. Jede solche Kette entspricht einem Paar von Ketten $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{a}^1\leq\ldots\leq\mathfrak{a}^r$ und $\mathfrak{b}\leq\mathfrak{b}^1\leq\ldots\leq\mathfrak{b}^r$ mit $p_i=(\mathfrak{a}_i|\mathfrak{b}_i)$. Dabei sind für $H((\mathfrak{a}|\mathfrak{b});N)$ gerade die Ketten mit $\sum l(P_i)=N$ zu berücksichtigen, so daß

$$H((\mathfrak{a}|\mathfrak{b});N) = \sum c(\mathfrak{a};u_1\ldots u_k)c(\mathfrak{b};u_1\ldots u_k)$$

gilt, wobei $c(\mathfrak{a};u_1\ldots u_k)$ die Ketten $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{a}^1\leq\ldots\leq\mathfrak{a}^r$ mit $u_i = \max\{\, j : l(\mathfrak{a}^j)\geq i \,\}$ zählt und über alle Partitionen $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_k$ der Zahl N zu summieren ist ($k=l(\mathfrak{a})$).

<u>Satz 2</u> ([23, Ch. 6]):

$$c(\mathfrak{a};u_1\ldots u_k) = \det\left\|\binom{m-a_i+u_j+i-j}{u_j+i-j}\right\|$$

wobei $\binom{a}{b}=0$ für $b<0$ zu setzen ist.

Beweis: Siehe [23].

Obiger Satz von Stanley liefert dagegen

$$H((\mathfrak{a}|\mathfrak{b});N) = \sum d(m-\mathfrak{a};u_1\ldots u_k)d(d-\mathfrak{b};u_1\ldots u_k)$$

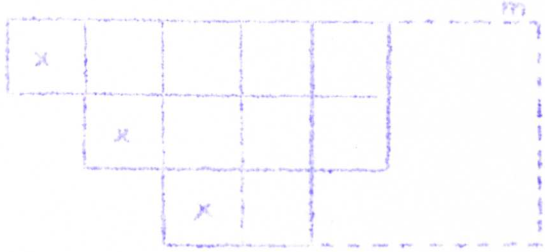


Bild 6: Das Diagramm G

wobei $d(m-\mathfrak{a};u_1\ldots u_k)$ die Zahl aller antimonotonen Abbildungen $f:G\dashrightarrow\mathbb{N}$ nebenstehenden schiefen Ferrersdiagramms (der "Hälfte" von $CF(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$) mit Zeilen der Länge $m-a_1+1\geq\ldots\geq m-a_k+1$ und Diagonalenelementen $f(i,1)=u_i$ angibt und ebenfalls über alle Partitionen $(u_1\geq\ldots\geq u_k)$ der Zahl N zu summieren ist. Ein Vergleich beider Ergebnisse legt folgendes Lemma nahe:

<u>Lemma 2</u>: $c(\mathfrak{a};u_1\ldots u_k) = d(m-\mathfrak{a};u_1\ldots u_k)$

Beweis: Für $\mathfrak{p}=(p^1<\ldots<p^l(<d))$ sei $m-\mathfrak{p}=(m-p^1>\ldots>m-p^l)$ und für $f:G\dashrightarrow\mathbb{N}$ sei $f(i,j)$ der Funktionswert im j-ten Kästchen von links der i-ten Zeile von G ($j=0,\ldots,m-a_i$). Dann wird obige Gleichheit durch die eineindeutige Korrespondenz via

$$m-p_i^s = \max\{j:f(i,j)\geq s\} \text{ für } s\leq u_i$$

induziert. #

Damit verallgemeinert Galligos Satz in natürlicher Weise die Ergebnisse für vollständige Abzweigungen aus [10]. Für $a_1=m-k$

erhält man gerade das dort abgeleitete Resultat von Gelbart, da man dann die entsprechenden Determinante als verallgemeinerte van-der-Mondesche leicht berechnen kann.

Zur Berechnung der Hilbertfunktion der Determinantenideale der (r+1)-Minore setzen wir

$$N(u_1,\dots,u_r;m) := d(m-\mathfrak{a};u_1\dots u_r) \text{ für } \mathfrak{a}=(1<\dots<r)$$

Nach Satz 2 gilt

$$N(u_1,\dots,u_r;m) = \det \left\| \binom{m+u_j-j}{m-i} \right\|_{1\leq i,j\leq r}$$

Diese Determinante kann man als verallgemeinerte van-der-Mondesche leicht berechnen:

<u>Lemma 3</u>: $N(u_1,\dots,u_r;m) =$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq r} ((u_i-i)-(u_j-j)) \cdot \prod_{1\leq i\leq r} \frac{(u_i-i+m)!}{(u_i-i+r)!(m-r)!\dots(s-1)!}$$

<u>Satz 3</u>: Die Hilbertfunktion des Determinantenideals der (r+1)-Minore einer generischen (d,m)-Matrix berechnet sich aus

$$H(S/I_{r+1}S,N) = \sum N(u_1,\dots,u_r;m)N(u_1,\dots,u_r;d)$$

wobei über alle Partitionen $u_1\geq\dots\geq u_r\geq\emptyset$ der Zahl N zu summieren ist.

Mit dieser Formel lassen sich Werte für die Hilbertfunktion für vorgegebene kleine N relativ einfach berechnen.

Als Hilbertreihe von $R' := S/I_{r+1}S$ erhält Galligo in [23] folgenden Ausdruck:

<u>Satz 4</u>: $F(R') = (1-t)^{-M} \det (D_{ij}(t))$

$$\text{mit } D_{ij}(t) = \sum_{s=\emptyset}^{m-j} \binom{m-i}{s+j-1}\binom{d-j}{s} \cdot t^s \qquad i,j=1,\dots,r$$

und $M = \dim R' = r(d+m-r)$.

Zum Beweis vgl. [23, Thm. 2].

Daraus berechnet sich der Grad zu

$$e(R') = \det (D_{ij}(1)) = \det \left\| \binom{m+d-i-j}{m-j} \right\|$$

$$= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq r} (j-i)}{(m-1)!\dots(m-r)!} \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{(m+d-r-i)!}{(d-i)!}$$

als verallgemeinerte van-der-Mondesche Determinante.

Folgerung:

$$e(R') = \prod_{i=1}^{r} \frac{(m+d-r-i)!\,(r-i)!}{(m-i)!\,(d-i)!}$$

Weitere Zeilenumformungen der Matrix $(D_{ij}(t))$ liefern

$$D'_{ij}(t) = \sum_{s=0}^{m-i-j+1} \binom{m-i}{s+j-1}\binom{d-j}{s}\, t^s$$

mit $\det (D_{ij}(t)) = \det (D'_{ij}(t))$. Daraus kann man den Grad dieser rationalen Funktion berechnen.

Satz 5: Für die Castelnuovoregularität gilt

$$\operatorname{reg}(S/I_{r+1}S) = \text{rat.deg} \det(D'_{ij}(t)) = r(\min(d,m)-r).$$

Beweis: Aus Symmetriegründen sei o.B.d.A. $m \leq d$. Wegen (1.5) brauchen wir nur die zweite Gleichung zu beweisen. Dabei ist nur zu zeigen, daß der Koeffizient vor $t^{r(m-r)}$ in $\det(D'_{ij}(t))$ nicht verschwindet. Dieser ist gleich $\det(A_{ij})$ mit $A_{ij} = \binom{d-j}{m-i-j+1}$. Eine weitere Spaltenumformung von (A_{ij}) liefert die verallgemeinerte van-der-Mondesche Matrix $\left\| \binom{d-j}{m-i} \right\|$, deren Determinante verschieden Null ist. #

Korollar: S/I_{r+1} ist extremal Cohen-Macaulay genau dann, wenn $r = \min(d,m)-1$ gilt und im Fall $d=m$ extremal Gorenstein genau für $r=d-2$.

6.5. Pfaffianideale

Sei $X=(x_{ij})$ $i,j=1,\ldots,n$ eine schiefsymmetrische Matrix von Unbestimmten, d.h. $x_{ii}=0$ und $x_{ij}=-x_{ji}$.

Auf $S=k[X]$ kann man eine Hodgealgebrastruktur einführen, die als Standardmonome gewisse Produkte von Unterpfaffianen von X benutzt. Bezeichne dazu $[i_1 \ldots i_{2r}]$ den Pfaffian der Matrix, die aus den Zeilen und Spalten $i_1 < \ldots < i_{2r}$ von X besteht. Sei

$$Pf(n) := \{[i_1 \ldots i_{2r}] : 1 \leq i_1 \ldots i_{2r} \leq n\}$$

dazu eine halbgeordnete Menge mit der Ordnung

$$[i_1 \ldots i_{2r}] \leq [j_1 \ldots j_{2s}] :\Leftrightarrow r \geq s \text{ und } i_k \leq j_k \text{ für alle } k \leq 2s$$

und $l([j_1 \ldots j_{2s}]) := s$. Nach [15] ist S eine gewöhnliche Hodgealgebra über $Pf(n)$. Als distributiver Verband läßt sich $Pf(n)$ als $J(Q)$ darstellen, wobei Q aus den vereinigungsirreduziblen Elementen von $Pf(n)$ besteht. Dies sind gerade die Elemente $(n' := 2[n/2])$

$$(a,b) := [1 \ldots a, (n-b+1) \ldots n] \text{ mit } a < n',\ a+b < n,\ a+b \text{ gerade}$$

sowie

$)a,b(:= [1\dots a,(n-b)\dots(n-1)]$ mit $b \geqslant 1$, $a+b < n-1$, $a+b$ gerade, wie man leicht nachprüft. Dabei gilt $l((a,b)) = l()a,b() = (a+b)/2$. Q ist also isomorph zu einem schiefen Ferrersdiagramm $F(n)$, vgl. Bild 7.

$$
\begin{array}{cccccc}
(5,1) & (4,2) & (3,3) & (2,4) & (1,5) & (\emptyset,6) \\
 & (4,\emptyset) &)3,1(&)2,2(&)1,3(&)\emptyset,4(\\
 & & (3,1) & (2,2) & (1,3) & (\emptyset,4) \\
 & & & (2,\emptyset) &)1,1(&)\emptyset,2(\\
 & & & & (1,1) & (\emptyset,2)
\end{array}
$$

Bild 7: $Pf(7)=J(Q)$ mit $Q \xrightarrow{\sim} F(7)$

Allgemein besteht $F(n)$ aus $(n-2)$ Zeilen der Länge $(n-1),\dots,2$ entsprechend.
Sei $I(c)$ das Ideal in S, das von allen $(2c+2)$-Pfaffianen von X erzeugt wird und $R(c) := S/I(c)$. Nach (2.3) ist $R(c)$ wieder ein Streckungsring über

$$Pf(2c,n) := \{q \in Pf(n) : q \geqslant [1\dots 2c]\} = J(Q(2c))$$

mit $Q(2c,n) := \{q \vee [1\dots 2c] : q \in Q\} = \{(a,b)^{\vee},)a,b(^{\vee} : a < 2c\}$ als der Menge der vereinigungsirreduziblen Elemente aus $Pf(2c,n)$. $^{\vee}$ bedeutet hier, daß die Vereinigung mit $[1\dots 2c]$ zu nehmen ist. Insbesondere gilt also $l((a,b)^{\vee}) = l()a,b(^{\vee}) = \min((a+b)/2, c)$. Das zugehörige Ferrersdiagramm $F(2c,n)$ besteht aus den letzten $2c$ Spalten von $F(n)$. Dies liefert

<u>Satz 1</u>: $\dim R(c) = |Q(2c)| = c(2n-2c-1)$

$\mathrm{ht}(I(c)) = 1/2(n-2c-1)(n-2c)$

in Übereinstimmung mit [37]. Da $Q(2c)$ eine Rangfunktion besitzt, schließen wir ebenfalls, daß $R(c)$ als Integritätsbereich Gorenstein sein muß, vgl. (1.4.(7)).

Zur Berechnung der Hilbertfunktion benutzen wir wieder die Korrespondenz zwischen den Multiketten $p_1 \leqslant \dots \leqslant p_m$ aus $Pf(2c,n)$ und den monotonen Abbildungen $s : F(2c,n) \dashrightarrow \{\emptyset,1,\dots,m\}$. Ist P_d das p_d entsprechende Ordnungideal in $Pf(2c,n)$, so gilt $p_d = \vee\{q \in P_d\}$, also $l(p_d) = \min\{l(q) : q \in P_d\} = \min(c,[(k_d+1)/2])$, wobei k_d die Nummer der ersten Zeile (von unten gezählt) ist, in der ein $q \in P_d$ vorkommt. Identifiziert man die Abbildung s mit dem entsprechenden Tableau des Formats $F(2c,n)$, so ist dies gerade die erste Zeile, in der eine Zahl kleiner d vorkommt. Da s monoton wachsende Zeilen und Spalten hat, braucht man dafür nur den linken Rand des Tableaus zu betrachten. Sei $F(2c,n)'$ das um 180° gedrehte Diagramm $F(2c,n)$ mit noch einem zusätzlichen Kästchen, in dem wir die Zahl m vermerken.

```
                                                9
                                                ↑
Ø  1  1  1             9                        9->9
1  2  3  4             7  6                     7  6  2
2  2  3  4             6  5  2                  6  5  2->2
   2  5  6             4  3  2  2               4  3  2  2
      6  7             4  3  2  1               4  3  2  1
                       1  1  1  Ø               1  1  1  Ø
```

Bild 8:
s:F(4,7)-->{Ø..9}

Bild 9:
s:F(4,7)'-->{Ø..9}

Bild 1Ø:
s:F(4,7)"-->{Ø..9}

Dann überzeugt man sich analog (6.4., Satz 1), daß

$$\sum l(p_d)=\sum_{i=0}^{c-1} s(2i+1,2i+1)$$

gilt. Diesmal haben wir also nur die "Hälfte" der Diagonale des Tableaus vom Format $F(2c,n)'$ aufzusummieren.

<u>Satz 2</u>: Die Hilbertfunktion $H(2c,N)$ des Ideals der $(2c+2)$-Minore einer generischen schiefsymmetrischen n-reihigen Matrix ist gleich der Zahl der monotonen Abbildungen

$$s:F(2c,n)' \dashrightarrow \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{i=0}^{c-1} s(2i+1,2i+1) = N.$$

Dasselbe Resultat wird in [37] auf anderem Wege bewiesen. Fügen wir wie in [37] zu $F(2c,n)'$ noch eine Diagonale hinzu, in der wir in den Feldern $(2i+1,2i)$ und $(2i+2,2i+1)$ das Element $s(2i+1,2i+1)$ vermerken. Das neue Tableau sei $F(2c,n)''$ (Bild 1Ø). Satz 2 ergibt dann

<u>Korollar</u>: $H(2c,N) = \sum N(u_1,u_1,\dots,u_c,u_c;n)$

wobei über alle Partitionen $u_1 \geq \dots \geq u_c \geq 0$ der Zahl N zu summieren ist.

Teil 7: Beschreibung des Programmpakets 'CA' zur kommutativen Algebra

7.1. Allgemeines

Das Programmpaket ist als Quelltextprogramm in Turbo-PASCAL zugänglich und für eine Anwendung am PC 1715 o.ä. Geräten geeignet. Um trotz des geringen Speicherplatzangebots des genannten Geräts sinnvolle Rechnungen ausführen zu können, mußte darauf verzichtet werden, alle verfügbaren Prozeduren in einem Rahmenprogramm zusammenzufassen. Statt dessen kann der Anwender aus einigen Grundmoduln ein eigenes Programm zusammenstellen, um entsprechend seinen konkreten Interessen den vorhandenen Speicherplatz optimal auszunutzen. Dabei besteht die Möglichkeit, auch gewisse Anwendermoduln in den Programmaufbau einzubeziehen, die häufig benötigte Prozeduren wie etwa die Initialisierung oder Ein- und Ausgaberoutinen für Polynomideale organisieren. Außerdem stehen vier fertige Serviceprogramme zur Verfügung:

POLYNOM - zum Rechnen mit einzelnen Polynomen,

AUSWERT - zur Auswertung von Protokollen, die im Rahmen einer Sitzung mit anderen Programmen angefertigt wurden,

IDEAL - für einfache Idealoperationen (Addition, Multiplikation),

SYZYGIE - zur Berechnung (auch höherer) Syzygienmoduln.

Entsprechend konkreten Anwenderwünschen können verschiedene Zahlbereiche als Koeffizientenkörper für das Rechnen mit Polynomen geladen werden. Zur Zeit stehen zur Verfügung:

REALZAHL.INC - reelle Zahlen,

RATZAHL.INC - eine rationale Arithmetik mit maximal 40-stelligen Zahlen (eine Adaption eines entsprechenden Moduls von H. Grassmann (HU Berlin)).

Dabei ist zu beachten, daß reelle Koeffizienten zwar weniger Speicherplatz benötigen, aber auf Grund der Rechenungenauigkeit Ergebnisse verfälscht werden können.

Schließlich sei noch bemerkt, daß zur effektiven Speicherplatzausnutzung alle Polynome, Ideale (=Polynomlisten) u.a. als dynamische Parameter realisiert sind. Dies ermöglicht dem Anwender, den Speicherplatz selbst zu verwalten, also etwa nicht benötigte Polynome oder Ideale wieder zu löschen und den Speicherplatz neu zu verwenden. Es empfiehlt sich, dies sofort dann zu tun, wenn eine Größe im weiteren nicht mehr benötigt wird.

Die Ein- bzw. Ausgabe von Polynomen erfolgt als Textzeile über Tastatur oder von einem Textfile über die Prozedur "liespol" in der Form

±(Koeff.)x^ay^b + ...

wobei Koeffizienten gleich ±1 allein durch das Vorzeichen eingegeben werden können und Exponenten gleich 1 nicht eingegeben werden müssen. Bei Syntaxfehlern wird die Textzeile ab dem fehlerhaften Zeichen ausgegeben, die Eingabe gelöscht und eine BOOLEAN-Größe auf TRUE gesetzt.

7.2. Beschreibung der Grundmoduln

KOPF.INC : Dieser Modul enthält einige grundlegende Vereinbarungen und Prozeduren. Insbesondere

- elen = maximale Länge einer Eingabezeile,
- texlen = maximale Länge einer Ausgabezeile,
- varmax = maximale Anzahl von Variablen,
- matmax = maximale Zeilenzahl bei der Ausgabe einer Matrix.

ARITHPOL.INC : Dieser Modul enthält Operationen für Polynome. Ein Polynom (Typbezeichnung POLYNOM) ist intern als eine dynamische Pointerliste von Monomen dargestellt. Diese bestehen aus dem Koeffizienten und dem Exponentenvektor. Dabei werden die Monome entsprechend der graduiert lexikographischen Ordnung bzgl. einer einzugebenden Gradfunktion geordnet. Als Gradvektor kann ein beliebiger Vektor reeller Zahlen gewählt werden. Insbesondere haben beim Gradvektor Null alle Monome denselben Grad und die Ordnung erfolgt nur lexikographisch. Nach (2.5) kann man bei entsprechender Wahl der Gradfunktion so alle möglichen Streckungsringstrukturen eines gegebenen Rings konstruieren.

Um Rechnungen abzukürzen, besteht die Möglichkeit, eine

Gradschranke einzugeben, oberhalb der Monome vernachlässigt werden. Dabei beachte man, daß eine solche Schranke im wesentlichen nur für homogene Ideale sinnvoll ist, da sonst möglicherweise mit falschen Leitmonomen gerechnet wird.

VEKTOR.INC : Dieser Modul ist ein Erweiterungsmodul von ARITHPOL.INC für das Rechnen mit Polynomvektoren. Polynomvektoren sind ebenfalls unter der Typbezeichnung POLYNOM implementiert, jedoch wird die nullte Komponente des Exponenten genutzt, um zu speichern, in welcher Komponente des Vektors das entsprechende Monom vorkommt. Diese Komponente trägt intern den Variablennamen '!'.

MATRIX.INC : Dieser Modul enthält Prozeduren zur Ein- und Ausgabe von Matrizen (Typbezeichnung LISTE), die als Listen von Polynomvektoren organisiert sind.

IDEALBAS.INC : Dieser Modul enthält Ein- und Ausgaberoutinen für Ideale und einfache Idealoperationen. Ideale sind dabei als dynamische Listen von Polynomen (Typbezeichnung LISTE) organisiert.

Insbesondere stehen folgende Prozeduren zur Verfügung:

baskompakt	- zum Kompaktifizieren der Polynome einer Idealbasis etwa nach Wechsel der Monomordnung.
liesbasis	- Einlesen einer Idealbasis über Tastatur (Abschluß erfolgt durch eine leere Eingabe).
redukt	- ersetzt in einem Polynom alle Nichtstandardmonome durch ihre Streckungsformeln entsprechend einer gegebenen (Gröbner)basis.
basred	- reduziert eine Basis und ersetzt in den Basispolynomen Nichtstandardmonome (Diese Prozedur, angewandt auf lineare Funktionale, entspricht in ihrer Wirkung dem Gaussalgorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme).
addideal	- Idealaddition.
multideal	- Idealmultiplikation.

GROEBNER.INC : Dieser Modul enthält den Gröbnerbasisalgorithmus ohne Protokoll der Syzygien. Dazu ist die Liftbarkeit aller Monomidealsyzygien des diskreten Streckungsrings zu solchen des Ausgangsrings entsprechend (2.2., Satz 3) zu prüfen. Die Taylorauflösung aus Teil 4 liefert eine Basis der Monomidealsyzygien. Allerdings sind dabei noch einige Syzygien überflüssig. Im Programm werden alle diejenigen ersten Syzygien der Taylorauflösung nicht untersucht, die sich aus anderen Syzygien kombinieren lassen, wobei "spätere" (im Sinne der lexikographischen Ordnung der Paare, die im Teil 4 erste Syzygien beschreiben) Syzygien mit einem nicht konstanten Faktor auftreten. Die Ausgangsbasis wird im Laufe des Algorithmus ständig reduziert.

GROEBSYZ.INC : Dieser Modul enthält den Gröbnerbasisalgorithmus mit Protokoll der Syzygien. Dabei wird die Ausgangsbasis unverändert gelassen. Wenn diese weit von der zu erwartenden Gröbnerbasis entfernt ist, empfiehlt sich deshalb die vorherige Anwendung von GROEBNER. Die Syzygien sind als Listen von Polynomvektoren organisiert (Typbezeichnung LISTE). Es wird eine Reduktionsliste erstellt, auf deren Grundlage man die neuen Gröbnerbasiselemente aus dem Syzygienmodul wieder entfernen und damit den vollen Syzygienmodul der Ausgangsbasis konstruieren kann.

Eine Anwendung derselben Prozedur auf diese Syzygienliste liefert eine Basis des zweiten Syzygienmoduls usw.

Eine weitere Prozedur erlaubt es, solche möglicherweise nicht minimalen Auflösungen zu minimieren.

ELIMINAT.INC : Dieser Modul enthält eine Prozedur zur Berechnung von Eliminationsidealen auf der Basis von GROEBNER.

7.3. Beschreibung der Anwendermoduln

Anwendermoduln sind Moduln vom Typ *.PAS, welche Teilstücke des Hauptprogramms CA.PAS enthalten, die oftmals benötigt werden. Sie können als INCLUDE-files oder auch direkt ins Quellfile des Hauptprogramms geladen werden. Das Hauptprogramm ist für das Rechnen mit Idealen ausgelegt, die im Hauptspeicher BAS bzw. in 10 Registern r[1] bis r[10] enthalten sind. Die einzelnen Moduln erfüllen folgende Funktion:

ca0 - enthält die vorhandenen Grundmodulnamen als INCLUDE-files, eine Liste von Variablennamen verschiedenen Typs und Anfang und Ende des Hauptprogramms, wo ein Protokollfile eröffnet bzw. geschlossen und die Variablennamen sowie der Gradvektor initialisiert werden.

Diesen Modul sollte man grundsätzlich kopieren und den konkreten Anforderungen entsprechend erweitern.

cal	-	enthält Prozeduren zur Initialisierung und Abspeicherung von Idealen, Gradvektoren oder Variablennamen.
ausgabe	-	Idealausgabe auf Drucker, Bildschirm oder Diskette.
baskomp	-	kompaktifisiert BAS (etwa nach Wechsel der Ordnung).
basred	-	reduziert BAS.
basadd	-	Addition zweier Register.
basmult	-	Multiplikation zweier Register.
eingabe	-	Idealeingabe von Tastatur oder Diskette.
eliminat	-	Berechnung eines Eliminationsideals von BAS.
groebner	-	Gröbnerbasisalgorithmus für BAS ohne Syzygien.
normal	-	Berechnung der Normalform eines Polynoms bzgl. BAS (etwa für Enthaltenseinstests, wenn BAS eine Gröbnerbasis ist).

7.4. Kurzbeschreibung der wichtigsten Prozeduren

ARITHPOL.INC

addpol	-	Addition und Kompaktifizierung zweier Polynome.
auswahl	-	testet gegebenen Text, ob er ein Variablenname ist.
degdef	-	setzt Gradvektor und Vernachlässigungsschranke für Monome.
erapol	-	Löschen eines Polynoms.
gleich	-	untersucht, ob zwei Monome gleich sind.
grad	-	Berechnung des Grads eines Monoms.
hoch	-	Berechnung von p^n für ein Polynom p.
kgv	-	berechnet das kgV zweier Monome.
kompakt	-	ordnet Monome in einem Polynom graduiert lexikographisch, faßt gleichartige Monome zusammen und unterdrückt Monome mit Nullkoeffizient bzw. einem Grad größer oder gleich der gewählten Gradschranke, wenn eine solche fixiert wurde.
kopy	-	fertigt eine Kopie eines Polynoms an.

lex - bestimmt, welches von zwei Monomen bzgl. der gegebenen Ordnung kleiner ist.

liespol - Einlesen eines Polynoms von einem Textfile f, das auch TRM: sein kann. Geht das Polynom über mehrere Textzeilen, so ist analog SCHRPOL zu verfahren.

minus - Vorzeichenwechsel eines Polynoms.

multm - Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom.

multpol - Multiplikation und Kompaktifizierung von Polynomen

multpz - Multiplikation eines Polynoms mit einer Zahl.

schrpol - Schreiben eines Polynoms auf ein File. Geht das Polynom über mehrere Zeilen, wird jede außer der letzten durch # nach einem Monom abgeschlossen.

subpol - Subtraktion und Kompaktifizierung zweier Polynome.

teilt - untersucht, ob ein Monom ein anderes teilt.

varnamdef - Festlegung von Variablenzahl, -namen und -graden.

varschreib- schreibt die aktuellen Variablennamen und den Gradvektor auf den Bildschirm.

ELIMINAT.INC

eliminationsideal - Berechnung des Eliminationsideals bzgl. einer Menge von Variablen.

GROEBNER.INC

groebner - Berechnung der Gröbnerbasis. Die Ausgangsbasis wird dabei verändert.

GROEBSYZ.INC

eraredlist- löscht eine Reduktionsliste.

groebsyz - Berechnung der Gröbnerbasis mit Protokoll der entsprechenden Syzygien. Die Ausgangsbasis wird dabei nicht verändert und eine Reduktionsliste (Typbezeichnung REDLIST) erstellt.

minimize - Reduktion von Basis und Syzygienmodul entsprechend einer vorgegebenen Reduktionsliste.

minitest - Erstellen einer Reduktionsliste.

reduktsyz - ersetzt in einem Polynom bzgl. einer Basis Nichtstandardmonome durch deren Standardausdrücke und protokolliert die entsprechenden Ersetzungen mit.

IDEALBAS.INC

addideal - Berechnung der Summe zweier Ideale.
baskompakt- kompaktifiziert die einzelnen Basiselemente.
baslen - bestimmt die Zahl der Basiselemente.
baslist - Ausgabe einer Basis auf ein File, insbesondere TRM:, LST:.
basred - ersetzt in einer Basis alle Nichtstandardmonome.
bassave - Abspeichern einer Basis auf einem File.
erabas - Löschen einer Basisliste.
kopyideal - Kopieren einer Basis.
liesbasis - Eingabe einer Basis über Tastatur. Abschluß der Eingabe erfolgt durch eine Leerzeile.
multideal - Berechnung des Produkts zweier Ideale.
redukt - ersetzt in einem Polynom Nichtstandardmonome durch deren Standardausdrücke bzgl. einer gegebenen Basis.
streich - entfernt Nullpolynome aus einer Basis.

KOPF.INC

memend - testet, ob noch mehr als 1500 Doppelbytes frei sind.
pointer - Angabe der Zahl der freien Doppelbytes.
In beiden Prozeduren wird die Turbovariable MEMAVAIL verwendet.

MATRIX.INC

matinit - Einlesen einer Matrix von einem File.
listmatrix- Ausgabe einer Matrix.

VEKTOR.INC

addkomp - Addition eines Polynoms zu einer Komponente eines Vektors.
erakomp - Löschen einer Komponente eines Vektors.
komp - Kopie einer Komponente eines Vektors.

Register

Literaturverzeichnis

[1] Aigner,M.: Combinatorial theory. Springer Verlag, Berlin, 1979.

[2] Apel,J. und Lassner,W.: Computation of reduced Gröbner bases and syzygies in enveloping algebras. Preprint NTZ der KMU Leipzig 685/86.

[3] Apel,J. und Lassner,W.: An extension of Buchberger's algorithm and calculations in enveloping fields of lie algebras. Preprint NTZ der KMU Leipzig 948/86.

[4] Auslander,M. und Bridger,S.: Stable module theory. Memoirs of the AMS 94 (1969).

[5] Backelin,J.: Les anneaux locaux a relations monomiales ont des series de Poincare-Betti rationelles. C.R. Acad. Sci. Paris I, 295 (1982), 607 - 610.

[6] Baclawski,K.: Rings with lexicographic straightening law. Adv. Math. 39 (1981), 185 - 213.

[7] Bayer,D.A.: The division algorithm and the Hilbert scheme. Thesis, Harvard Univ. 1982.

[8] Bourbaki,N.: Algebre commutative, ch. 1 - 7. Zit. nach der russ. Übersetzung, Mir, Moskva 1971.

[9] Buchberger,B.: Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. Aeq. Math. 4 (1970), 374 - 383.

[10] Carlitz,L. und Stanley,R.P.: Branchings and partitions. Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 246 - 249.

[11] Cartan,H. und Eilenberg,S.: Homological algebra. Princeton, 1956.

[12] Clausen,M.: Dominance orders, Capelli operators and straightening of bideterminants. Eur. J. Comb. 5 (1984), 207 - 222.

[13] DeConcini,C., Eisenbud,D. und Procesi,C.: Young diagramms and determinantal varieties. Inv. Math. 56 (1980), 129 - 165.

[14] DeConcini,C., Eisenbud,D. und Procesi,C.: Hodge algebras. Asterisque 91 (1982).

[15] DeConcini,C. und Procesi,C.: A characteristic free approach to invariant theory. Adv. Math. 21 (1976), 330 - 354.

[16] Doubilet,P., Rota,G.-C. und Stein,J.: On the foundations of combinatorial theory IX: Combinatorial methods in invariant theory. Studies Appl. Math. 53 (1974), 185 - 216.

[17] Eagon,J.A. und Northcott,D.G.: Ideals defined by matrices and a certain complex associated to them. Proc. Roy. Soc. London A 269 (1962), 188 - 204.

[18] Eisenbud,D.: Introduction to algebras with straightening law. In Ring theory and algebra III. Lecture Notes in Pure Appl. Math. 55 (1980), 243 - 268.

[19] Eisenbud,D. und Goto,S.: Linear free resolutions and minimal multiplicity. J. Alg. 88 (1984), 89 - 133.

[20] Elkik,R.: Singularites rationelles et deformations. Inv. Math. 47 (1978), 139 - 147.

[21] Flenner,H.: Rationale quasihomogene Singularitäten. Archiv Math. 36 (1981), 35 - 44.

[22] Foxby,H.-B.: A homological theory of complexes of modules. Preprint, Kopenhagen Univ. 19.1981.

[23] Galligo,A.: Computations of some Hilbert functions related with Schubert calculus. Lecture Notes in Math. 1124 (1985), 79 - 97.

[24] Hochster,M.: Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes. Ann. Math. 96 (1972), 318 - 337.

[25] Gelbart,S.: Problem 5854. Amer. Math. Monthly 79 (1972), 523 und 80 (1973), 819 - 820.

[26] Godement,R.: Topologie algebrique et theorie des fasceaux. Hermann, Paris 1958.

[27] Goto,S. und Watanabe,K.: On graded rings II. Tokyo J. Math. 1 (1978), 237 - 261.

[28] Gräbe,H.-G.: On the resolution for monomial curves. Erscheint demnächst.

[29] Gräbe,H.-G.: Der Stanley-Reisner-Ring eines simplizialen Komplexes. Dissertation, MLU Halle/S. 1982.

[30] Gräbe,H.-G.: Resolving algebras with straightening law. Erscheint demnächst.

[31] Grothendieck,A. Local cohomology. Lecture Notes in Math. 41 (1967).

[32] Herzog,B.: Local singularities such that all deformations are tangentially flat. Preprint, FSU Jena N/87/20.

[33] Herzog,B.: Classical projective varieties having affine cones with only tangentially flat deformations. Preprint, FSU Jena N/88/4.

[34] Hibi,T.: Every affine graded ring has a Hodge algebra structure. Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino 44 (1986), 277 - 286.

[35] Hibi,T.: Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets. Erscheint demnächst.

[36] Hodge,W.D. und Pedoe,D.: Methods of algebraic geometry. Cambridge Univ. Press 1968.

[37] Kleppe,H. und Laksov,D.: The algebraic structure and deformation of Pfaffian schemes. J. Alg. 64 (1980), 167 - 189.

[38] Matsumura,H.: Commutative algebra. Benjamin. New York, 1970.

[39] MacDonald,I.G.: Symmetric functions and Hall polynomials. Clarendon Press, Oxford, 1979.

[40] Mayr,E. und Meyer,A.: The complexity of the word problem for commutative semigroups and polynomial rings. Adv. Math. 46 (1982), 305 - 329.

[41] Möller,H.-M. und Mora,M.: New constructive methods in classial ideal theory. J.Alg. 100 (1986), 138 - 178.

[42] Möller,H.-M.: A reduction strategy for the Taylor resolution. In: Proc. EUROCAL-85, Lecture Notes in Comp. Sci. 204 (1985), 526 - 534.

[43] Möller,H.-M. und Mora,M.: Upper and lower bounds for the degree of Gröbner bases. In: Proc. EUROSAM-84, Lecture Notes in Comp. Sci. 174 (1984), 172 - 183.

[44] Möller,H.-M. und Mora,M.: Computational aspects of reduction strategies to construct resolutions of monomial ideals. In: Proc. AAECC-2 at Toulouse. Lecture Notes in Comp. Sci. 228 (1986), 182 - 197.

[45] Mora,F. und Robbiano,L.: The Gröbner fan of an ideal. Preprint. Univ. Genua 1987.

[46] Mumford,D.: Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton, Univ. Press, 1966.

[47] Pesselhoy,J. und Riemenschneider,O.: Projective resolutions of Hodge algebras: Some examples. In: Singularities. Proc. Conf. Arcata 1981. Proc. Symposia in Pure Math. 40 (1983), Teil 2, 305 - 317.

[48] Renschuch,B.: Elementare und praktische Idealtheorie. MfL Bd. 16, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1976.

[49] Riordan,J.: Combinatorial identities. Wiley, New York, 1968.

[50] Schenzel,P.: Freie Auflösungen extremaler Cohen-Macaulay-Ringe. J. Alg. 64 (1980), 93 - 101.

[51] Schenzel,P.: Dualisierende Komplexe ind der lokalen Algebra und Buchsbaumringe. Lecture Notes in Math. 907 (1982).

[52] Sjödin,G.: On filtered modules and their associated graded modules. Math. Scand. 33 (1973), 229 - 249.

[53] Stanley,R.P.: The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings. Studies in Appl. Math. 54.2, (1975), 135 - 142.

[54] Schäfer,U.: Affine Halbgruppenringe. Dissertation, MLU Halle/S., 1987.

[55] Stanley,R.P.: Hilbert functions and graded algebras. Adv. Math. 28 (1978), 57 - 83.

[56] Stanley,R.P.:Combinatorics and commutative algebra. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[57] Stanley,R.P.: Some combinatorial aspects of the Schubert calculus. In: Combinatoire et representation du groupe symetrique, Strasbourg 1976, Lecture Notes in Math. 579 (1976), 217 - 251.

[58] Taylor,D.: Ideals generated by monomials in an R-sequence Thesis, Univ. of Chicago, 1960.

[59] Watanabe,K.-I.: Study of algebras with straightening law of dimension two. NIT Seminar Reports 13.1985.

[60] Winkler,F.: On the complexity of the Gröbner-Bases algorithm over k[x,y,z]. In: Proc. EUROSM-84, Lecture Notes in Comp. Sci. 174 (1984), 184 - 194.

[61] Winkler,F., Buchberger,B., Lichtenberger,F. und Rolletschek,H.: An algorithm for constructing canonical bases of polynomial ideals. ACM Trans. Math. Software 11 (1985), 66 - 78.

[62] Zariski,O. und Samuel,P.: Commutative algebra II. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.

E r k l ä r u n g

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Erfurt, 15. 4. 1988

Hans-Gert Gräbe

Dr. Gräbe, Hans-Gert

Pädagogische Hochschule
" Dr. Theodor Neubauer "
Erfurt/Mühlhausen
Sektion Mathematik/Physik

Thesen zur Dissertation B

Streckungsringe

1. Die Idealtheorie stellt für Ideale aus homogene Polynomen ein wesentlich reichhaltigeres Instrumentarium zur Verfügung als für inhomogene Polynomideale. Das liegt daran, daß die homogenen Polynome in $x_1,\dots,x_n$ über einem Körper einen Ring bilden, der ein einzigen maximales homogenes Ideal besitzt, also H-lokal ist.

2. Um die homogenen Methoden auf inhomogene Ideale anzuwenden, betrachtet man zusammen mit einem Ideal auch das durch die Leitformen aller Polynome dieses Ideals erzeugte Ideal, das <u>assoziierte graduierte Ideal</u>. Viele Eigenschaften dieses Ideals übertragen sich auf das Ausgangsideal, so daß man generell sagen kann: Das Ausgangsideal ist nie "schlechter" als sein zugehöriges assoziiertes Ideal.

3. Im Zusammenhang mit der Untersuchung der Hilbertfunktion betrachtete etwa F.S.Macaulay schon 1927 nicht nur Leitformen, sondern auch Leitmonome von Polynomen bzgl. geeigneter Ordnungen, da man für Monomideale die Hilbertfunktion leicht berechnen kann.

4. Durch breiten Einsatz von Komputern nahm das Interesse an algorithmischen Fragestellungen in der Mathematik und auch in der kommutativen Algebra stark zu. Wegen ihrer Multihomogenität sind Monomideale für algorithmische Verfahren besser geeignet als Formenideale. Oft werden Verfahren, die für Formenideale unendlich sind, für Monomideale endlich. Die Ursache liegt darin, daß nur endlich viele multihomogene Primideale existieren. Dies sind genau die durch Folgen von Unbestimmten erzeugten Ideale.

5. In seiner Dissertation führt B. Buchberger 1966 den Begriff der Gröbnerbasis ein. Das ist eine (nicht unbedingt minimale) Idealbasis, für dessen Elemente die Leitmonome eine Basis des Leitideals bilden. Über einen endlichen Algorithmus, dessen rechnerische Komplexität nur vom Eingangsideal und der gewählten Ordnung auf den Monomen abhängt, kann man aus einer gegebenen Idealbasis stets eine solche Gröbnerbasis berechnen.

6. Bei diesem Algorithmus fällt als Nebenprodukt der erste Syzygienmodul des Ausgangsideals ab. Der Algorithmus gestattet es also, in den meisten Fällen für konkrete Beispielideale effektiver als vorher Syzygien zu berechnen. Diese bilden die Grundlage für die Antwort auf viele Fragen der Idealtheorie.

7. Parallel dazu führten DeConcini, Eisenbud und Procesi in Verallgemeinerung von Untersuchungen über Determinantenideale den Begriff der Hodgealgebra ein. Auch diese verbinden ein zu untersuchendes Ideal mit einem Monomideal.

8. Wir betrachten folgende Verallgemeinerung dieser Konstruktionen: Sei $S = k[x_v : v \in H]$ der Polynomring in den Unbestimmten x_v, $v \in H$, über einem Körper k, $I \subseteq S$ ein Ideal und $R = S/I$ der Faktorring. Sei weiter

1. $\Sigma \subseteq N^H$ ein Monomideal (x^a, $a \notin \Sigma$ heiße Standardmonom),
2. $<$ eine monotone, noethersche (vgl. These 12) Ordnung auf der Menge N^H der Monome.
3. Die Standardmonome x^a, $a \notin \Sigma$, mögen eine k-Vektorraumbasis von R bilden.

4. Für ein Nichtstandardmonom x^a, $a \in \Sigma$, mögen in der eindeutigen Darstellung in R durch Standardmonome

$$x^a = \sum r_{ab} x^b,$$

der Streckungsformel von x^a, nur Monome x^b mit $b<a$ wirklich vorkommen.

Eine solche Struktur auf R nennen wir eine Streckungsringstruktur über Σ, H und k.

Ersetzt man die Streckungsformeln durch Null, so entsteht ein neuer Streckungsring $R_\emptyset = S/I_\emptyset$ über Σ, H und k, der zu R assoziierte diskrete Streckungsring. $I_\emptyset$ ist das Ideal der Leitmonome von I.

10. Wenn die Ordnung < linear ist, definieren die Streckungsformeln von x^a, a aus einer Basis von Σ, eine Gröbnerbasis von I. Man kann also für jedes Ideal eine Streckungsringstruktur angeben.

11. Graduierte gewöhnliche Hodgealgebren im Sinne von DeConcini, Eisenbud und Procesi sind genau die Streckungsringe über einer Halbordnung H mit $\Sigma = M(H)$ als dem Monomideal der Nichtmultiketten aus H und < als der graduiert lexikographischen Ordnung.

12. Noethersche Ordnungen sind Ordnungen ohne unendliche echt absteigende Ketten in Intervallen. Verschiedene monotone noethersche Ordnungen können dieselbe Streckungsringstruktur liefern. Insbesondere:

a) Jede solche Ordnung kann zu einer monotonen noetherschen linearen Ordnung fortgesetzt werden. Man kann also stets Gröbnerbasistechniken anwenden.

b) Zu einer gegebenen Streckungsringstruktur läßt sich eine Ordnung finden, deren Kegel positiver Elemente abgeschlossen ist.

c) Man kann eine gegebene Streckungsringstruktur stets durch eine graduiert lexikographische Ordnung bzgl. eines geeigneten Gradvektors $t \in N_+^H$ realisieren.

13. Sei R=S/I ein Streckungsring über Σ, H und k und $t \in N_+^H$ ein Gradvektor, der eine graduiert lexikographische Ordnung definiert, die die gegebene Streckungsringstruktur liefert. Dann kann man die Streckungsrelationen so abändern, daß ein Streckungsring $R(t)=S[t]/I(t)$ über Σ, H und k[t] entsteht, für welchen $R(1) \cong R$ und $R(\emptyset) \cong R_\emptyset$ gilt. Ein

solcher Gradvektor definiert also eine Deformation von R in R_g über A^1.

14. Der diskrete Streckungsring ist dem in These 2 erwähnten assoziierten graduierten Ring ähnlich. Von diesem lassen sich Invarianten und Eigenschaften auf den Ausgangsring unter Verwendung einer Spektralsequenz für Z-gefilterte Moduln übertragen. Zur Untersuchung von Streckungsringen benötigt man eine Theorie Z^H-gefilterter Moduln und eine geeignete Modifikation der Spektralsequenztechnik. Nach Schaffung dieser Grundlagen kann man ähnliche Resultate wie für assoziierte graduierte Ringe auch für Streckungsringe herleiten und zeigen: Der Streckungsring ist im allgemeinen nicht schlechter als der zugehörige diskrete Streckungsring.

15. Dies gilt insbesondere für eine Reihe von Eigenschaften und Invarianten, für die dies schon bekannt war: die Tiefe, die Dimension, die Multiplizität, die Bettizahlen einer minimalen freien Auflösung von R über S, die Cohen-Macaulay-Eigenschaft, den Typ, die Gorensteineigenschaft.

16. Dies gilt aber auch für allgemeinere Invarianten und Eigenschaften von Moduln über R, wenn man den zugehörigen "diskreten" Modul geeignet definiert: die flache Dimension, die projektive Dimension, die injektive Dimension, die Perfektheit.

17. Dies gilt auch für eine Reihe neuer Eigenschaften und Invarianten des Streckungsrings selbst, die sich insbesondere aus der Betrachtung des kanonischen Moduls ergeben: die verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Eigenschaft, die Serreeigenschaften (S_n), die G-Dimension, die Poincaréreihe.

18. Für isolierte Cohen-Macaulay-Singularitäten kann man auf deren Rationalität schließen, wenn man die Hilbertfunktion des Koordinatenringes kennt. Diese läßt sich aus dem zugehörigen diskreten Streckungsring leicht berechnen. Man erhält so ein handhabbares Rationalitätskriterium.

19. Mit der Existenz der Deformation aus These 13 steht die Frage, ob weitergehend in obigen Ergebnissen auch eine Deformation zwischen den eingehenden Größen existiert. Aus Bayers Thesis (Harvard Univ. 1983) weiß man, daß eine