PED. EX.

ÜBER DEN STANLEY - REISNER - RING EINES SIMPLIZIALEN KOMPLEXES

Der Fakultät für Naturwissenschaften des Wissenschaftlichen Rates der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg

als Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades Dr.rer.nat.

vorgelegt

von

Hans-Gert Gräbe

geboren am 23.11.1955 in Adorf/V.

Oktober 1982

0. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der Stanley-Reisner-Ring eines simplizialen Komplexes Δ untersucht (Definitionen vgl. §§ 1 und 2). Die Einführung dieses Ringes geht im Wesentlichen auf Hochster und Stanley zurück. Sie bietet die Möglichkeit, den großen technischen Apparat der homologischen Algebra auf Fragen der algebraischen Topologie anzuwenden. Dies stellt ein Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit dar.

Die ersten drei Kapitel sind dem Zusammentragen der notwendigen Fakten und Definitionen gewidmet. Neben Beispielen (2.2.), elementaren Eigenschaften (2.3.) einschließlich der Primärzerlegung von Stanley-Reisner-Ringen und einer Mayer-Vietoris-Sequenz für diese (2.5.) sind die Formeln für deren Hilbert-Poincaré-Reihe und damit verbundener Größen angegeben (3.4.).

Im vierten Kapitel werden zwei Parametersysteme für den Stanley-Reisner-Ring angegeben, eines davon ist linear. Damit kann (prinzipiell) die Frage, ob ein vorgegebener Stanley-Reisner-Ring Cohen-Macaulay ist, numerisch entschieden werden (4.4.).

Im fünften Kapitel werden die lokalen Kohomologiemoduln eines Stanley-Reisner-Ringes auf recht einfache Weise durch topologische Größen (relative simpliziale Kohomologien) beschrieben. Nebenbei fallen das bekannte Cohen-Macaulay-Kriterium (/St;Th.5/,/23;Th.1/) für Stanley-Reisner-Ringe sowie eine Formel für dessen Tiefe (vgl. /21/) und dessen Endlichkeitsdimension ab. Speziell sind diese ~~nur~~ Größen topologische Invarianten.

Im sechsten Kapitel wird der kanonische Modul eines Stanley-Reisner-Ringes beschrieben. Das füllt eine Lücke in den bisherigen Untersuchungen zu diesem Gegenstand. Speziell wird gezeigt, daß man den kanonischen Modul immer als Ideal wählen kann (6.5.) und dieses durch gewisse relative N-Zyklen von Δ beschreiben (N=dim Δ).

Im siebenten Kapitel wenden wir uns einer engeren Klasse von simplizialen Komplexen zu, den Quasimannigfaltigkeiten. Für diese läßt sich der kanonische Modul noch einfacher beschreiben. Speziell ist er für zusammenhängende orientierbare Quasimannigfaltigkeiten Δ isomorph dem Kern der Projektion des Stanley-Reisner-Ringes von Δ auf den des Randes BdΔ (7.5.), vgl. eine Fragestellung in /St/.

Quasimannigfaltigkeiten sind eine natürliche Erweiterung des Begriffs der (endlichen) Triangulierung einer Mannigfaltigkeit. Eine speziellere Erweiterung stellen die Komplexe dar, deren (relative) Homologien mit denen von Mannigfaltigkeiten zusammenfallen. Diese sogenannten Homologiemannigfaltigkeiten (/Sp;58/), h-Mannigfaltigkeiten (/22/) oder einfach Mannigfaltigkeiten (/25/) sind gerade die Buchsbaumquasimannigfaltigkeiten (7.3.).

Eine CM-Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es ihr Rand ist.(9.5.1.) Offen bleibt die Frage, ob bzw. wann der Rand einer Homologiemannigfaltigkeit wieder eine solche ist.

Im achten Kapitel beweisen wir das Gorensteinkriterium von Stanley /St;Th.5/, vgl.auch /31;7.5./.und diskutieren weitere Schlußfolgerungen aus der Gorensteineigenschaft.

Kapitel 9 - 11 wenden sich speziellen simplizialen Komplexen zu. Im neunten Kapitel wird der Join zweier Komplexe untersucht. Es zeigt sich, daß jeder Join, der Buchsbaum ist, bereits Cohen-Macaulay sein muß. Daraus ergibt sich als Beispiel ein Stanley-Reisner-Ring, der über Körpern einer Charakteristik verschieden 2 Cohen-Macaulay ist und über Körpern der Charakteristik 2 nicht Buchsbaum. Außerdem wird eine Klasse von Ringen angegeben, deren lokale Kohomologiemoduln gerade an den Stellen t und d bei vorgegebenem $1 \le t < d$ nicht verschwinden (9.5.).

Im zehnten Kapitel sind einige Ergebnisse für färbbare Komplexe angeführt, die im Wesentlichen auf Baclawski zurückgehen. Diese Klasse simplizialer Komplexe schließt Komplexe über (endlichen) teilweise geordneten Mengen ein. Hier besteht ein weiteres Anwendungsfeld der Stanley-Reisner-Ringe (vgl. Arbeiten von Baclawski, Björner, Stanley u.a.).

Im elften Kapitel werden die bekannten Ergebnisse für schälbare und konstruierbare Komplexe zusammengetragen (vgl. /St;35/), die Mayer-Vietoris-Sequenz (2.5.) auf Buchsbaum- bzw. Cohen-Macaulay-Komplexe angewandt (11.2.) sowie der Stanley-Reisner-Ring von Skelett, Selektion und Außenrand eines simplizialen Komplexes untersucht (11.3.-5.). Das Kapitel schließt ab mit einer Diskussion der Fälle kleiner Dimension (≤ 1).

Im zwölften Kapitel werden noch einige Fragestellungen erörtert, die nur am Rande der vorliegenden Arbeit liegen, trotzdem aber von gewissem Interesse sind. Das ist einmal die in /11/ gegebene Beschreibung der Homologien des Koszulkomplexes eines Stanley-Reisner-Ringes (12.1.), zum anderen die Frage der Charakterisierung der möglichen f-Vektoren eines simplizialen Komplexes (12.2.), der der h-Vektoren eines Cohen-Macaulay-Komplexes (12.3.) und der h-Vektoren eines konvexen simplizialen Polytops bzw. allgemeiner eines Gorensteinkomplexes (12.4.).

Insgesamt besteht das Ziel der Arbeit darin, den Stanley-Reisner-Ring eines simplizialen Komplexes zu beschreiben und damit verbunden dessen Anwendung auf Fragestellungen der algebraischen Topologie. Daneben stellt die vorliegende Arbeit der homologischen Algebra Beispielmaterial zur Verfügung, an dem sich diese oder jene allgemeinere Vermutung testen läßt. Etwas unbefriedigend, vom homologisch-algebraischen Standpunkt gesehen, wird der klassische Fall $k=\mathbb{Z}$ behandelt, jedoch fehlt hierfür eine entwickelte Theorie der homologischen Algebra für den nichtlokalen graduierten Fall.(zumindest ist mir keine solche bekannt).

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Theorie der Streckungsringe (vgl. /3/ u.a.) die Untersuchung allgemeinerer Ringe (etwa von Determinantenidealen) auf die Untersuchung von Stanley-Reisner-Ringen über teilweise geordneten Mengen zurückführt.

Ich möchte es nicht versäumen, an dieser Stelle all denen zu danken, die in mir das Interesse an der Mathematik geweckt, entwickelt und erhalten haben und das Entstehen der vorliegenden Arbeit ermöglichten. Besonders bedanke ich mich bei meinem Mentor Dr.P.Schenzel für die vielen fruchtbaren Diskussionen und Hinweise zum Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Bezeichnungen

1. der Ergebnisse

Theorem	=	wesentliches eigenes Ergebnis bzw. Ergebnis anderer Autoren mit einfacherem Beweis
Satz	=	kleines "Theorem" oder Zwischen"theorem"
Proposition	=	(im Wesentlichen) aus der Literatur übernommenes Ergebnis
Lemma	=	Hilfssatz, dessen Beweis angedeutet bzw. geführt wird bzw. wo auf eine Literaturstelle verwiesen ist
Korollar	=	Schlußfolgerung aus einem Theorem oder Satz, stellt meist die Verbindung zu bekannten Resultaten her
$\blacksquare$	=	Beweisende

2. aus der Mengenlehre

$\cup$ - Vereinigung	$/./$ - Kardinalität (bzw. geom.Realis. eines simpl.K.,vgl. (1.1.))
$\dot{\cup}$ - Vereinigung disjunkter M.	$\overline{(.)}$ - Äquivalenzklasse
$\cap$ - Durchschnitt	$\mathbb{N}$ - natürliche Zahlen ($0 \in \mathbb{N}$)
$\setminus$ - Differenzmenge	$\mathbb{Z}$ - ganze Zahlen
$\subseteq$ - Inklusion (einschl. '=')	$[r] := \{1,2,\ldots,r\}$
$\not\subseteq$ - nicht '$\subseteq$'	$\underline{t} := (t_1,t_2,\ldots,t_r)$
$\in$ - Element von	$e_m := (0,\ldots,\underset{m}{1},\ldots,0)$
$\emptyset$ - leere Menge	
^{B} - Potenzmenge	

Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{Z}^V$ ist die komponentenweise teilweise Ordnung, die durch $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ induziert wird. $\mathbb{Z}^V$ betrachten wir dabei als abelsche Gruppe, was $-U \in \mathbb{N}^V \subset \mathbb{Z}^V$ für $U \subset \mathbb{Z}^V$ definiert.

3. aus der Algebra

Sei $a = (a_v) \in \mathbb{Z}^V$ und $\sigma \subset V$. Dann setzen wir

$$x^a := \prod_{v \in V} x_v^{a_v} \qquad\qquad /a/ := \sum_{v \in V} a_v$$

$\sigma) := \sum_{v \in \sigma} e_v \in \mathbb{Z}^V$ $\qquad\qquad$ $x_\sigma := x^{d(\sigma)}$

$a) := \mathrm{Supp}\, x^a = \{ v \in V : a_v \neq 0 \}$ $\qquad$ $n(a) := \{ v \in V : a_v < 0 \}$

rer einen Ring R verstehen wir stets einen noetherschen kommuta-
ven Ring mit $1 \neq 0$. Für einen R-Modul M bezeichnen wir mit

M_p die Lokalisierung von M nach einem Primideal $p \subset R$.

$\dim_k W$ bezeichnet die Dimension des k-Vektorraums W.

rner setzen wir für einen R-Modul M

$\mathrm{Ann}\, M := \{ r \in R : rM = 0 \}$

d für ein Ideal I R

$\mathrm{red}\, I := \{ r \in R : \exists n : r^n \in I \}$

im Text eingeführte

1. $\dim \sigma$	1.2. $a(A,B)$	1.3. $\mathrm{link}_\Delta \sigma$	
$\dim \Delta$	$\tilde{C}_{\cdot}(\Delta)$	$\mathrm{st}_\Delta \sigma$	
$f_i(\Delta)$	$\tilde{C}^{\cdot}(\Delta)$	$\mathrm{cost}_\Delta \sigma$	
$\lvert\Delta\rvert$	$\tilde{H}_{\cdot}(\Delta)$	$\Delta_1 * \Delta_2$	
$\langle \tau \rangle$	$\tilde{H}^{\cdot}(\Delta)$	Δ_U	
$\hat{\tau}$	∂	Δ_a	
	δ	1.5. a^i	
	$\chi(\Delta)$	a_i	
. $S(V)$	2.4. Index M	5.1. C^i	6.3. K_Δ
$I(\Delta)$	3.2. Grad. Moduln	$f_{\sigma\tau}$	6.5. $K(\Delta)$
$\Delta(I)$	3.3. $H(R;t)$	6.1. C_i	7.2. $\mathrm{Sd}\Delta$
$k[\Delta]$	$F(R;t)$	D_i	7.4. $J(\Delta)$
. $A(\sigma)$	$h(R;t)$	10.1. $\Delta(F)$	10.3. Θ_i
$N(\Delta)$	3.5. $H^{\cdot}_{a}(\cdot)$	$P(\Delta)$	
$r(\Delta)$	3.6. depth	Δ_T	
$e(q;R)$	dim	Index F	
	emdim		

Simpliziale Komplexe

1.1. Definition : Eine (endliche) Menge $V=(v_0,v_1,\dots,v_n)$, genannt Ecken, und eine Menge Δ von Untermengen von V, genannt Simplexe, mit

$$\sigma\in\Delta,\ \tau\subset\sigma\ \Rightarrow\tau\in\Delta$$

nennt man einen (endlichen) simplizialen Komplex.

Speziell gilt immer $\emptyset\in\Delta$, jedoch $(v)\in\Delta$ nicht unbedingt für alle Ecken.

Simpliziale Komplexe geben wir i.A. durch Angabe ihrer maximalen Simplexe an. Im Weiteren benutzen wir die Terminologie von /Sp/. $\{\emptyset\}$ bezeichnen wir als den trivialen Komplex.

Für $\sigma\in\Delta$ nennt man $\dim\sigma := /\sigma/-1$ die Dimension eines Simplexes. $\dim\Delta := \max\{\dim\sigma : \sigma\in\Delta\}$ die Dimension des simplizialen Komplexes Δ.

Sei $\dim\Delta = N$. Unter maximalen Simplexen von Δ verstehen wir maximale bzgl. der Inklusionsrelation. N-dimensionale Simplexe von Δ nennen wir auch höchstdimensional.

Jedes höchstdimensionale Simplex ist maximal. Gilt die Umkehrung, so heißt der simpliziale Komplex reindimensional oder pur.

Sei $f_i(\Delta)$ die Zahl der i-dimensionalen Simplexe aus Δ, $i=-1,0,\dots,N$). $\underline{f} := (f_{-1},f_0,\dots,f_N)$ nennt man den f-Vektor von Δ.

Mit jedem simplizialen Komplex kann man eine geometrische Realisierung verbinden (/Sp;3.1./), die wir auch mit $/\Delta/$ bezeichnen wollen. Für $\emptyset\neq\tau\in\Delta$ ist $/\tau/$ das abgeschlossene Simplex, $\langle\tau\rangle$ sei das offene Simplex, $\hat{\tau}$ der Schwerpunkt von $/\tau/\subset/\Delta/$ (vgl. ebenda).

1.2. Für simpliziale Komplexe ist der reduzierte Ketten- bzw. Kokettenkomplex über einer Koeffizientengruppe k (im Folgenden die additive Gruppe eines Körpers oder $\mathbb{Z}$) definiert.

Dazu gibt man sich auf der Eckenmenge V eine totale Ordnung vor die wir ein für allemal fixieren wollen). Sei dann für $A,B,C \subset V$

$$a(A,B) := /\{a<b : a \in A,\ b \in B\}/$$

iese Funktion ist additiv in beiden Argumenten in dem Sinne,

daß gilt

$$\left| \begin{array}{ll} a(A \cup B,C) & = a(A,C) + a(B,C) - a(A \cap B,C) \\ a(A,B \cup C) & = a(A,B) + a(A,C) - a(A,B \cap C) \\ a(A,B) & = /A/./B/ - a(B,A) \quad \text{wenn } A \cap B = \emptyset. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Bezeichne nun $\tilde{C}_{\cdot}$ bzw. $\tilde{C}^{\cdot}$ den reduzierten Ketten- bzw. Koketten-

omplex, d.h.

2) $\tilde{C}_{\cdot}: \ldots \longrightarrow \tilde{C}_i \xrightarrow{\partial} \tilde{C}_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \tilde{C}_0 \longrightarrow \tilde{C}_{-1} \longrightarrow 0$

mit dem freien k-Modul $\tilde{C}_i$, der von allen i-dimensionalen

Simplexen $\sigma \in \Delta$ erzeugt wird und

$$\partial(\tau) := \sum_{v \in \tau} (-1)^{a(\tau,(v))} \tau - (v)$$

3) $\tilde{C}^{\cdot}: 0 \longrightarrow \tilde{C}^{-1} \longrightarrow \tilde{C}^{0} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \tilde{C}^{i-1} \xrightarrow{\delta} \tilde{C}^{i} \longrightarrow \ldots$

mit $\tilde{C}^i = \tilde{C}_i$ und

$$\delta(\tau) := \sum_{\substack{v \notin \tau \\ \tau \cup (v) \in \Delta}} (-1)^{a(\tau,(v))} \tau \cup (v)$$

ie entsprechenden Homologien dieser Komplexe $\tilde{H}_{\cdot}(\Delta;k)$ und

$\tilde{H}^{\cdot}(\Delta;k)$ heißen reduzierte Homologie- bzw. Kohomologiegruppen

von Δ mit Koeffizienten in k. Wenn keine Mißverständnisse möglich

sind, lassen wir dabei die Angabe der Koeffizientengruppe weg.

Analog definiert man relative (Ko)homologiegruppen von Δ bzgl.

ines Unterkomplexes $\Delta' \subset \Delta$ (vgl. /Sp/).

4) $$\chi(\Delta) := \sum_{i=-1}^{N} (-1)^i f_i = \sum_{i=-1}^{N} (-1)^i \dim_k \tilde{H}_i(\Delta;k)$$

st dann die reduzierte Eulercharakteristik von Δ über dem Kör-

er k (/Sp;4.3.14./).

__1.3.__ Führen wir nun einige spezielle Komplexe ein :

1) Sei Δ ein simplizialer Komplex über der Eckenmenge V und $\sigma \in \Delta$.

ann ist

$\operatorname{link}_\Delta \sigma := \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta,\ \tau \cap \sigma = \emptyset\}$

der <u>Außenrand</u> (Link) von σ in Δ ;

$\operatorname{st}_\Delta \sigma := \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta\}$

der <u>Stern</u> von σ in Δ und

$\operatorname{cost}_\Delta \sigma := \{\tau \in \Delta : \tau \not\supset \sigma\}$

der <u>Kontrastern</u> von σ in Δ .

Für $U \subset V$ sei ferner

$\Delta_U := \{\sigma \in \Delta : \sigma \subset U\}$

(2) Sind Δ_1 und Δ_2 simpliziale Komplexe über disjunkten Eckenmengen, so nennt man

$\Delta_1 * \Delta_2 := \{\sigma \dot\cup \tau : \sigma \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2\}$

den <u>Join</u> (Vebindungskomplex) von Δ_1 und Δ_2.

(3) $\Delta_m := \{\sigma \in \Delta : \dim \sigma \leq m\}$ nennt man das <u>m-Skelett</u> von Δ .

<u>1.4.</u> Sei Δ ein simplizialer Komplex und $\sigma \in \Delta$. Für den Außenrand gelten folgende Beziehungen :

(1) Sei $\tau \in \operatorname{link}_\Delta \sigma$ (also $\tau \cup \sigma \in \Delta$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$). Dann ist

$\underline{\operatorname{link}_{\operatorname{link}_\Delta \sigma} \tau = \operatorname{link}_\Delta \sigma \dot\cup \tau}$

In der Tat, $\varepsilon \in \operatorname{link}_{\operatorname{link}_\Delta \sigma} \tau \Leftrightarrow \varepsilon \dot\cup \tau \in \operatorname{link}_\Delta \sigma \Leftrightarrow \varepsilon \dot\cup \tau \dot\cup \sigma \in \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon \dot\cup (\tau \cup \sigma) \in \Delta \Leftrightarrow \varepsilon \in \operatorname{link}_\Delta \tau \cup \sigma$.

(2) $\underline{\dim(\operatorname{link}_\Delta \sigma) + |\sigma| \leq \dim \Delta}$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn σ in einem höchstdimensionalen Simplex von Δ enthalten ist.

Speziell gilt Gleichheit, wenn Δ reindimensional ist. Dann ist auch $\operatorname{link}_\Delta \sigma$ reindimensional.

(3) Ist $\emptyset \neq \sigma \in \Delta$ und Δ' die Zusammenhangskomponente von Δ , die σ enthält, so ist

$\underline{\operatorname{link}_\Delta \sigma = \operatorname{link}_{\Delta'} \sigma}$

1.5.(1) Lemma : Für $\sigma \in \Delta$ existieren Isomorphismen

$$H^i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{i-/\sigma/}(\mathrm{link}_\Delta \sigma)$$

$$\tilde{H}_{i-/\sigma/}(\mathrm{link}_\Delta \sigma) \xrightarrow{\cong} H_i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$$

Das folgt sofort aus dem Komplexisomorphismus

$$\tilde{C}_{i-/\sigma/}(\mathrm{link}_\Delta \sigma) \longrightarrow \tilde{C}_i(\Delta)/\tilde{C}_i(\mathrm{cost}_\Delta \sigma)$$

via

$$\tau \in \tilde{C}_{i-/\sigma/}(\mathrm{link}_\Delta \sigma) \mapsto (-1)^{a(\sigma,\tau)}(\tau \cup \sigma) + \tilde{C}_i(\mathrm{cost}_\Delta \sigma)$$

(2) Sei Δ ein simplizialer Komplex und $\Delta' \subset \Delta'' \subset \Delta$ Unterkomplexe. Die exakte Sequenz dieses Tripels (/Sp;4.5.7./) definiert die folgenden Abbildungen :

$$a_i : \tilde{C}_i(\Delta)/\tilde{C}_i(\Delta') \longrightarrow \tilde{C}_i(\Delta)/\tilde{C}_i(\Delta'') \qquad \text{und}$$

$$a^i : \tilde{C}^i(\Delta)/\tilde{C}^i(\Delta'') \longrightarrow \tilde{C}^i(\Delta)/\tilde{C}^i(\Delta')$$

und die korrespondierenden Abbildungen in den Homologien bzw. Kohomologien, die wir ebenfalls

$$a_i : H_i(\Delta, \Delta') \longrightarrow H_i(\Delta, \Delta'') \quad \text{und} \quad a^i : H^i(\Delta, \Delta'') \longrightarrow H^i(\Delta, \Delta')$$

bezeichnen wollen.

(3) Lemma : Für $p \in \langle\tau\rangle$ $(\emptyset \neq \tau \in \Delta)$ gilt

$$H_i(/\Delta/, /\Delta/-p) \cong H_i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau) \quad \text{und}$$

$$H^i(/\Delta/, /\Delta/-p) \cong H^i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau)$$

wobei links singuläre Homologien und rechts simpliziale stehen.

Das folgt aus der Tatsache, daß man ein starkes Deformationsretrakt von $/\Delta/-p$ auf $/\mathrm{cost}_\Delta \tau/$ angeben kann.

1.6. Die nichtleeren Simplexe $\sigma \in \Delta$ bilden eine teilweise geordnete Menge bzgl. der Inklusionsrelation.

Sei $\Delta' \subsetneq \Delta$ ein Unterkomplex von Δ und $U := \Delta - \Delta'$.

(1) Definition : Wir nennen U zusammenhängend, wenn U als teilweise geordnete Menge zusammenhängend ist, d.h. wenn es zu je zwei $\sigma, \tau \in U$ eine Kette

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k = \tau$$

mit $(\emptyset \neq)\sigma_i \in U$ und $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ bzw. $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ gibt.

(2) <u>Lemma :</u> U ist genau dann zusammenhängend, wenn die geometrische Realisierung $/\Delta/-/\Delta'/$ wegzusammenhängend ist.

Beweis : $/U/ := /\Delta/-/\Delta'/$ ist die disjunkte Vereinigung der offenen Simplexe $<\sigma>$, $\sigma \in U$. Ist U zusammenhängend, so wähle für $A, B \in /U/$ die Simplexe $\sigma_A, \sigma_B \in U$ mit $A \in <\sigma_A>$, $B \in <\sigma_B>$ und verbinde diese durch eine Kette (1). Dann liefert die Zusammensetzung der die Mittelpunkte benachbarter Simplexe verbindenden Strecken einen Weg von A nach B in /U/.

Ist umgekehrt /U/ wegzusammenhängend, so betrachten wir für $\sigma, \tau \in U$ einen Weg in /U/, der $\hat{\sigma}$ und $\hat{\tau}$ verbindet. Bilden wir die Sequenz der Simplexe, deren Inneres dieser Weg nacheinander durchläuft. Durch geeignetes Verkürzen kann man erreichen, daß jedes Simplex in dieser Sequenz höchstens einmal vorkommt. Damit ist diese Sequenz $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k = \tau$ endlich. Da $<\sigma_i>$ und $<\sigma_{i+1}>$ benachbart sind, gilt außerdem $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ oder umgekehrt. $\times$

<u>Bemerkung :</u> Damit fällt für $\Delta' = (\emptyset)$ der oben definierte Zusammenhangsbegriff mit dem gewöhnlichen für Δ (/Sp;3.6.10/) zusammen.

(3) <u>Lemma :</u> U ist zusammenhängend genau dann, wenn zu je zwei maximalen $\sigma, \tau \in U$ eine Kette

$$\sigma = \sigma_0 > \sigma_1 < \sigma_2 > \ldots < \sigma_{2m} = \tau \qquad (\emptyset \neq \sigma_j \in U)$$

existiert, in der σ_{2i} maximal in U ist und $\sigma_{2i} - \sigma_{2i+1}$ und $\sigma_{2i+2} - \sigma_{2i+1}$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{link}_\Delta \sigma_{2i+1}$ liegen $(i=0,1,\ldots,m-1)$.

Beweis : Aus der Existenz von Ketten (1) folgt die von Ketten mit alternierendem Inklusionszeichen (man lasse die überflüssigen Simplexe weg). Ersetzt man noch jedes $\sigma_{2i} \in U$ durch ein maximales σ_{2i} enthaltendes aus U, bekommt man für je zwei maximale $\sigma, \tau \in U$ die Kette

$$\sigma = \sigma_0 \supset \sigma_1 \subset \sigma_2 \supset \ldots \subset \sigma_{2m} = \tau \qquad (3')$$

n der die σ_{2i} maximal in U sind.

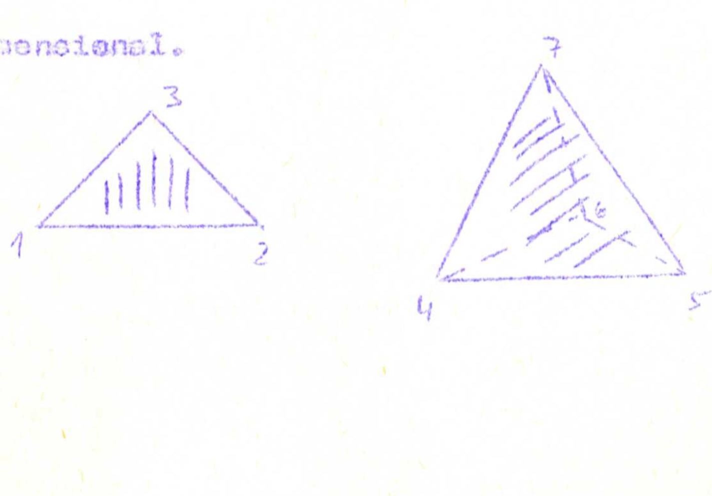
Liegen $\sigma - \varepsilon$ und $\tau - \varepsilon$ aus dem Kettenstück $\sigma \supset \varepsilon \subset \tau$ von (3') in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathrm{link}_\Delta \varepsilon$, so kann man sie ebenfalls durch eine Kette (3') in $\mathrm{link}_\Delta \varepsilon$ verbinden. Diese kann en zu einer Kette in U liften ($\alpha \in \mathrm{link}_\Delta \varepsilon \Rightarrow \alpha \dot{\cup} \varepsilon \notin \Delta'$, da $\varepsilon \notin \Delta'$ nd Δ' ein Unterkomplex ist $\Rightarrow \alpha \dot{\cup} \varepsilon \in U$), in der die Simplexe mit ngeradem Index eine höhere Dimension als ε haben. Ein Induktions- rgument zeigt, daß dann auch eine Kette (3) existiert.

Umgekehrt folgt aus der Existenz von Ketten (3) die von Ket- en (1). ∎

4) Lemma : Ist Δ zusammenhängend und für alle $\emptyset \neq \sigma \in \Delta$ mit $\dim(\mathrm{link}_\Delta \sigma) \geq 1$ $\mathrm{link}_\Delta \sigma$ zusammenhängend (d.h. $\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \sigma) = 0$) so ist Δ reindimensional.

eweis : A.T. Sei $\dim \Delta = N$, $\sigma, \tau \in \Delta$ maximal und $\dim \sigma = N > \dim \tau$. a Δ zusammenhängend ist, können wir nach (3) oBdA annehmen, daß $\sigma \cap \tau = \varepsilon \neq \emptyset$ und $\mathrm{link}_\Delta \varepsilon$ nicht zusammenhängend ist ($\sigma - \varepsilon$ und $\tau - \varepsilon$ iegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten). Da σ und τ ma- imal sind, folgt $\tau \supsetneq \varepsilon$, also $\dim \varepsilon < N-1$, aber $\sigma - \varepsilon \in \mathrm{link}_\Delta \varepsilon$, lso $\dim(\mathrm{link}_\Delta \varepsilon) \geq 1$. Das ist ein Widerspruch. ∎

Bemerkung : Ist Δ nicht zusammenhängend, so folgt nur die Rein- imensionalität der Zusammenhangskomponenten (vgl.(1.4.3.)), denn .B. $\Delta = ((123),(4567))$, die disjunkte Vereinigung eines Dreiecks nd eines Tetraeders, erfüllt obige Linkbedingung, ist aber nicht eindimensional.



. Der Stanley-Reisner-Ring

2.1. Sei k ein Körper oder $\mathbb{Z}$, Δ ein simplizialer Komplex über er Eckenmenge V, $S = S(V) := k[x_v : v \in V]$ der Polynomring in den ariablen x_v, $v \in V$, und $\underline{m} := (x_v : v \in V)S$ das irrelevante Ideal on S.

Wir betrachten das Potenzproduktideal

$$I(\Delta) := (x_\sigma : \sigma \subset V, \sigma \notin \Delta),$$

rzeugt von allen "Nichtseitenmonomen" aus S.

Die Korrespondenz $I: \Delta \longrightarrow I(\Delta)$ stellt eine eineindeutige Zu- rdnung zwischen den simplizialen Komplexen über V und den qua- ratfreien Potenzproduktidealen von S her, d.h. den Potenzpro- uktidealen von S, die von quadratfreien Monomen erzeugt werden nnen. Die Umkehrkorrespondenz wird gegeben durch

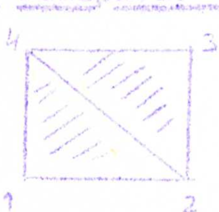
$$\Delta(I) := (\sigma \subset V : x_\sigma \notin I)$$

Definition : Den Faktorring $R = k[\Delta] := S(V)/I(\Delta)$ nennt man den Stanley-Reisner-Ring von Δ.

Bemerkung : $k[\Delta]$ ist auch ein S(V)-Modul. Die Ringstruktur von $[\Delta]$ hängt nicht davon ab, wieviel "überflüssige" Ecken in V thalten sind (d.h. $v \in V$, $(v) \notin \Delta$). Bei der Betrachtung von $k[\Delta]$ s Ring ist es also unerheblich, ob V noch überflüssige Ecken thält oder nicht.

2.2. Beispiele : $h(\Delta) = (1.1.0.0)$

)



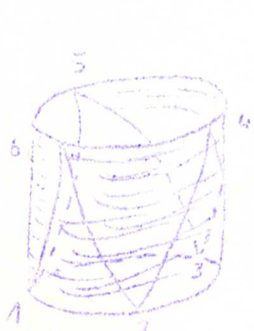
$\Delta = ((124),(234))$

$V = (1,2,3,4)$

$S(V) = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$

$I(\Delta) = (x_1 x_3)$

)



(Triangulierung eines Zylinders)

$\Delta = ((126),(246),(234),(345),(135),(156))$

$h(\Delta) = (1.3.3.-1)$

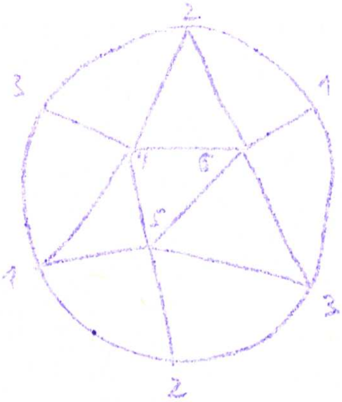
$I(\Delta) = (x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6, x_1x_2x_3, x_4x_5x_6)$

3) (Triangulierung eines Möbiusbandes)

$\Delta = ((012),(023),(014),(134),(234))$

$I(\Delta) = (x_0x_1x_3, x_0x_2x_4, x_0x_3x_4, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4)$ $h = (1.2.3.-1)$

4) Das Reisnerbeispiel (/23;Remark 3/) einer Triangulierung der projektiven Ebene :



$\Delta = ((125),(126),(134),(136),(145),(234),(235),(246),(356),(456))$

$I(\Delta) = (x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_1x_4x_6, x_1x_5x_6, x_2x_3x_6, x_2x_4x_5, x_2x_5x_6, x_3x_4x_5, x_3x_4x_6)$

$h = (1.3.6.0)$

2.3. Seien Δ_1 und Δ_2 simpliziale Komplexe über derselben ckenmenge V. Dann gilt

(1) $I(\Delta_1 \cap \Delta_2) = I(\Delta_1) + I(\Delta_2)$

(2) $I(\Delta_1 \cup \Delta_2) = I(\Delta_1) \cap I(\Delta_2)$

(3) $\Delta_1 \subset \Delta_2 \iff I(\Delta_1) \supset I(\Delta_2)$

iese drei Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition.

Sei weiter

$$A(\sigma) := (x_v : v \notin \sigma)$$

n Primideal in S. Dann gilt

1) Theorem :

$$I(\Delta) = \bigcap_{\sigma\in\Delta} A(\sigma) = \bigcap_{\substack{\sigma\in\Delta\\ \sigma\text{-max.}}} A(\sigma)$$

Letzteres ist die Primärzerlegung von $I(\Delta)$.

weis : Sei $B = (B_1, B_2, \dots, B_s) \subset V$

$\in I(\Delta) \iff B \notin \Delta \iff B$ ist in keinem (max.) Simplex $\sigma \in \Delta$ enthalten

$\iff \forall (\text{max.})\sigma \in \Delta \;\; \exists i : B_i \notin \sigma$

$\iff \forall (\text{max.})\sigma \in \Delta \;\; x_B = \prod x_{B_i} \in A(\sigma)$

$I(\Delta)$ von quadratfreien Monomen erzeugt wird, folgt die Behauptung. Daß die zweite Darstellung die Primärzerlegung von

(Δ) ist, folgt aus

$$\underline{\sigma > \tau \iff A(\sigma) \subset A(\tau)}$$ ✻

Bezeichne $e(\underline{q},R)$ die Multiplizität des Parameterideals $\underline{q}$ des lokalen Ringes $R_{\underline{m}}$, vgl. /26;Ch.V/. Dann nimmt die Additionsformel für Multiplizitäten, vgl. ebenda,

$$e(\underline{q},R) = \sum_{\underline{p}} e(\overline{\underline{q}},S/\underline{p}) \cdot l_{S_{\underline{p}}}(R_{\underline{p}})$$

wobei über alle höchstdimensionalen zu $R_{\underline{m}}$ assoziierten Primideale summiert wird)

folgende Gestalt an :

Die höchstdimensionalen assoziierten Primideale von $R_{\underline{m}}$ sind nach (4) gerade die $\underline{p}=A(\sigma)$ mit $\sigma\in\Delta$ höchstdimensional.

Dann ist aber

$$(S/\underline{p})_{\underline{m}} \cong k[x_v : v\in\sigma]_{\underline{m}} \quad \text{regulär und}$$

$$l(R_{\underline{p}}) = l(S_{\underline{p}}/I_{\underline{p}}) = l(S_{\underline{p}}/\underline{p}S_{\underline{p}}) = 1$$

5) Korollar : Für ein Parameterideal $\underline{q}$ von $R=k[\Delta]$ gilt

$$e(\underline{q},R) = \sum_{\substack{\sigma\in\Delta \\ \sigma\text{-höchstdim.}}} e(\overline{\underline{q}},S/A(\sigma))$$

wobei $\overline{\underline{q}}$ das Bild von $\underline{q}$ in $S/A(\sigma)$ ist.

Speziell ist $(N=\dim\Delta)$

$$e(\underline{m},R) = f_N$$

6) Bemerkung : Betrachten wir $k[\Delta]_{\underline{m}}$, so können wir oBdA annehmen, daß k ein Körper ist, denn

$$\mathbb{Z}[X]_{\underline{m}} \cong \mathbb{Q}[X]_{\underline{m}}$$

$0\neq a\in\mathbb{Z}$ liegt im multiplikativen System, nach dem lokalisiert wird).

7) Sei

$$N = N(\Delta) := \dim\Delta \quad \text{und}$$

$$r = r(\Delta) := N(\Delta) + 1 = \max(\ |\sigma| : \sigma\in\Delta\ )$$

Aus (4) folgt für die Krulldimension von $k[\Delta]_{\underline{m}}$

(7) $\dim k[\Delta]_{\mathfrak{m}} = \dim\Delta + 1 = N + 1 = r(\Delta)$

sowie

(8) $I(\Delta)$ ist ungemischt genau dann, wenn Δ reindimensional ist.

I heißt dabei ungemischt, wenn alle Primärkomponenten von I

gleiche Dimension haben.

2.4. Graduierungen :

Die $\mathbb{N}^V$-Graduierung von $S(V)$ induziert eine $\mathbb{N}^V$-Graduierung
auf $k[\Delta]$, da $I(\Delta)$ multihomogen ist. Diese Graduierung nennen
wir Multigraduierung von $k[\Delta]$ und bezeichnen sie durch den Index M.

Speziell ist $\deg_M a \in \mathbb{N}^V$ der Multigrad des multihomogenen Elements $a \in k[\Delta]$.

Mit einer solchen Multigraduierung von $k[\Delta]$ kann man eine $\mathbb{N}$-Graduierung verbinden : Ist $\deg_M a = (n_v) \in \mathbb{N}^V$, so setzen wir
$\deg a = |\deg_M a| = \sum_{v \in V} n_v$. Diese Graduierung nennen wir die einfache Graduierung von $k[\Delta]$ und bezeichnen sie ohne Index.

2.5. Theorem : Seien Δ_1 und Δ_2 zwei simpliziale Komplexe
über derselben Eckenmenge V.

Dann gibt es folgende exakte Mayer-Vietoris-Sequenz von
$S(V)$-Moduln :

$$0 \longrightarrow k[\Delta_1 \cup \Delta_2] \longrightarrow k[\Delta_1] \oplus k[\Delta_2] \longrightarrow k[\Delta_1 \cap \Delta_2] \longrightarrow 0$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der natürlichen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow S/I(\Delta_1) \cap I(\Delta_2) \longrightarrow S/I(\Delta_1) \oplus S/I(\Delta_2) \longrightarrow S/I(\Delta_1) + I(\Delta_2) \longrightarrow 0$$

und (2.3.1.+2.).

. Grundlagen aus der homologischen Algebra

3.1. Sei $(S,\underline{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, k sein Restklas-
nkörper und R ein endlich erzeugter S-Modul.

1) Eine exakte Sequenz

$$F.: \ldots \longrightarrow F_h \xrightarrow{\varphi_h} F_{h-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 (\xrightarrow{\varphi_0} R) \longrightarrow 0$$

reier endlich erzeugter S-Moduln F_i nennt man eine freie Auf-
ösung von R über S.

2) Eine solche Auflösung (1) heißt minimal, wenn außerdem gilt

$$\mathrm{Im}\, \varphi_{i+1} = \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \underline{m}F_i \qquad i=0,1,\ldots$$

olche minimalen freien Auflösungen von R über S existieren, vgl.
;(18,E)/.

) Ist F. eine minimale freie Auflösung von R, so heißt

$$\mathrm{rg}\, F_i = \dim_k \mathrm{Tor}_i^S(R,k)$$

e i-te Bettizahl von R, vgl. /St/.

3.2. Sei nun S ein $\mathbb{N}^r$-graduierter noetherscher Ring, $\underline{m}$ sein
relevantes Ideal und $S_0 = k$ ein Körper oder $\mathbb{Z}$.

) Sei A ein $\mathbb{Z}^r$-graduierter endlich erzeugter S-Modul. Dann be-
ichne A_a die a-te graduierte Komponente von A $(a \in \mathbb{Z}^r)$.
Es gilt

$$A = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^r} A_a \qquad \text{als k-Vektorräume (} \mathbb{Z}\text{-Moduln).}$$

: $A[B]$ bezeichnen wir den graduierten S-Modul mit den Kompo-
nten

$$A[B]_a = A_{a+B} \qquad (a, B \in \mathbb{Z}^r)$$

Die lineare Abbildung $f: A \longrightarrow B$ zweier graduierter S-Moduln
nd B heißt vom Grad $a \in \mathbb{Z}^r$, wenn

$$f(A_B) \subset B_{a+B} \qquad \forall B \in \mathbb{Z}^r$$

$A \longrightarrow B$ ist vom Grad a genau dann, wenn

$$f: A[-a] \longrightarrow B \qquad \text{bzw.} \qquad f: A \longrightarrow B[a]$$

eils vom Grad Null sind.

3) Sei $\mathrm{Hom}_S(A,B)_a$ die Menge der Homomorphismen $A \to B$ vom
rad a und

$$\underline{\mathrm{Hom}_S(A,B) := \oplus_{a \in \mathbb{Z}^r} \mathrm{Hom}_S(A,B)_a}$$

o gilt

$$\underline{\mathrm{Hom}_S(A[-a],B) \cong \mathrm{Hom}_S(A,B[a]) \cong \mathrm{Hom}_S(A,B)[a]} \; .$$

4) Seien in einer minimalen freien Auflösung (3.1.2.) des gra-
uierten endlich erzeugten S-Moduls A die freien Moduln

$$F_i = \oplus_{j=1}^{b_i} S[-a_{ij}] \qquad a_{ij} \in \mathbb{Z}^r \quad i=0,1,\dots$$

o graduiert, daß alle φ_i homogen vom Grad 0 sind. Eine solche
inimale freie Auflösung nennen wir minimale freie Auflösung des
$\mathbb{Z}^r$-graduierten S-Moduls A (über dem Körper k).

3.3. Seien S und A wie in (3.2.) und $S_0=k$ ein Körper.

) $H(A,a) := \dim_k A_a \qquad a \in \mathbb{Z}^r$

nennt man die Hilbertfunktion von A,

$F(A,\underline{t}) := \sum_{a \in \mathbb{Z}^r} H(A,a) \cdot \underline{t}^a$

die Hilbert-Poincaré-Reihe von A.

gl. /32/ für den Fall r=1 und /29/ für allgemeine r.

) Wegen der Additivität der Hilbert-Poincaré-Reihe kann man
$A,\underline{t})$ aus einer minimalen freien Auflösung (3.2.4.) berechnen
$\mathrm{pd}_S A < \infty$):

$$\underline{F(A,\underline{t}) = \left(\sum_{i=0} (-1)^i \sum_{j=1}^{b_i} \underline{t}^{a_{ij}}\right) F(S,\underline{t})}$$

) $\underline{F(A[-a],\underline{t}) = \underline{t}^a F(A,\underline{t})}$

) Sei nun r=1, also S "einfach" graduiert und außerdem noch als
Algebra von (endlich vielen Elementen aus) S_1 erzeugt.
Ist $d = \dim A$, so folgt (vgl. /1;§11/), daß

$h(A,t) := F(A,t)(1-t)^d \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$

t, d.h. $F(A,t)$ eine Polstelle bei t=1 der Ordnung d hat und
entuell noch eine bei t=0 (wenn A auch Elemente von negativem

rad enthält).

h(Δ,t) bzw. die Folge der Koeffizienten (h_i) von $h(\Delta,t)$ nennen ir den <u>h-Vektor</u> von Δ.

<u>3.4.</u> Seien nun S und R wie in (2.1.-4.) und k ein Körper. ann gilt bzgl. der Multigraduierung

1) $$F_M(R;\underline{t}) = \sum_{U:s(U)\in\Delta} \underline{t}^U = \sum_{\sigma\in\Delta}\ \sum_{U:s(U)=\sigma} \underline{t}^U$$
$$= \sum_{\sigma\in\Delta} \Big(\sum_{W:s(W)\subset\sigma} \underline{t}^W\Big)\, \underline{t}_\sigma$$
$$= \sum_{\sigma\in\Delta} \underline{t}_\sigma \prod_{v\in\sigma}(1-t_v)^{-1}$$

zgl. der einfachen Graduierung von R bekommt man daraus

2) $$F(R;t) = \sum_{i=0}^{r} f_{i-1}\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{i}$$

$i=0 \Rightarrow \binom{k-1}{k} = \delta_{0k}$

$$H(R,m) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} f_{i-1}\binom{m-1}{i-1} & \text{für } m > 0 \end{cases}$$

4) $$h(R,t) = (1-t)^r\, F(R;t) = \sum_{i=0}^{r} f_{i-1} t^i (1-t)^{r-i}$$
$$= h_0 + h_1 t + \ldots + h_r t^r$$

peziell gilt also für den h-Vektor eines simplizialen Komple-es

5) $$\underline{h_i = 0 \quad \text{für} \quad i > r(\Delta)}$$

nd die Umrechnungsformeln

6) $$\left\| \begin{aligned} h_v &= \sum_{i=0}^{v} (-1)^{v-i} \binom{r-i}{v-i} f_{i-1} \\ f_{v-1} &= \sum_{i=0}^{v} \binom{r-i}{v-i} h_i \end{aligned} \right.$$

7) (1)-(6) zeigen, daß F_M, F, H und h kombinatorische Invarianten ind, also nicht vom Grundkörper k abhängen. Dies gibt uns eine ewisse Berechtigung, auch den Fall k = ℤ zuzulassen.

Vgl. auch /EG;3.3./,/St/,/27/,/29/ und /Sch/.

<u>3.5.</u> Sei S ein noetherscher Ring, $\underline{a}$ ein Ideal aus S und M ein

ndlich erzeugter S-Modul.

1) Der Funktor $\Gamma_{\underline{a}}(\cdot)$, der durch

$$\Gamma_{\underline{a}}(M) = \{m \in M : \operatorname{rad}(\operatorname{Ann}(m)) \supseteq \underline{a}\}$$
$$\cong \varinjlim_{n} \operatorname{Hom}_S(S/\underline{a}^n, M)$$

und $\Gamma_{\underline{a}}(f) = f\big|_{\Gamma_{\underline{a}}(M)}$ für $f \in \operatorname{Hom}_S(M,N)$

efiniert wird, heißt globaler Schnittfunktor. Er ist ein ko-
rianter, linksexakter, S-linearer Funktor der Kategorie der
-Moduln in sich selbst.

Seine rechtsabgeleiteten Funktoren $H^i_{\underline{a}}(\cdot)$ nennt man lokale
ohomologiefunktoren mit Träger in $\underline{a}$, vgl. /HK;4/.

2) Lemma (vgl. /HK;4.11./) :

Sei $f: S \to R$ eine Ringerweiterung (noeth.) Ringe und M ein
R-Modul. Via f kann M als S-Modul aufgefaßt werden und sei
dann mit M_S bezeichnet. Sei $\underline{a}$ ein Ideal von S und $\underline{a}' = f(\underline{a}).R$
das Erweiterungsideal von $\underline{a}$ in R. Dann gilt

$$H^i_{\underline{a}}(M_S) = (H^i_{\underline{a}'}(M))_S$$

3) Zur Berechnung der lokalen Kohomologiemoduln :

i $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_k)S$ und $K^{\cdot}(\underline{a}^t;M)$ der Koszulkomplex (/M;(18.D)/)

gl. $\underline{a}^t := (a_1^t,\ldots,a_k^t)$.

Dann ist (vgl. /HK;4.7./)

$$H^i_{\underline{a}}(M) \cong \varinjlim_{t} H^i(\underline{a}^t;M) \cong H^i(\varinjlim_{t} K^{\cdot}(\underline{a}^t;M))$$

der direkte Limes ein exakter Funktor ist und deshalb mit dem
ologiefunktor vertauscht werden kann, vgl. /G;V.7.2./.

Wegen

$$K^{\cdot}(\underline{a}^t;M) = \left(\bigotimes_{i=1}^{k} (0 \longrightarrow S \xrightarrow{a_i^t} S \longrightarrow 0)\right) \otimes_S M$$

r auch

$$\varinjlim_{t} K^{\cdot}(\underline{a}^t;M) = \left(\bigotimes_{i=1}^{k} \varinjlim_{t}(0 \longrightarrow S \xrightarrow{a_i^t} S \longrightarrow 0)\right) \otimes_S M$$

schließlich beweist man aus der universellen Eigenschaft des rekten Limes

$$\varinjlim_{t}(0 \longrightarrow S \xrightarrow{a^t} S \longrightarrow 0) \cong (0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} S_a \longrightarrow 0)$$

bei S_a die Lokalisierung von S nach dem multiplikativen Sy-
om der Potenzen von a ist und ι der natürliche Homomorphismus
die Lokalisierung.

Insgesamt ist also $\varinjlim_{t} K^\cdot(\underline{a}^t;M)$ isomorph dem Komplex

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_i M_{a_i} \longrightarrow \bigoplus_{i<j} M_{a_i a_j} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{a_1 a_2 \dots a_k} \longrightarrow 0$$

---

e Verbindungsmorphismen sind dabei durch

$$f^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_{m+1}} : M_{a_{i_1} \dots a_{i_m}} \longrightarrow M_{a_{j_1} \dots a_{j_{m+1}}}$$

finiert mit

$$f = \begin{cases} 0 & \text{wenn } (i_1,\dots,i_m) \not\subset (j_1,\dots,j_{m+1}) \\ (-1)^{a-1}\iota & \text{wenn } (j_1,\dots,j_{m+1}) = (i_1,\dots,i_m) \dot\cup (j_a) \end{cases}$$

ι ist dabei die natürliche Abbildung in die Lokalisierung nach a_{j_a})

3.6. Sei S ein noetherscher Ring und $\underline{m}$ ein Primideal aus S.

) Für einen endlich erzeugten S-Modul M bezeichnen wir mit

depth$_{\underline{m}}$ M die Tiefe (vgl. /M;(15.A)/)
dim$_{\underline{m}}$ M die Dimension (vgl. /M;(12.B)/)
endim$_{\underline{m}}$ M die Endlichkeitsdimension (vgl. /24;3.1./)

s $S_{\underline{m}}$-Moduls $M_{\underline{m}}$.

) Es gilt (vgl. /HK;4.10. u. 4.12./, /24;3.1./)

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}_{\underline{m}} M &= \min(\, n : H^n_{\underline{m}}(M) \neq 0 \,) \\ \dim_{\underline{m}} M &= \max(\, n : H^n_{\underline{m}}(M) \neq 0 \,) \\ \operatorname{endim}_{\underline{m}} M &= \min(\, n : H^n_{\underline{m}}(M) \text{ nicht endlich erzeugt }) \end{aligned}$$

(oder 0, falls dieses Minimum nicht existiert)

) Allgemein gilt

$$\underline{\operatorname{depth} M \leq \operatorname{endim} M \leq \dim M}$$

<u>Definition :</u> $M_{\underline{m}}$ heißt <u>Cohen-Macauley</u> (CM), wenn

depth$_{\underline{m}}$ M = dim$_{\underline{m}}$ M gilt

gilt und Quasi-Cohen-Macaulay (Quasi-CM), wenn

$$\operatorname{endim}_{\underline{m}} M = \dim_{\underline{m}} M$$

gilt.

Über einen nichtlokalen Ring S nennt man einen Modul M Cohen-
acaulay, wenn alle seine Lokalisierungen nach maximalen Idealen
on S Cohen-Macaulay sind.

Ist speziell S ein graduierter Ring und M ein homogener Modul,
o genügt es dabei, die Lokalisierungen nach maximalen homogenen
dealen zu berücksichtigen (/19/).

Da eine befriedigende Theorie graduierter Ringe und Moduln aus-
teht, wollen wir einen endlich erzeugten Modul M über einen
ulti)graduierten Ring S CM bzw. Quasi-CM nennen, wenn er für
le Lokalisierungen nach homogenen maximalen Idealen diese Ei-
nschaft hat. Für $S = k[x_1,\ldots,x_n]$ über einen Körper k genügt
s also, die Lokalisierung nach dem irrelevanten Ideal zu betrach-
n.

) Speziell nennt man den (lokalen) Ring S Cohen-Macaulay oder
asi-Cohen-Macaulay, wenn er ein CM- oder Quasi-CM-Modul über
ch selbst ist.

) <u>Lemma</u> : Sei $I \subset \underline{m}$ ein Ideal von S und $S \longrightarrow R = S/I$ die natürli-
che Faktorabbildung.

Tiefe, Dimension und Endlichkeitsdimension eines endlich
erzeugten R-Moduls M hängen nicht davon ab, ob wir M als
R- oder als S-Modul betrachten.

s folgt sofort aus der Charakterisierung dieser drei Größen in
) und (3.5.2.).

<u>3.7.</u> Sei $S = k[x_1,\ldots,x_n]$ ein Polynomring über dem Körper k,
$(x_1,\ldots,x_n)$ sein irrelevantes Ideal und R ein (multihomogener)
ktorring von S der Dimension r.

1) Definition : Einen endlich erzeugten R-Modul K_R nennt man kanonischen Modul von R, wenn dessen Komplettierung

$$\hat{K}_R = K_R \otimes_R \hat{R}$$

(multihomogen vom Grad 0) isomorph zu

$$\mathrm{Hom}_R(H^r_{\underline{m}}(R), E(k))$$

ist. Dabei bezeichne E(k) die injektive Hülle von k als R-Modul (mit der natürlichen Multigraduierung).

1. /HK;5.6./.

Aus der Eindeutigkeit dualisierender Funktoren (/15;4.10./)

lgt der R-Modulisomorphismus

$$\underline{\hat{K}_R \cong \mathrm{Hom}_k(H^r_{\underline{m}}(R),k)}$$

) Nach (3.5.3.) berechnet man

$$H^n_{\underline{m}}(S) \cong k[x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}]\cdot(x_1\cdots x_n)^{-1}$$

d damit

$$\hat{K}_S \cong \mathrm{Hom}_k(H^n_{\underline{m}}(S),k) \cong \hat{S}[-e]$$

t $e := (1,\dots,1)$.

K;5.12./ liefert dann

) $\underline{K_R \cong \mathrm{Ext}_S^{n-r}(R,K_S) \cong \mathrm{Ext}_S^{n-r}(R,S)[-e]}$

(wobei alle Isomorphismen multihomogen vom Grad 0 sind, wenn R multigraduiert ist)

) Ist außerdem R noch CM, so hat R eine minimale graduierte

pie Auflösung (3.2.4.) der Länge n-r:

$$F_\cdot : 0 \to F_{n-r} \to \dots \to F_0 (\to R) \to 0$$

t $F_i = \bigoplus_j S[-a_{ij}]$.

$\mathrm{Ext}_S^{n-r}(R,S)$ zu berechnen, wende man auf $F_\cdot$ den Funktor

$\mathrm{Hom}_S(\cdot,S)$ an und beachte, daß $\mathrm{Ext}_S^i(R,S)=0$ für alle $i< n-r$,

R CM:

$$F_\cdot^* : 0 \to F_0^* \to F_1^* \to \dots \to F_{n-r}^* \to \mathrm{Ext}_S^{n-r}(R,S) \to 0$$

: exakt (mit Randabbildungen vom Grad 0, wenn R multigraduiert

:). Da $\mathrm{Hom}_S(S[-a],S) \cong \mathrm{Hom}_S(S,S)[a] \cong S[a]$ nach (3.2.3.), olgt $\quad F_i^* = \bigoplus_j S[a_{ij}]$

5) Für die Hilbert-Poincaré-Reihe von $K_R[e] \cong \mathrm{Ext}_S^{n-}$

ekommt man damit aus (3.3.2.)

$$\underline{t}^{-e} F(K_R;\underline{t}) = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^{n-r-i} F(F_i^*;\underline{t})$$

$$= \Big(\sum_i (-1)^{n-r-i} \sum_j \underline{t}^{-a_{ij}}\Big) F(S;\underline{t})$$

us der minimalen freien Auflösung von R folgt dagege

$$F(R;\underline{t}) = \Big(\sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \sum_j \underline{t}^{+a_{ij}}\Big) F(S;\underline{t})$$

lso insgesamt

$$\underline{t}^{-e} F(K_R;\underline{t}) = (-1)^{n-r} F(R;\underline{t}^{-1}) \frac{F(S;\underline{t})}{F(S;\underline{t}^{-1})}$$

ie Hilbert-Poincaré-Reihe eines Polynomrings berechn

$$F(S;\underline{t}) = \prod_{i=1}^{n} (1-t_i)^{-1}$$

lso

$$F(S;\underline{t}^{-1}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} t_i (1-t_i)^{-1}$$

$$= (-1)^n \underline{t}^e F(S;\underline{t})$$

nsgesamt folgt, vgl. auch /27;4.4./

Lemma : Ist R multigraduiert und CM, so gilt

$$F(K_R;\underline{t}) = (-1)^r F(R;\underline{t}^{-1})$$ (als rationale Fu

und in der einfachen Graduierung (dim K_R = dim R

$$h(K_R,t) = t^r h(R,t^{-1})$$

die zweite Zeile zu erhalten, multipliziere man di

$(1-t)^r = (-t)^r (1-t^{-1})^r$ und vergleiche mit (3.3.4.).

) **Definition :** Die Zahl der Erzeugenden des kanonis

dule nennt man (im CM-Fall) den Typ von $R = k[\Delta]$

$$\mathrm{typ}\, R = \dim_k K_\Delta / \underline{m} K_\Delta$$

(vgl. /HK;1.20. u. 6.11./)

. Parametersysteme des Stanley-Reisner-Rings

4.1. Sei $(R,\underline{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension r.

Definition : $\underline{x}=(x_1,\dots,x_r)\subset \underline{m}$ nennt man ein Parametersystem für R, vgl. /1;12./, wenn $R/\underline{x}R$ ein endlicher R-Modul ist.

quivalent ist die Existenz eines $n\in\mathbb{N}$, so daß $\underline{m}^n\subset \underline{x}R$ gilt,

.h. $\underline{x}R$ $\underline{m}$-primär ist.

4.2. Sei k ein Körper, S und R wie in (2.1.-4.) und $V=(0,\dots,n)$.

eiterhin setzen wir

S_k^i für die Summe aller quadratfreien Monome in $x_i,\dots,x_n$ vom Grad k $(k=1,2,\dots,n+1-i)$

R_k^i für die Summe aller Monome in $x_i,\dots,x_n$ vom Grad k $(k=1,2,\dots)$

$_k$ stehe für S_k^0 .

Theorem : Ist $\dim R = r$, so bildet $(S_1,\dots,S_r)$ ein Parametersystem für $R_{\underline{m}}$.

eweis : Da Δ $(r-1)$-dimensional ist, enthält Δ keine $(r+1)$-elementigen Simplexe. Also ist

$$S_k\in I(\Delta) \quad \text{für} \quad k\geq r+1 .$$

amit ist

$$I+(S_1,\dots,S_r)\supset (S_1,\dots,S_{n+1}) =: J$$

d es genügt zu zeigen, daß J $\underline{m}$-primär ist.

Wir zerlegen S_i , indem wir alle Summanden, die x_0 als Faktor thalten, zusammenfassen und x_0 ausklammern :

$$S_i = x_0\, S^1_{i-1} + S^1_i \qquad i=1,2,\dots,n \quad ; \quad S^1_0 := 1$$

mit ist

$$-x_0\, S^1_{i-1} \equiv S^1_i \quad (\bmod J)$$

d

$$(-x_0)^{n+1} = (-x_0)^{n+1} S^1_0 \equiv (-x_0)^n S^1_1 \equiv \dots \equiv -x_0 S^1_n = -S_{n+1} \equiv 0 \quad (\bmod J)$$

so ist $x_0^{n+1}\in J$ und analog $x_1^{n+1},\dots,x_n^{n+1}\in J$. Damit ist J

primär. $\square$

Korollar : $(R_1^0, R_2^1, \dots, R_r^{r-1})$ bildet ebenfalls ein Parametersys-

tem für $R_{\underline{m}}$.

weis : Es gelten folgende zwei Beziehungen zwischen elementar-

mmetrischen Summen :

) $S_k - R_1 S_{k-1} + - \dots + (-1)^k R_k = 0$

(Beweis durch Abzählen der Monome)

) $$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s R_s^i S_{k-s}^i = \sum_{s=0}^{i} (-1)^s R_s^{s-1} S_{k-s}^s \qquad (R_0 := 1)$$

(Beweis durch vollständige Induktion nach i)

mit ist

$$0 \underset{(1)}{=} S_k^k - R_1^k S_{k-1}^k + \dots + (-1)^k R_k^k = ((2) \text{ f. } i=k)$$

$$= S_k - R_1^0 S_{k-1}^1 + \dots + (-1)^k R_k^{k-1}$$

so

$$R_k^{k-1} \in (S_k, R_1^0, \dots, R_{k-1}^{k-2})$$

t Induktion bekommt man daraus

$$R_k^{k-1} \in (S_1, \dots, S_k) \quad \text{und} \quad S_k \in (R_1^0, \dots, R_k^{k-1})$$

d damit

$$(R_1^0, R_2^1, \dots, R_k^{k-1}) = (S_1, S_2, \dots, S_k) \qquad \text{für alle } k \quad \square$$

.3. Theorem (vgl. /16/ für schälbare Komplexe) :

Sei $C := \| c_{ij} \|$ $(1 \leq i \leq r \ ; \ j \in V)$ eine Matrix von Elemen-

ten aus k, in der je r Spalten linear unabhängig sind.

$R = k[\Delta]$ und $S = S(V)$ seien wie oben.

Dann ist $(d_1, \dots, d_r)$ mit

(1) $$d_i := \sum_{j \in V} c_{ij} x_j \qquad (i=1, \dots, r)$$

ein Parametersystem für $R_{\underline{m}}$.

weis : Wir zeigen, daß

$$\underline{m}^{r+1} \subset I(\Delta) + (d_1, \dots, d_r) .$$

derum enthält Δ keine $(r+1)$-elementigen Simplexe. Damit liealle quadratfreien Monome aus $\underline{m}^{r+1}$ bereits in $I(\Delta)$. Sei nun

$$M = x_{v_1}^{i_1} x_{v_2}^{i_2} \cdots x_{v_s}^{i_s} \quad \text{mit} \quad i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_s > 0$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s = r+1$$

Monom aus S vom Grad r+1. Sei weiter $i_1 > 1$, denn sonst wäre uadratfrei und damit aus I. Dann ist $s \leq r$.

ei oBdA $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Nach Voraussetzung des Satzes ist er r-Minor von C verschieden von Null. Damit ist (1) nach je- r-Tupel $(x_{v_1}, \dots, x_{v_r})$ auflösbar:

$$x_{v_i} \equiv \sum_{j=r+1}^{n} c_{ij} x_{v_j} \quad (\,\mathrm{mod}(d_1, \dots, d_r)\,) \qquad i = 1, \dots, r$$

für gewisse $c_{ij} \in k$.

ziell gilt also

$$M = x_{v_1} x_{v_1}^{i_1 - 1} x_{v_2}^{i_2} \cdots x_{v_s}^{i_s} \equiv \sum_{j=r+1}^{n} c_{1j} x_{v_1}^{i_1 - 1} x_{v_2}^{i_2} \cdots x_{v_s}^{i_s} x_{v_j}$$

$$(\,\mathrm{mod}(d_1, \dots d_r)\,)$$

$s \leq r < j$. Ein Induktionsargument nach der Summe der Exponen- in M, die größer als 1 sind, zeigt, daß sich jedes Monom vom r+1 in eine Summe quadratfreier Monome $\mathrm{mod}(d_1, \dots, d_r)$ zer- n läßt. Also gilt

$$\underline{m}^{r+1} \subset I + (d_1, \dots, d_r)$$ x

Zur Existenz von C: Hat k /V/ verschiedene Elemente a_v, so man C z.B. als die vandermondesche Matrix $\|a_v^{i-1}\|$ wählen. rerseits ist bekannt, daß bei endlichem Restklassenkörper k are Parametersysteme nicht immer existieren müssen.

Sei $V = (0, \dots, n)$

ch den Gaussalgorithmus kann man stets die Matrix C in die alt

$$' = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 \end{array} \quad * \quad \right\|$$

erführen. Eine solche Transformation entspricht der Multipli-
tion von C mit einer regulären Matrix. Also sind auch alle
Minore in C' verschieden Null und wir können oBdA annehmen,
ß bereites C diese Gestalt hat. Dann ist

$$d_i = e_i - x_i \qquad i=0,\dots,r-1$$

bei jedes e_i eine Linearkombination von $x_r,\dots,x_n$ darstellt.

4.4. Aus der Kenntnis eines Parametersystems kann man folgen-
s (prinzipiell numerisch realisierbares) CM-Kriterium herlei-
n :

) Theorem : Sei Δ ein N-dimensionaler simplizialer Komplex mit
f_N N-dimensionalen Simplexen über der Eckenmenge $V=\{0,\dots,n\}$,
$I:=I(\Delta)$ und

$$d_i = e_i - x_i \qquad (i=0,\dots N)$$

das Parametersystem aus (4.3.3.). Sei ferner
$S' := k[x_{N+1}\dots,x_n]$, $f: S \to S'$ der durch

$$f(x_i) = \begin{cases} e_i & i=0,\dots,N \\ x_i & i=N+1,\dots,n \end{cases}$$

bestimmte Homomorphismus und $f(I)=:I'$.

Dann gilt

(a) f induziert den Isomorphismus

$$k[\Delta]/(d_0,\dots,d_N) \cong S'/I'$$

(b) Δ ist CM genau dann, wenn $l(S'/I') = f_N$.

er ist $l(S'/I')$ die Länge von S'/I' als k-Vektorraum.

weis : (a) Wir zeigen, daß $\operatorname{Ker} f = (d_0,\dots,d_N)$ gilt :

$$f(d_i) = f(e_i) - f(x_i) = 0 \qquad \text{für } i=0,\dots,N$$

mit gilt

$$(d_0,\dots,d_N) \subset \operatorname{Ker} f.$$

Ist umgekehrt $P(x_0,\dots,x_n) \in \operatorname{Ker} f$, so ist

$$0 = P(e_0,\dots,e_N,x_{N+1},\dots,x_n)$$
$$= P(d_0+x_0,\dots,d_N+x_N,x_{N+1},\dots,x_n) \equiv$$

$$\equiv P(x_0,\dots,x_n) \qquad (\bmod (d_0,\dots,d_N))$$

lso $\underline{P \in (d_0,\dots,d_N)}$.

Der Kern der Zusammensetzung von f und der kanonischen Abbil-

lung $S' \longrightarrow S'/I'$ ist somit $I'+(d_0,\dots,d_N)$.

b) Zum Beweis dieses Teils benutzen wir folgendes CM-Kriterium :

Lemma (vgl. /St;DS,Th.3/) :

Ein lokaler Ring R ($=S/I$) ist Cohen-Macaulay genau dann, wenn für ein (beliebiges) Parametersystem $\underline{g}$ von R gilt

$$e(\underline{g},R) = l(R/\underline{g}R)$$

Setzen wir nun $\underline{g} = (d_0,\dots,d_N)$, so ist nach (a) $R/\underline{g}R \cong S'/I'$.

ndererseits ist das Bild von $\underline{g}$ bei der Projektion

$$R = S/I \longrightarrow S/A(\sigma) \cong k[x_v : v \in \sigma] \quad \sigma \in \Delta \text{ höchstdimensional}$$

erade das maximale Ideal, denn nach Voraussetzung kann man

$d_0,\dots,d_N)$ nach $(x_v : v \in \sigma)$ umstellen :

$$x_v \equiv \sum a_{vw} x_w \quad (\bmod \underline{g}) \qquad v \in \sigma,\ w \notin \sigma .$$

2.3.5.) liefert dann

$$\underline{e(\underline{g},R) = f_N} .$$

amit ist R CM genau dann, wenn

$$f_N = e(\underline{g},R) = l(R/\underline{g}R) = l(S'/I')$$

st. $\blacksquare$

. Lokale Kohomologiemoduln des Stanley-Reisner-Rings

Sei k ein Körper oder $\mathbb{Z}$. Einer unveröffentlichten Idee von .Hochster folgend (/14/) berechnen wir die lokalen Kohomolo-iemoduln des Stanley-Reisner-Rings $k[\Delta]$ eines (beliebigen) implizialen Komplexes mit Träger im irrelevanten Ideal $\underline{m}$. ach (3.5.2.) können wir dabei oBdA $k[\Delta]$ als $S(V)$-Modul auf-assen.

5.1. Nach (3.5.3.) bekommt man die lokalen Kohomologiemoduln on $R=k[\Delta]$ als die Kohomologien des Komplexes

1) $C^\circ: 0 \longrightarrow R=C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{/V/} \longrightarrow 0$

$$\text{mit } C^i = \bigoplus_{\substack{\sigma \subset V \\ /\sigma/=i}} R_{x_\sigma}$$

abei bedeute wie in (3.5.3.) R_x die Lokalisierung von R nach dem ultiplikativen System der Potenzen von $x \in R$.

Die Randabbildungen werden durch

2) $$f_{\sigma\tau}: R_{x_\sigma} \longrightarrow R_{x_\tau} \qquad (/\sigma/=i-1\ ;\ /\tau/=i)$$

it

$$f_{\sigma\tau} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \sigma \not\subset \tau \\ (-1)^{a(\sigma,\tau-\sigma)} i_{\sigma\tau} & \text{wenn } \sigma \subset \tau \end{cases}$$

nduziert. Dabei ist $i_{\sigma\tau}: R_{x_\sigma} \longrightarrow R_{x_\tau}$ die natürliche Abbildung in ie Lokalisierung, vgl. (3.5.3.).

5) Der Komplex (1) kann auf natürliche Weise $\mathbb{Z}^V$-graduiert wer-en, da die Randabbildungen die $\mathbb{Z}^V$-Graduierungen der C^i respek-ieren (sie sind sogar vom Multigrad 0). Deshalb ist

$$\underline{H^\circ_{\underline{m}}(R) = \bigoplus_{U \in \mathbb{Z}^V} \left[H^\circ_{\underline{m}}(R)\right]_U}$$

) Setzen wir der Kürze halber $R_\sigma := R_{x_\sigma}$

ist $$\left[R_\sigma\right]_U \cong \begin{cases} k & \text{für } n(U) \subset \sigma\ ;\ s(U) \cup \sigma \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der Tat. x^U ist das einzige Monom, das in $[R_\sigma]_U$ liegen kann.

liegt nicht in R_σ genau dann, wenn es ein $u_v < 0$ gibt und
σ (d.h. $n(U) \not\subset \sigma$) gilt.

wird in R_σ Null, wenn $x_\sigma x^U = 0$ in R ist (da R reduziert), d.h.
nn $\sigma \cup s(U) \notin \Delta$.

) Sei

$$\underline{[C^{i+1}]_U \xrightarrow{\sim} \tilde{C}^i(\sigma \subset V \;:\; n(U) \subset \sigma,\; s(U) \cup \sigma \in \Delta)}$$

r durch (4) induzierte natürliche k-Modulisomorphismus. Ein
rgleich der Randabbildungen liefert, daß es sich sogar um einen
nplexisomorphismus handelt :

Sei $(x^U)_\sigma$ das Erzeugende von R_σ in $[C^i]_U$. Dann ist folgendes
agramm kommutativ

$$\begin{tikzcd}
(x^U)_\sigma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\rho"] & \sigma \arrow[d, mapsto, "\delta"] \\
\sum\limits_{v \notin \sigma} (-1)^{a(\sigma,v)} (x^U)_{\sigma \cup (v)} \arrow[r, mapsto] & \sum (-1)^{a(\sigma,v)} \sigma \cup (v)
\end{tikzcd}$$

l. (1.2.3.) und (2) oben.

) Durch Entfernen der Elemente aus $n(U)$ erhalten wir den Kom-
xisomorphismus

$$\beta : \tilde{C}^i(\sigma \subset V \;:\; n(U) \subset \sigma \;,\; s(U) \cup \sigma \in \Delta) \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \tilde{C}^{i-/n(U)/}(st_{link_\Delta n(U)}(s(U) - n(U))$$

via

$$\beta(\sigma) = (-1)^{a(n(U),\sigma - n(U))}(\sigma - n(U))$$

weis : Wegen $s(U) \cup \sigma \in \Delta$ ist $\sigma \in \Delta$ und $s(U) \in \Delta$, also $n(U) \subset \sigma$ auch.
mit ist $\sigma - n(U) \in link_\Delta n(U)$ und

$$(\sigma - n(U)) \cup (s(U) - n(U)) \in link_\Delta n(U)$$

o ist

$$\sigma - n(U) \in st_{link_\Delta n(U)}(s(U) - n(U))$$

umgekehrt. Es bleibt die Kommutativität mit der Randabbil-
g nachzurechnen:

$$\delta) = \beta\Big(\sum_{\substack{v \in V - \sigma \\ \sigma \cup (v) \in \Delta}} (-1)^{a(\sigma,v)} (\sigma \cup (v)) \Big) =$$

$$= \sum (-1)^{a(\sigma,v)+a(n(U),(\sigma\cup\{v\})-n(U))}\,((\sigma\cup\{v\})-n(U))$$

$$B(\sigma) = \delta((-1)^{a(n(U),\sigma-n(U))}\,(\sigma-n(U)))$$

$$= \sum_{v} (-1)^{a(n(U),\sigma-n(U))+a(\sigma-n(U),v)}\,((\sigma-n(U))\cup\{v\})$$

wobei über alle $v \in (V-n(U))-(\sigma-n(U)) = V-\sigma$ summiert wird, die $(\sigma-n(U))\cup\{v\} \in \mathrm{link}_\Delta n(U)$, also $\sigma\cup\{v\}\in\Delta$ liefern.

Weiter gilt, vgl. (1.2.1.)

$$a(\sigma,v)+a(n(U),(\sigma\cup\{v\})-n(U)) = a(\sigma,v)+a(n(U),\sigma-n(U))+a(n(U),v)$$

$$a(n(U),\sigma-n(U))+a(\sigma-n(U),v) = a(n(U),\sigma-n(U))+a(\sigma,v)-a(n(U),v)$$

Damit folgt

$$\underline{B\delta(\sigma) = \delta B(\sigma)}$$ ⌧

(7) Mithin ist $[C^{\cdot}]_U = 0$ für $s(U)\notin\Delta$ und

$$\underline{[H^i_{\underline{m}}(R)]_U \cong \tilde{H}^{i-|n(U)|-1}(\mathrm{st}_{\mathrm{link}_\Delta n(U)}(s(U)-n(U)))}$$

wenn $s(U)\in\Delta$.

(8) Ist U "teilweise positiv", d.h. $s(U)-n(U)\neq\emptyset$, so ist der Stern, der in (7) figuriert, zusammenziehbar und damit azyklisch. Es ist also

$$\underline{[H^i_{\underline{m}}]_U = 0 \quad \text{wenn} \quad s(U)\neq n(U) \quad \text{oder} \quad s(U)\notin\Delta}.$$

(9) Ist andererseits $s(U)=n(U)\in\Delta$, so ist

$$\mathrm{st}_{\mathrm{link}_\Delta n(U)}(s(U)-n(U)) = \mathrm{st}_{\mathrm{link}_\Delta s(U)}(\emptyset) = \mathrm{link}_\Delta s(U)$$

so

$$\underline{[H^i_{\underline{m}}]_U \cong \tilde{H}^{i-|s(U)|-1}(\mathrm{link}_\Delta s(U))}$$

Berücksichtigt man noch (1.5.1.), so erhält man folgenden

(10) <u>Satz</u> (vgl. /14/) :

Es gibt einen k-Modulisomorphismus (vom Multigrad 0)

$$\underline{H^i_{\underline{m}}(R)} \cong \bigoplus_{\substack{-U\in\mathbb{N}^V\\ s(U)\in\Delta}} \underline{H^{i-1}(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta s(U))}$$

Damit sind als k-Moduln $H^{i+1}_{\underline{m}}(R)$ und

$$\bigoplus_{\emptyset\neq\sigma\in\Delta} (H^i(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta\sigma))^{\mathbb{N}^\sigma} \oplus \tilde{H}^i(\Delta)$$

isomorph.

<u>S. 2.</u> Sei k ein Körper. Dann sind simpliziale Homologien und Kohomologien dual.

Berechnen wir Tiefe und Endlichkeitsdimension von $R=k[\Delta]$, vgl. (3.6.).

(1) <u>Korollar</u> (/21;2.1./) :

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}_{\underline{m}} k[\Delta] - 1 &= \min(i : \tilde{H}_{i-/\sigma/}(\operatorname{link}_\Delta \sigma) \neq 0 \text{ f. ein } \sigma\in\Delta) \\ &= \min(i : H_i(\Delta, \operatorname{cost}_\Delta \sigma) \neq 0 \text{ f. ein } \sigma\in\Delta) \\ &= \min(i : H_i(/\Delta/, /\Delta/-p) \neq 0 \text{ f. ein } p\in/\Delta/ \\ &\qquad \text{oder } \tilde{H}_i(\Delta) \neq 0) \end{aligned}$$

Vgl. dazu (3.6.2.), obigen Satz und (1.5.1.-3.).

(2) <u>Korollar</u> : $\operatorname{endim}_{\underline{m}} k[\Delta] - 1 =$

$$\begin{aligned} &= \min(i : \tilde{H}_{i-/\sigma/}(\operatorname{link}_\Delta \sigma) \neq 0 \text{ f. ein } \emptyset\neq\sigma\in\Delta) \\ &= \min(i : H_i(\Delta, \operatorname{cost}_\Delta \sigma) \neq 0 \text{ f. ein } \emptyset\neq\sigma\in\Delta) \\ &= \min(i : H_i(/\Delta/, /\Delta/-p) \neq 0 \text{ f. ein } p\in/\Delta/) \end{aligned}$$

Das folgt ebenfalls aus den angegebenen Sätzen, wenn man noch bemerkt, daß $H^i_{\underline{m}}(R)$ als artinscher Modul genau dann als S-Modul endlich erzeugt ist, wenn er endliche Länge hat.

<u>Bemerkung</u> : Damit sind beides topologische Größen, d.h. sie hängen nur von den topologischen Eigenschaften der geometrischen Realisierung von Δ ab.

Beschreiben wir damit, wann $R=k[\Delta]$ Cohen-Macaulay bzw. Quasi-Cohen-Macaulay ist, vgl. (3.6.) :

(3) <u>Lemma</u> : Ist $k[\Delta]$ Quasi-CM, so ist $k[\Delta]$ ungemischt.

Beweis : Für jeden maximalen Simplex $\sigma\in\Delta$ gilt nach (2)

$$\tilde{H}_{i-/\sigma/}(\operatorname{link}_\Delta \sigma) = \tilde{H}_{i-/\sigma/}(\emptyset) = 0 \qquad \text{für } i<\dim\Delta .$$

Also ist $/\sigma/ \geq \dim\Delta + 1$, also $/\sigma/ = \dim\Delta + 1$ und Δ reindimensional. ⌘

(4) <u>Proposition</u> (/Sch;6.2.2./) : Ist $k[\Delta]$ Quasi-CM, so ist $k[\Delta]_{\underline{m}}$ bereits Buchsbaum.

Beweis : Nach obigem Satz und (2) besteht $H^i_{\underline{m}}(R)$ für $i<\dim\Delta+1$

r aus Elementen vom Grad 0. Damit folgt die Behauptung aus
ch;4.3.1./. ※

) Definition : Entsprechend (3.6.4.) nennen wir einen simpli-
zialen Komplex Δ Cohen-Macaulay (CM) oder Buchsbaum (BB) (über k), je nachdem, ob $k[\Delta]$ CM oder Quasi-CM ist (als $k[\Delta]$ - bzw. $S(V)$-Modul, was nach (3.6.6.) egal ist).

nit gilt

) Korollar : Folgende Aussagen sind äquivalent

(a) Δ ist Buchsbaum

(b) $k[\Delta]_{\underline{m}}$ ist ein Buchsbaummodul

(c) $H_i(/\Delta/,/\Delta/-p) = 0$ f.alle $i < \dim\Delta$ und $p \in /\Delta/$

(d) $H_i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) = 0$ f.alle $i < \dim\Delta$ und $\emptyset \neq \sigma \in \Delta$

(e) $\widetilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta \sigma) = 0$ f.alle $i < \dim\Delta - /\sigma/$ und $\emptyset \neq \sigma \in \Delta$

(vgl. /Sch;6.2.1./)

Ist Δ zusammenhängend, so sind diese Bedingungen darüber hinaus äquivalent zu

(e') $\widetilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta \sigma) = 0$ f.alle $i < \dim(\mathrm{link}_\Delta \sigma)$ und $\emptyset \neq \sigma \in \Delta$

diskutieren ist nur noch (e'). Das folgt aber aus der Reindi-
nsionalität von Δ nach (1.6.4.) bei (e') $\Rightarrow$ (e) bzw. (3) bei
$\Rightarrow$ (e') und (1.4.2.). ※

Bemerkung : Die Bedingung "zusammenhängend" kann man durch die
rderung, daß alle Zusammenhangskomponenten von Δ gleiche Di-
nsion haben, abschwächen. Auch dann kann man noch (1.4.2.)
wenden, denn nach (1.6.4.) sind die Zusammenhangskomponenten
bst reindimensional.

Sind diese dagegen nicht von gleicher Dimension, so ist Δ,
wohl (e') erfüllt sein kann (vgl. Beispiel (1.6.5.)), nicht
hsbaum nach (3).

Korollar (/St;Th.5/,/23;Th.1/) :

Folgende Aussagen sind äquivalent

(a) Δ ist Cohen-Macaulay

(b) Δ ist Buchsbaum und $\tilde{H}_i(\Delta) = 0$ f.alle $i < \dim\Delta$

(c) $\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta \sigma) = 0$ f.alle $i < \dim(\mathrm{link}_\Delta \sigma)$ und $\sigma\in\Delta$

er bleibt nur (c) zu diskutieren. Für $\dim\Delta > 0$ und $\sigma = \emptyset$ ist
ch (c) $\tilde{H}_0(\Delta) = 0$, d.h. Δ zusammenhängend und so (5c') anwend-
r. Der Fall $\dim\Delta = 0$ ist trivial. ∎

) Korollar : Folgende Bedingungen sind äquivalent

(a) Δ ist N-dimensional Buchsbaum

(b) F.alle $v\in V$ ist $\mathrm{link}_\Delta(v)$ (N-1)-dimensional CM

(c) F.alle $\emptyset\neq\sigma\in\Delta$ ist $\mathrm{link}_\Delta\sigma$ $(N-/\sigma/)$-dimensional CM

eis : (a) $\Rightarrow$ (c) : Sei $\tau\in\mathrm{link}_\Delta\sigma$. Dann ist nach (1.4.1.)

$$\mathrm{link}_{\mathrm{link}_\Delta\sigma}\tau = \mathrm{link}_\Delta \sigma\,\dot\cup\,\tau$$

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_{\mathrm{link}_\Delta\sigma}\tau) = \tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta\sigma\,\dot\cup\,\tau) = 0$$

$$\text{für } i < N-/\sigma\,\dot\cup\,\tau/ = (N-/\sigma/)-/\tau/$$

h (6e). Nach (7b) ist dann $\mathrm{link}_\Delta\sigma$ $(N-/\sigma/)$-dimensional CM.

$\Rightarrow$ (a) : Sei $\emptyset\neq\sigma\in\Delta$ und $v\in\sigma$. Dann ist nach (1.4.1.) und (7b)

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta\sigma) = \tilde{H}_i(\mathrm{link}_{\mathrm{link}_\Delta(v)}(\sigma-(v))) = 0$$

$$\text{für } i < N-1-/\sigma-(v)/ = N-/\sigma/$$

o Δ Buchsbaum nach (6e). ∎

Ist $k = \mathbb{Z}$, so müssen wir die Lokalisierungen nach den homo-
en maximalen Idealen

$$\underline{m}' = (p) + \underline{m}$$

$\in\mathbb{N}$ - Primzahl ; $\underline{m}$ - irrelevantes Ideal) untersuchen, vgl.(3.6.4.)
sner entwickelt dafür folgende Idee (/23;p.45-46/) :

p ist Nichtnullteiler in $\mathbb{Z}[\Delta]_{\underline{m}'}$.

$$\mathbb{Z}[\Delta]_{\underline{m}'}/p\,\mathbb{Z}[\Delta]_{\underline{m}'} \cong (\mathbb{Z}[\Delta]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/(p))_{\underline{m}'} \cong (\mathbb{Z}/(p)[\Delta])_{\underline{m}}$$

it ist Δ Cohen-Macaulay bzw. Buchsbaum über $\mathbb{Z}$ genau dann,
n es CM bzw. BS über allen Primkörpern $\mathbb{Z}/(p)$ $(P>0$ prim)

Aus dem Universalkoeffiziententheorem (/Sp;5.2.8./)

$$H_q(\Sigma ; \mathbb{Z}/(p)) \cong H_q(\Sigma ; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{q-1}(\Sigma ; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(p))$$

ür einen simplizialen Komplex Σ folgt damit sofort, daß
6)-(8) auch für $k = \mathbb{Z}$ gelten.

Im Folgenden wollen wir deshalb unter $\operatorname{depth} \mathbb{Z}[\Delta]$ und
ndim $\mathbb{Z}[\Delta]$ die durch (1) bzw. (2) definierten Größen verstehen.
us dem Universalkoeffiziententheorem folgt dann auch

$$\begin{aligned} \operatorname{depth} \mathbb{Z}[\Delta] &= \min(\operatorname{depth} \mathbb{Z}/(p)[\Delta] : p - \text{prim}) \\ \operatorname{endim} \mathbb{Z}[\Delta] &= \min(\operatorname{endim} \mathbb{Z}/(p)[\Delta] : p - \text{prim}) \end{aligned}$$

5.3. Untersuchen wir, wie sich die S-Modulstruktur bei den in
.1.) beschriebenen Isomorphismen auf die rechte Seite von
.1.10.) überträgt. Dabei genügt es, die Multiplikationsabbil-
ngen

$$.x^W : [H^i_{\underline{m}}]_U \longrightarrow [H^i_{\underline{m}}]_{U+W} \qquad U \in \mathbb{Z}^V ,\ W \in \mathbb{N}^V \qquad (1)$$

verfolgen.

) Lemma : Die Multiplikationsabbildung (1) induziert auf der
rechten Seite von (5.1.10.)

(a) die Nullabbildung, wenn U oder $U+W$ teilweise positiv sind oder $s(U) \notin \Delta$ gilt.

(b) $e^{i-1} : H^{i-1}(\Delta, \operatorname{cost}_\Delta s(U)) \longrightarrow H^{i-1}(\Delta, \operatorname{cost}_\Delta s(U+W))$
wenn $s(U) \in \Delta$ und $0 \leq W \leq -U$,vgl.(1.5.2.)

Bemerkung : Ist $0 \leq W \leq -U$, so ist $s(U+W) \subset s(U)$, also mit
$s(U) \in \Delta$ auch $s(U+W) \in \Delta$ und $\operatorname{cost}_\Delta s(U+W) \subset \operatorname{cost}_\Delta s(U) \subset \Delta$.

eis : (a) : Ist U oder $U+W$ teilweise positiv oder $s(U) \notin \Delta$,
ist nach (5.1.8.) $[H^i_{\underline{m}}]_U = 0$ oder $[H^i_{\underline{m}}]_{U+W} = 0$.

: Gilt (a) nicht, so ist $U \leq 0$ und $U+W \leq 0$, also $0 \leq W \leq -U$
$s(U) \in \Delta$. Verfolgen wir die Multiplikationsabbildung (1) über
e Isomorphismen (5.1.5.-10.) hinweg :
ie Multiplikationsabbildung

$$.x^W : [C^i]_U \longrightarrow [C^i]_{U+W} \qquad \text{via} \qquad (x^U)_\sigma \longmapsto (x^{U+W})_\sigma$$

ht bei (5.1.5.) wegen $0 \leq W \leq -U$ über in

$$\tilde{C}^{i-1}(\sigma \in \Delta : s(U) \subset \sigma) \longrightarrow \tilde{C}^{i-1}(\sigma \in \Delta : s(U+W) \subset \sigma)$$

$$\text{via} \quad \sigma \longmapsto \sigma$$

d bei (5.1.6.) und (1.5.1.) in

$$e^{i-1} : \tilde{C}^{i-1}(\Delta, \mathrm{cost}_{\Delta} s(U)) \longrightarrow \tilde{C}^{i-1}(\Delta, \mathrm{cost}_{\Delta} s(U+W))$$

$$\text{via} \quad \sigma + \mathrm{cost}_{\Delta} s(U) \longmapsto \sigma + \mathrm{cost}_{\Delta} s(U+W)$$

s man leicht nachrechnet. ☒

Damit gilt folgendes

) Theorem : Es gibt einen (multihomogenen vom Grad 0) S-Modul-Isomorphismus

$$H^{i}_{\underline{m}}(k[\Delta]) = \bigoplus_{\substack{-U \in \mathbb{N}^V \\ s(U) \in \Delta}} H^{i-1}(\Delta, \mathrm{cost}_{\Delta} s(U))$$

wenn man auf der rechten Seite via (2) eine S-Modulstruktur definiert.

) Bemerkung : In (1.5.1.) kann man wegen

$$\begin{array}{ccc} \cdot x^{W} : (x^{U})_{\sigma} & \longrightarrow & (x^{U+W})_{\sigma} \quad \text{oder } 0 \\ \Big\downarrow \wr & & \Big\downarrow \wr \\ \sigma \in \tilde{C}^{i}_{U} & \longrightarrow & \sigma \in \tilde{C}^{i}_{U+W} \quad \text{oder } 0 \end{array}$$

Multiplikationsabbildung auch auf $\tilde{C}^{i}_{U}$ übertragen.

5. Dualisierender Komplex und kanonischer Modul

In diesem Kapitel sei k ein Körper.

5.1. Definition (vgl. /10;8.1./) :

Ein dualisierender Komplex über dem (lokalen noetherschen) Ring $(R,\underline{m})$ ist ein Komplex

$$I^{\cdot}: 0 \to I_0 \to I_1 \to \dots \to I_n \to 0 \qquad (1)$$

injektiver R-Moduln mit endlich erzeugten Kohomologien, so daß der natürliche Morphismus

$$R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I^{\cdot}, I^{\cdot})$$

einen Isomorphismus in den Kohomologien erzeugt.

(R wird als Komplex aufgefaßt, der in der nullten Komponente konzentriert ist)

5.2. Proposition (vgl. /10;8.5./) :

Ist $I^{\cdot}$ ein Komplex (1) injektiver Moduln mit endlich erzeugten Kohomologien, so ist $I^{\cdot}$ ein dualisierender Komplex genau dann, wenn

$$\mathrm{Hom}_S(k, I^{\cdot}) \cong k[-m] \qquad \text{für ein } m \in \mathbb{Z}$$

gilt. (Wobei $k[-m]$ der Komplex ist, dessen m-te Komponente $k = R/\underline{m}$ und dessen andere Komponenten alle 0 sind)

Im nächsten Punkt benötigen wir das analoge Resultat für die Kategorie der multihomogenen S(V)-Moduln.

5.3. Hom bezeichne den Hom-Funktor der Kategorie der homogenen Moduln. Seien C^i wie in (5.1.1.),

$$C_i := \mathrm{Hom}_k(C^i, k) = \bigoplus_{U \in \mathbb{Z}^V} [\mathrm{Hom}_k(C^i, k)]_U \cong \bigoplus_{U \in \mathbb{Z}^V} \mathrm{Hom}_k([C^i]_{-U}, k)$$

$\cong \oplus \tilde{C}_{i-1}(\sigma \subset V \mid n(-u) \subset \sigma, s(u) \cup \sigma \in \Delta)$

mit der natürlichen Multigraduierung und

$$D_i := \bigoplus_{U \geq 0} [C_i]_U \cong \bigoplus_{U \geq 0} C_{i-1}(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma(U))$$

ist Untermodul des R-Moduls C_i, vgl. (5.2.)

<u>Theorem</u> : Sei Δ ein simplizialer Komplex, $N = \dim \Delta$.

$$C.: 0 \longrightarrow C_{N+1} \longrightarrow C_N \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_a \longrightarrow 0$$

der Komplex, der aus (5.1.1.) durch Anwendung von $\mathrm{Hom}_k(.,k)$ entsteht, ist ein dualisierender Komplex von $R=k[\Delta]$ (in der Kategorie der homogenen R-Moduln).

Der Unterkomplex

$$D.: 0 \longrightarrow D_{N+1} \longrightarrow D_N \longrightarrow \ldots \longrightarrow D_a \longrightarrow 0$$

von C. ist quasiisomorph zu C., d.h. die Einbettung $D. \subset C.$ induziert einen Isomorphismus in den Homologien.

ist ein Unterkomplex von C., da die Randabbildungen von C. ltihomogen sind, vgl. (5.1.1.).

weis : (1) Alle C^i sind flache R-Moduln : Sei M ein R-Modul. nn gilt nach (5.1.1.)

$$M \otimes_R C^i = \bigoplus_{/\sigma/=i} M \otimes_R R_{x_\sigma} \cong \bigoplus_{/\sigma/=i} M_{x_\sigma}$$

mit ist $.\otimes C^i$ exakt, da Lokalisieren ein exakter Funktor ist.

) Alle C_i sind injektive Moduln, denn

$$\mathrm{Hom}_R(.,C_i) = \mathrm{Hom}_R(.,\mathrm{Hom}_k(C^i,k)) \cong \mathrm{Hom}_k(.\otimes_R C^i,k)$$

exakt, da $.\otimes C^i$ und $\mathrm{Hom}_k(.,k)$ exakt sind (nach (1) bzw. als lisierung in einem Vektorraum).

Speziell folgt

$$\mathrm{Hom}_R(k,C_i) \cong \mathrm{Hom}_k(k\otimes_R C^i,k)$$

wegen (1)

$$k\otimes_R C^i \cong \bigoplus_{/\sigma/=i} k_{x_\sigma}$$

$\sigma \neq \emptyset$ ist $x_\sigma \in \underline{m}$, also $k_{x_\sigma} = 0$ und damit

$$\mathrm{Hom}_k(k\otimes_R C^i,k) \cong \begin{cases} k & \text{für } i=0 \\ 0 & \text{für } i>0 \end{cases}$$

glich ist

$$\mathrm{Hom}_R(k,C.) \cong k \quad .$$

C. und D. sind quasiisomorph : Da die Randabbildungen der omplexe nach (5.1.1.) multihomogen vom Grad 0 sind, genügt es, zu zeigen, daß $[C.]_U$ und $[D.]_U$ gleiche Homologien haben bzw., da $\mathrm{Hom}_k(.,k)$ exakt ist, daß das für $[C^{\cdot}]_U$ und $[D^{\cdot}]_U$ gilt (/8;4.7.2./)

$$[D^{\cdot}]_U := \begin{cases} [C^{\cdot}]_U & \text{für } U \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

s folgt aber aus (5.1.8.).

) Die Homologien von $D.$ sind endlich erzeugt, da $S.$ endlich zeugt ist, vgl. (5.3.). ※

5.3. Sei $r=r(\Delta)$, $R=k[\Delta]$, $N=r-1$.

Wendet man auf $H^r_{\underline{m}}(R)$ den dualisierenden Funktor $^* = \mathrm{Hom}_k(.,k)$, bekommt man die Komplettierung des kanonischen Moduls K_Δ n R, falls dieser existiert, vgl. (3.7.1.). Damit gilt

Theorem : Es gibt einen (multihomogenen vom Grad 0) S-Modul-Isomorphismus

$$\underline{K_\Delta} \cong \bigoplus_{\substack{U \in \mathbb{N}^V \\ s(U) \in \Delta}} \underline{H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U))}$$

wenn man die rechte Seite mit der S-Modulstruktur aus (5.3.) versieht.

weis : (5.3.3.) liefert nach Anwendung von $*$

$$\hat{K}_\Delta \cong \prod_{\substack{-U \in \mathbb{N}^V \\ s(U) \in \Delta}} \left(H^N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U))\right)^*$$

t der Multiplikationsabbildung 0 bzw. $(a^N)^*$ nach (5.3.2.).

m Dualisieren ist aber nach (3.2.3.)

$$[\mathrm{Hom}_k(M,k)]_U = \mathrm{Hom}_k([M]_{-U},k)$$

etzt man noch $(H^N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U)))^*$ durch $H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U))$ und $)^*$ durch a_N, erhält man den geforderten Isomorphismus.

bleibt noch zu zeigen, daß K_Δ endlich erzeugt ist. Das folgt r wieder aus (5.3.2.). ※

emerkung : Für $k=\mathbb{Z}$ wollen wir formal den Modul

$$K_\Delta := \bigoplus_{\substack{U \in \mathbb{N}^V \\ s(U) \in \Delta}} H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U); \mathbb{Z})$$

...it der beschriebenen S-Modulstruktur als kanonischen Modul be-
...ichnen.

5.4. Damit können wir die Hilbert-Poincaré-Reihe von K_Δ an-
...ben :

...) Satz :

$$F_N(K_\Delta;\underline{t}) = \sum_{\sigma\in\Delta} h_N(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta\sigma)\prod_{v\in\sigma}\frac{t_v}{1-t_v}$$

$$\text{mit}\quad h_N(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta\sigma) := \dim_k H_N(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta\sigma)$$

...weis :

$$F_N(K_\Delta;\underline{t}) = \sum_{U:s(U)\in\Delta} h_N(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta s(U))\,\underline{t}^U$$

$$= \sum_{\sigma\in\Delta} h_N(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta\sigma)\prod_{v\in\sigma}\frac{t_v}{1-t_v}$$

...alog (3.4.1.). ■

Speziell ist $\dim K_\Delta = \dim R$. Das gilt aber generell für den ...nonischen Modul, vgl. /Sch;S.60/.

6.5. Nach /HK;6.7./ ist bekannt, daß für CM-Ringe R K_R in R ...ngebettet werden kann, wenn $R_{\mathfrak{p}}$ für alle minimalen Primideale ... Ass(R) Gorenstein ist (dies gilt generell für Ringe mit dua-...sierendem Komplex).

Die minimalen zu $k[\Delta]$ assoziierten Primideale sind nach (2.3.4.) ...rade die $\mathfrak{p}=A(\sigma)$, für die $\sigma\in\Delta$ maximal ist. Man zeigt leicht, ...l. (11.5.), daß für diese Primideale gerade

$$k[\Delta]_{\mathfrak{p}} \cong k(x_v : v\in\sigma)[\emptyset] = k(x_v : v\in\sigma)$$

...lt. Diese Ringe (in Wirklichkeit Körper) sind natürlich Goren-...ein.

Wir wollen nun eine solche Abbildung, die den kanonischen Modul ... von $R=k[\Delta]$ in R einbettet, explizit beschreiben.

Bilden wir dazu $H_N(\Delta,\mathrm{cost}_\Delta\sigma)$ folgendermaßen auf R ab :

$$\sum a_\tau \tau + C_N(\mathrm{cost}_\Delta\sigma) \longmapsto \sum a_\tau x_\tau x_\sigma$$

...bei ist $\dim\Delta = N$).

Sei $I(\Delta)$ das Ideal von R, das von den Bildern aller $H_M(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$; $\sigma \in \Delta$, erzeugt wird.

Dann gilt folgendes

<u>Theorem</u> :

$$\varphi : K_\Delta \longrightarrow R = k[\Delta]$$

via

$$\overline{\sum_{\dim\sigma = N} a_\sigma \sigma} + \tilde{C}_M(\mathrm{cost}_\Delta s(U)) \longmapsto \sum a_\sigma x_\sigma x^U$$

definiert eine Einbettung von K_Δ in R, die homogen vom Grad rod+2 in der einfachen Graduierung, vgl. (2.4.) ist.

(Dies bleibt für $k = \mathbb{Z}$ richtig)

Beweis : (1) φ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab :

$$\sum a_\sigma x_\sigma x^U = \sum_{\sigma \supset s(U)} a_\sigma x_\sigma x^U \; ; \quad \text{da} \quad x_\sigma x^U = 0 \quad \text{für } \sigma \not\supset s(U)$$

(denn $\mathrm{Supp}(x_\sigma x^U) \supsetneq \sigma$, aber σ ist maximal in Δ).

(2) φ ist ein S-Modul-Homomorphismus : Das folgt unmittelbar aus der Definition der Multiplikationsabbildung

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\sum a_\sigma \sigma} \in H_M(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U)) & \xrightarrow{\varphi} & \sum a_\sigma x_\sigma x^U \\
\Big\downarrow \cdot x^W & & \Big\downarrow \cdot x^W \\
\overline{\sum a_\sigma \sigma} \in H_M(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U+W)) & \xrightarrow{\varphi} & \sum a_\sigma x_\sigma x^{U+W}
\end{array}$$

(3) φ ist injektiv : Sei $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ und

$$a = \sum a_U \; ; \quad a_U = \overline{\sum_{\sigma \supset s(U)} a^U_\sigma \sigma} \in H_M(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U))$$

Dann ist

$$0 = \varphi(a) = \sum_U \sum_{\sigma \supset s(U)} a^U_\sigma x_\sigma x^U$$

Multiplizieren wir mit x_τ (τ = höchstdimensional)

$$0 = \sum_{\tau \supset s(U)} a^U_\tau x_\tau^2 x^U$$

da für $\sigma \neq \tau$ $x_\sigma x_\tau = 0$, denn wie oben ist dann $\mathrm{Supp}(x_\sigma x_\tau) \not\subset \Delta$.

Damit ist $a^U = 0$ für alle U mit $s(U) \subset \tau$, denn für $U_1 \neq U_2$ ist

$$\deg_M(x_\tau^2 x^{U_1}) \neq \deg_M(x_\tau^2 x^{U_2})$$

Damit ist <u>a=0</u>.

4) Die restlichen Behauptungen sind evident. ∎

Bemerkung : Dieses Resultat zeigt den natürlichen Zugang zu
nem Ergebnis aus /4/ und erweitert dieses beträchtlich.

6.6. Wenden wir uns nun den Erzeugenden des kanonischen Mo-
uls K_Δ zu. Nach (6.3.) ist

1) $\underline{[K_\Delta/\mathfrak{m}K_\Delta]_U \cong \mathrm{Coker}\big(\bigoplus_{0\leq V<U} H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(V)) \longrightarrow H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U))\big)}$

Damit wird K_Δ von multihomogenen Elementen erzeugt, deren
rad $U \in (0,1)^V \subset \mathbb{N}^V$, $s(U) \in \Delta$ erfüllt, und hat mindestens
$\dim_k \tilde{H}_N(\Delta)$ Erzeugende.

2) K_Δ wird genau dann nur von $\tilde{H}_N(\Delta)$ erzeugt, wenn die Abbil-
ungen

$$a_N : \tilde{H}_N(\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$$

urjektiv sind für alle $\sigma \in \Delta$. Aus der langen Homologiesequenz

$$\tilde{H}_N(\Delta) \to H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) \to \tilde{H}_{N-1}(\mathrm{cost}_\Delta \sigma) \to \tilde{H}_{N-1}(\Delta)$$

olgt, daß das speziell für $\tilde{H}_{N-1}(\mathrm{cost}_\Delta \sigma) = 0$ $(\emptyset \neq \sigma \in \Delta)$ so ist.
st $\tilde{H}_{N-1}(\Delta) = 0$ (z.B. wenn Δ CM ist), so sind beide Aussagen so-
ar äquivalent.

3) Definition : Ein simplizialer Komplex Δ heißt **2-CM**, wenn Δ
CM ist und für jede Ecke $v \in V$

$$\mathrm{cost}_\Delta(v) = \Delta_{V-(v)}$$

CM von derselben Dimension wie Δ ist. (vgl. /4/)

Proposition (/4;Th.2/) : Sei Δ CM
K_Δ wird genau dann von $\tilde{H}_N(\Delta)$ erzeugt, wenn Δ 2-CM ist.

iese Tatsache läßt sich auch aus (2) und einem Mayer-Vietoris-
rgument aus

$$\mathrm{cost}_\Delta \sigma = \bigcup_{v\in\sigma} \mathrm{cost}_\Delta(v)$$

bleiten.

(*) Δ - CM, $\dim \Delta = N$. Dann
$\forall$ $\mathrm{cost}_\Delta(x)$ CM der $\dim = N$
$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\tilde{H}_{N-1}(\mathrm{cost}_\Delta \sigma) = 0$

uasimannigfaltigkeiten

.1. Definition : Sei k ein Körper oder $\mathbb{Z}$ und Δ ein reindimensionaler N-dimensionaler simplizialer Komplex, der den folgenden Bedingungen genügt :

(1) Jedes (N-1)-dimensionale Simplex $\varepsilon \in \Delta$ ist in höchstens zwei N-dimensionalen Simplexen enthalten.

(2) Für alle $\emptyset \neq \tau \in \Delta$, $\dim \tau < N-1$ ist $\mathrm{link}_\Delta \tau$ zusammenhängend, d.h. $\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0$.

Einen solchen simplizialen Komplex nennen wir Quasi-N-Mannigfaltigkeit.

die Definition nur kombinatorische Eigenschaften des simpliien Komplexes ausnutzt, hängt die Eigenschaft, Quasimannigtigkeit zu sein, nicht von k ab.

emerkung : Ein (nicht unbedingt reindimensionaler) simplizia Komplex Δ , der (1) und (2) erfüllt, hat reindimensionale sammenhangskomponenten nach (1.6.4.), denn für $\tau \in \Delta$:

$(\mathrm{link}_\Delta \tau) \geq 1$ ist $\dim \tau \leq N-2$. Ist Δ' eine Zusammenhangsmponente von Δ und $\dim \Delta' < \dim \Delta$, so kann man wie im Bes von (1.6.4.) zeigen, daß Δ' keine zwei maximalen Simplexe t enthalten kann, d.h. daß Δ' selbst ein Simplex ist. Δ ist it die (disjunkte) Vereinigung einer Quasi-N-Mannigfaltigkeit endlich vieler (disjunkter) Simplexe.

) (1) bedeutet, daß $\mathrm{link}_\Delta \varepsilon$ aus höchstens zwei Punkten beht, d.h. daß mit (1.5.1.)

$$\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \varepsilon) \cong H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \varepsilon)$$

oder 1-dimensionale k-Vektorräume (freie $\mathbb{Z}$-Moduln) sind.

) Lemma : Ist $\Delta' \subset \Delta$ ein Unterkomplex der Quasi-N-Mannigfaltigkeit Δ , so ist $U := \Delta - \Delta'$ zusammenhängend genau dann, wenn für je zwei N-dimensionale $\sigma, \tau \in U$ eine Kette

$$\sigma = \sigma_0 \supset \sigma_1 \subset \sigma_2 \supset \ldots \subset \sigma_{2m} = \tau$$

mit $\sigma_j \in U$; $\dim \sigma_{2i+1} = N-1$ $(j=0,\ldots,2m\ ;\ i=0,\ldots,m-1)$
existiert.

Beweis : Das folgt sofort aus (2) und (1.6.3.) $\#$

Bemerkung : Damit ist der Begriff der zusammenhängenden Quasimannigfaltigkeit etwas spezieller als der der Pseudomannigfaltigkeit, vgl. /Sp;30/, /25;324/. Von Pseudomannigfaltigkeiten fordert man statt (2) die schwächere Bedingung

(2') Zu je zwei N-dimensionalen Simplexen $\sigma, \sigma' \in \Delta$ gibt es eine Sequenz $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_m = \sigma'$ N-dimensionaler Simplexe, so daß σ_i und σ_{i+1} je ein (N-1)-dimensionales Simplex gemeinsam haben.

Vgl. dazu folgendes Beispiel, das (2') erfüllt, (2) aber nicht :

$\Delta = \{(013),(023),(014),(234)\}$

($\mathrm{link}_\Delta(4)$ ist nicht zusammenhängend)

(5) Lemma : Für eine Quasimannigfaltigkeit Δ ist $\Delta - \mathrm{cost}_\Delta \varepsilon$ $(\emptyset \neq \varepsilon \in \Delta)$ zusammenhängend.

Beweis : Für $\dim \varepsilon \geq N-1$ ist nichts zu zeigen .
Für $\dim \varepsilon < N-1$ folgt die Behauptung aus (2) und der eineindeutigen inklusionserhaltenden Korrespondenz zwischen $\mathrm{link}_\Delta \varepsilon$ und $\Delta - \mathrm{cost}_\Delta \varepsilon$ via $\tau \longmapsto \tau \cup \varepsilon$. $\#$

7.2. Hauptlemma : Sei Δ eine Quasi-N-Mannigfaltigkeit und $\Delta' \subset \Delta'' \subset \Delta$ Unterkomplexe.

Ist $\Delta - \Delta'$ zusammenhängend, dann ist

$$a_N : H_N(\Delta, \Delta') \longrightarrow H_N(\Delta, \Delta'')$$

injektiv.

Speziell gilt das bei $\emptyset \neq \tau \subset \sigma \in \Delta$ für

$$a_N : H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau) \longrightarrow H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$$

und wenn Δ zusammenhängend ist, für

$$a_N : \widetilde{H}_N(\Delta) \longrightarrow H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$$

eweis : Sei

$$z = \sum a_\varepsilon \varepsilon + \tilde{C}_N(\Delta') \in H_N(\Delta, \Delta').$$

ir zeigen, daß entweder alle $a_\varepsilon \neq 0$ sind oder alle $a_\varepsilon = 0$. Daraus folgt die Behauptung, denn a_N ist die Restriktionsabbildung, to $\tilde{C}_N(\Delta')$ durch $\tilde{C}_N(\Delta'')$ ersetzt.

z liegt in $H_N(\Delta, \Delta')$ genau dann, wenn $\partial z = \sum a_\varepsilon \partial \varepsilon \in \tilde{C}_{N-1}(\Delta')$.

$$\sum a_\varepsilon \partial \varepsilon = \sum_\varepsilon a_\varepsilon \Big(\sum_{\varepsilon' \subset \varepsilon} (-1)^{a(\varepsilon, \varepsilon - \varepsilon')} \varepsilon' \Big)$$

wobei über alle (N-1)-dimensionalen $\varepsilon' \in \Delta$ summiert wird,

$$= \sum_{\varepsilon'} \Big(\sum_{\varepsilon \supset \varepsilon'} a_\varepsilon (-1)^{a(\varepsilon, \varepsilon - \varepsilon')} \Big) \varepsilon'$$

amit ist

) $z \in H_N(\Delta, \Delta') \Leftrightarrow \sum_{\varepsilon \supset \varepsilon'} a_\varepsilon (-1)^{a(\varepsilon, \varepsilon - \varepsilon')} = 0$ f.alle $\varepsilon' \in \Delta - \Delta'$

Nach (7.1.1.) ist ε' jedoch in höchstens zwei maximalen Simplexen enthalten und die Gleichungen (2) nehmen die Gestalt

a) $a_\varepsilon = 0$, wenn ε einziges höchstdimensionales Simplex, das ε' enthält, ist, bzw.

b) $a_{\varepsilon_1} \pm a_{\varepsilon_2} = 0$, wenn ε' in den beiden höchstdimensionalen Simplexen ε_1 und ε_2 enthalten ist, an.

i nun $a_\varepsilon = 0$ und $\xi \in \Delta - \Delta'$ ein anderes höchstdimensionales Simplex. Da $\Delta - \Delta'$ zusammenhängend ist, gibt es nach (7.1.4.) eine kte

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \supset \varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \supset \ldots \subset \varepsilon_{2n} = \xi$$

$\Delta - \Delta'$, in der ε_{2i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ (N-1)-dimensional sind. st man die entsprechenden Gleichungen (2b) nacheinander auf, so hält man schließlich $a_\xi = 0$. ∗

) <u>Bemerkung</u> : Der Beweis zeigt, daß $H_N(\Delta, \Delta')$ entweder Null t oder von einem Zyklus erzeugt werden kann, der alle $\in C_N(\Delta, \Delta')$ mit den Koeffizienten ± 1 enthält, und isomorph k t.

4) Nach dem Lemma ist für zusammenhängende Quasimannigfaltig-
keiten

$$(\mathrm{Bd}\,\Delta)_k := \{\, \sigma \in \Delta \;:\; H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma \;;\; k\,) = 0 \,\}$$

ein Unterkomplex von Δ, den wir den <u>Rand</u> von Δ nennen wollen.
iese Definition hängt wesentlich von k ab, vgl. (7.4.3.). Wir
essen den Index k weg, wenn dies nicht zu Mißverständnissen
führen kann.

Obige Definition des Randes weicht von der üblichen (/Sp;3C/,
25;§24/) für Pseudomannigfaltigkeiten ab, vgl. aber (7.3.2.).
ewöhnlich bezeichnet man nur die Simplexe zum Rand gehörig, die
n einem (N-1)-dimensionalen Simplex aus $\mathrm{Bd}\Delta$ enthalten sind. Die
nabhängigkeit dieses Randbegriffs von k folgt aus (7.1.3.).
5) Ist Δ zusammenhängend und $\mathrm{Bd}\Delta \neq \emptyset$, so ist $\emptyset \in \mathrm{Bd}\Delta$, also

$$\underline{\widetilde{H}_N(\Delta) = H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \emptyset) = 0.}$$

7.3. Beispiele

1) Sei Δ eine (endliche) Triangulierung einer (kompakten trian-
gulierbaren) N-Mannigfaltigkeit, vgl. /Sp/. Aus dem Ausschnei-
dungssatz folgt dann sofort, vgl. (1.5.3.) :

$$H_i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) \cong H_i(/\Delta/, /\Delta/ - \hat{\sigma}) = 0 \qquad \text{für} \quad i < N$$

$$H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) \cong H_N(/\Delta/, /\Delta/ - \hat{\sigma}) = \begin{cases} k & \text{f.} \quad \hat{\sigma} \in \mathrm{Int}/\Delta/ \\ 0 & \text{f.} \quad \hat{\sigma} \in \mathrm{Bd}/\Delta/ \end{cases}$$

$$(\,\emptyset \neq \sigma \in \Delta\,)$$

pezIell ist jede Triangulierung einer Mannigfaltigkeit Buchs-
baum, vgl. (5.2.6c) und eine Quasimannigfaltigkeit.
/Bd Δ/ im oben definierten Sinne fällt für die Triangulierung
iner zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit Bd/Δ/ zusammen und
t eine (N-1)-dimensionale (oder leere) Mannigfaltigkeit ohne

and, vgl. /Sp;6.2./.

2) Jeder Buchsbaumkomplex, der (7.1.1.) erfüllt, ist eine Quasi-
mannigfaltigkeit, vgl. (5.2.3. und 6e). Mehr noch, aus (5.2.6d)
folgt ebenfalls für $N = \dim \Delta$:

$$H_i(\Delta, \operatorname{cost}_\Delta \tau) = 0 \qquad \text{für } i < N$$

$$H_N(\Delta, \operatorname{cost}_\Delta \tau) \cong \begin{cases} k & \text{für } \tau \notin \operatorname{Bd} \Delta \\ 0 & \text{für } \tau \in \operatorname{Bd} \Delta \end{cases}$$

$$\text{und } \emptyset \neq \tau \in \Delta$$

In Anlehnung an (1) nennen wir deshalb Buchsbaumquasimannigfaltigkeiten <u>Homologiemannigfaltigkeiten</u> (über k).

Über $\mathbb{Z}$ fällt dieser Begriff (einschließlich der Definition des Randes !) mit der in /Sp;58/ gegebenen zusammen. Lefschetz /18; S.195/ nennt Homologiemannigfaltigkeiten über $\mathbb{Z}$ "combinatorial manifolds", /25;§68/ einfach "Mannigfaltigkeiten", Pontrjagin /22;S.181/ "h-Mannigfaltigkeiten".

3) <u>Korollar</u> : Ein N-dimensionaler Buchsbaumkomplex ($N > 1$) ist eine Homologiemannigfaltigkeit genau dann, wenn für alle $\sigma \in \Delta$; $\dim \sigma = N-2$ $\operatorname{link}_\Delta \sigma$ Triangulierung einer Kreislinie oder Strecke ist.

Beweis : (7.1.1.) gilt genau dann, wenn kein $\operatorname{link}_\Delta \sigma$ für $\dim \sigma = N-2$ "Verzweigungen" hat. (7.1.2.) ist für Buchsbaumkomplexe automatisch erfüllt, siehe oben. □

4) <u>Korollar</u> : Eine Homologiemannigfaltigkeit ist CM genau dann, wenn $\tilde{H}_i(\Delta) = 0$ für alle $i < \dim \Delta$.

Vgl. (5.2.7b).

5) <u>Satz</u> : Ist Δ eine zusammenhängende Homologiemannigfaltigkeit über $\mathbb{Z}$, so gilt

$$(\operatorname{Bd} \Delta)_{\mathbb{Z}} = (\operatorname{Bd} \Delta)_k$$

für alle Körper k.

Beweis : Sei $N = \dim \Delta$. Nach (5.2.9.) ist Δ Buchsbaum über k und somit $\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta \sigma ; k) = H_i(\mathrm{link}_\Delta \sigma ; \mathbb{Z}) = 0$ f. $i \neq N - /\sigma/$,

vgl. (5.2.5.). Damit ist

$$\tilde{H}_{N-/\sigma/}(\mathrm{link}_\Delta \sigma ; k) = 0 \Leftrightarrow \chi(\mathrm{link}_\Delta \sigma) = 0 ,$$

vgl. (1.2.4.) Die Eulercharakteristik ist aber eine kombinatorische Invariante und hängt nicht von der Wahl des Grundkörpers ab.

$\ast$

(6) <u>Satz</u> : Ist Δ eine Quasi-N-Mannigfaltigkeit, so ist $\mathrm{link}_\Delta \tau$ für $\tau \in \Delta$ eine Quasi-$(N-/\tau/)$-Mannigfaltigkeit und

$$\mathrm{Bd}(\mathrm{link}_\Delta \tau) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } \tau \notin \mathrm{Bd}\,\Delta \\ \mathrm{link}_{\mathrm{Bd}\,\Delta} \tau & \text{für } \tau \in \mathrm{Bd}\,\Delta \end{cases}$$

Beweis : Für $\varepsilon \in \mathrm{link}_\Delta \tau =: \Delta'$ gilt nach (1.4.1.)

$$\mathrm{link}_{\Delta'} \varepsilon = \mathrm{link}_\Delta \varepsilon \dot{\cup} \tau$$

(a) Δ' ist reindimensional der Dimension $N-/\tau/$: Nach (1.4.2.)

(b) Für Δ' gilt (7.1.1.) : Sei $\dim \varepsilon = N-/\tau/-1$. Dann ist $\dim \tau \dot{\cup} \varepsilon = N-1$ und $\tilde{H}_0(\mathrm{link}_{\Delta'} \varepsilon) = \tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau \dot{\cup} \varepsilon) = 0$ oder k wegen (7.1.3.) für Δ . Damit gilt (7.1.3.) für Δ'.

(c) Für Δ' gilt (7.1.2.): Sei $\dim \varepsilon < N-/\tau/-1$. Dann ist $\dim \tau \dot{\cup} \varepsilon < N-1$ und $\tilde{H}_0(\mathrm{link}_{\Delta'} \varepsilon) = \tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau \dot{\cup} \varepsilon) = 0$ nach (7.1.2.) für Δ.

(d) Berechnen wir $\mathrm{Bd}\,\Delta'$: $\varepsilon \in \mathrm{Bd}\,\Delta' \Leftrightarrow \tilde{H}_{N-/\tau/-/\varepsilon/}(\mathrm{link}_{\Delta'} \varepsilon) = \tilde{H}_{N-/\tau \dot{\cup} \varepsilon/}(\mathrm{link}_\Delta \tau \dot{\cup} \varepsilon) = 0$ nach Definition des Randes und (1.5.1.). Damit ist $\varepsilon \in \mathrm{Bd}\,\Delta' \Leftrightarrow \tau \dot{\cup} \varepsilon \in \mathrm{Bd}\,\Delta$.

(e) Ist $\tau \notin \mathrm{Bd}\,\Delta$, so ist $\tau \dot{\cup} \varepsilon \notin \mathrm{Bd}\,\Delta$ für beliebige $\varepsilon \in \Delta'$, da $\mathrm{Bd}\,\Delta$ ein Komplex ist. Ist $\tau \in \mathrm{Bd}\,\Delta$, so ist nach Definition des Außenrandes

$$\tau \dot{\cup} \varepsilon \in \mathrm{Bd}\,\Delta \Leftrightarrow \varepsilon \in \mathrm{link}_{\mathrm{Bd}\,\Delta} \tau .$$

$\ast$

(7) <u>Satz</u> : Sind umgekehrt $\mathrm{link}_\Delta(v)$ zusammenhängende Quasi-$(N-1)$-Mannigfaltigkeiten für alle Ecken $v \in V$, so ist Δ eine Quasi-N-Mannigfaltigkeit.

Beweis : Wie in (6) ist für $\emptyset \neq \varepsilon \in \Delta$ und $v \in \varepsilon$

$$\mathrm{link}_\Delta \varepsilon = \mathrm{link}_{\mathrm{link}_\Delta(v)}(\varepsilon-(v))$$

nd $\qquad \tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \varepsilon) \cong 0$ oder k $\quad$ für $\dim \varepsilon = N-1$

owie $\qquad \tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \varepsilon) = 0$ $\qquad$ für $\dim \varepsilon < N-1$,

a $\mathrm{link}_\Delta(v)$ eine zusammenhängende Quasi-$(N-1)$-Mannigfaltigkeit ist. ∎

7.4. Sei Δ eine zusammenhängende Quasimannigfaltigkeit mit dem Rand $\mathrm{Bd}\,\Delta$ und

$$J(\Delta) := (x_\sigma : \sigma \in \Delta - \mathrm{Bd}\,\Delta)$$

in Ideal in $R = k[\Delta]$.

Theorem : (1) Anzahl und Grad der (multihomogenen) Erzeugenden von K_Δ und $J(\Delta)$ einer zusammenhängenden Quasimannigfaltigkeit stimmen überein und stehen in eineindeutiger Korrespondenz zu den minimalen Elementen von $\Delta - \mathrm{Bd}\,\Delta$.

(2) $F_M(J; \underline{t}) = F_M(K_\Delta; \underline{t})$

eweis : Das Hauptlemma (7.2.) zeigt, daß entweder

$$H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U)) = 0 \qquad \text{gilt oder}$$

$$a_N : H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U)) \longrightarrow H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta s(U+W)) \qquad (U, W \geq 0)$$

in Isomorphismus eindimensionaler k-Vektorräume (freier $\mathbb{Z}$-Mo-uln) ist, je nachdem ob $s(U) \in \mathrm{Bd}\,\Delta$ oder nicht.

u (1) : Damit wird K_Δ nach (6.3.), genau wie $J(\Delta)$, von multi-omogenen Elementen vom Grad $U = d(\sigma)$ erzeugt, wobei σ alle mini-alen Elemente aus $\Delta - \mathrm{Bd}\,\Delta$ durchläuft.

u (2) : Nach Konstruktion ist $s(U) \notin \mathrm{Bd}\,\Delta \Leftrightarrow x^U \in J$. ∎

3) Korollar (vgl. /21;5.1./ für Triangulierungen von CM-Mannigfaltigkeiten) :

Sei Δ eine zusammenhängende CM-Homologiemannigfaltigkeit.

(1) Ist $\mathrm{Bd}\,\Delta = \emptyset$, d.h. $\tilde{H}_N(\Delta) \neq 0$, so ist

$$\mathrm{typ}\,(R) = 1$$

Speziell gilt das für Triangulierungen orientierbarer CM-mannigfaltigkeiten ohne Rand.

(2) Ist Bd Δ = $(\emptyset)$, so ist der Typ von R gleich der Zahl der Ecken von V.

Speziell gilt das für Triangulierungen nicht orientierbarer (über k) CM-Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

(3) Ist Bd Δ $\neq$ $(\emptyset)$ und nicht leer, so ist der Typ von R gleich der Zahl der minimalen Elemente der Menge Δ-BdΔ .

<u>7.5.</u> Obwohl K_Δ und $\mathfrak{I}(\Delta)$ nach (7.4.2.) als k-Moduln isomorph sind, müssen sie das als R-Moduln i.A. nicht sein.

(1) <u>Beispiel :</u> Sei Δ eine Triangulierung des projektiven Raumes P^N $(N>1)$ und k ein Körper, dessen Charakteristik verschieden 2 ist, also Bd Δ = $(\emptyset)$ (z.B. die Triangulierung aus (2.2.4.)). Dann ist $\mathfrak{I}(\Delta) = \underline{m}.R \not\cong K_\Delta$, denn der kanonische Modul des CM-Rings $k[\Delta]$ ist wieder CM (/HK;6.1.d.1./), $\underline{m}.R$ dagegen nicht (/HK; .23./).

(2) Untersuchen wir nun, wann es zwischen $\mathfrak{I}(\Delta)$ und K_Δ einen R-linearen k-Modulisomorphismus gibt :

<u>Theorem :</u> Sei Δ eine zusammenhängende Quasi-N-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen multihomogenen R-Modulisomorphismus

$$\varphi : \mathfrak{I}(\Delta) \longrightarrow K_\Delta$$

genau dann, wenn $H_N(\Delta, \mathrm{Bd}\Delta) \neq 0$.

Beweis : (a) Δ-BdΔ ist zusammenhängend, denn ein (N-1)-dimensionales Simplex einer Kette (7.1.4.) aus Δ ist in zwei N-dimensionalen Simplexen aus Δ enthalten und liegt somit in Δ-BdΔ .

(b) Gibt es einen multihomogenen R-Modulisomorphismus, so ist dieser vom Grad 0 : φ bildet Erzeugende auf Erzeugende ab. Würde die Erzeugenden x_σ auf $0 \neq m_\tau \in [K_\Delta]_{d(\tau)}$ und x_τ auf $m_\varepsilon \in [K_\Delta]_{d(\varepsilon)}$ mit $\sigma \neq \tau$ abbilden (σ, τ und ε sind nach (7.4.1.) minimale Elemente aus Δ-BdΔ), so wäre

$$\varphi(x_\sigma x_\tau) = x_\sigma m_\varepsilon = x_\tau m_\tau$$

Nach Definition der Multiplikationsabbildung (6.3.) ist mit $m_\tau \neq 0$ auch $x_\tau m_\varepsilon \neq 0$, jedoch

$$\deg_M x_\tau m_\varepsilon = d(\sigma)+d(\varepsilon) \neq 2d(\tau) = \deg_M x_\tau m_\tau$$

Damit ist $\varphi(x_\sigma) \in [K_\Delta]_{d(\sigma)}$ für alle Erzeugenden x_σ von $J(\Delta)$.

(b) $H_N(\Delta, Bd\Delta) \neq 0$ gilt genau dann, wenn es für jedes N-dimensionale Simplex $\tau \in \Delta$ ein $\varepsilon_\tau \neq 0$ gibt, so daß $\sum \varepsilon_\tau \tau$ ein Zyklus in $C_N(\Delta, Bd\Delta)$ ist, vgl. (7.2.3.).

(c) Solche ε_τ existieren genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\varphi: J(\Delta) \longrightarrow K_\Delta$ vom Multigrad 0 gibt:

α) Dann ist für $\Delta' = cost_\Delta \sigma$; $\sigma \in \Delta - Bd\Delta$

$$0 \neq \overline{\sum_{\tau > \sigma} \varepsilon_\tau \tau} \in H_N(\Delta, cost_\Delta \sigma)$$

und

$$\varphi(x^U) := \overline{\sum_{\tau > s(U)} \varepsilon_\tau \tau} \in H_N(\Delta, cost_\Delta s(U))$$

für $x^U \in J(\Delta)$, d.h. $s(U) \in \Delta - Bd\Delta$ definiert dann einen R-linearen R-Modulisomorphismus $\varphi: J(\Delta) \longrightarrow K_\Delta$.

β) Sei $\tau \in \Delta$ N-dimensional. Wähle ε_τ aus

$$\varphi(x_\tau) = \overline{\varepsilon_\tau \tau} \in H_N(\Delta, cost_\Delta \tau)$$

Wegen $\quad x_{\tau-\sigma} \varphi(x_\sigma) = \varphi(x_\tau) \quad$ für $\sigma \subset \tau$, $\sigma \in \Delta - Bd\Delta$

folgt aus der Definition der Multiplikationsabbildung in K_Δ

$$\varphi(x_\sigma) = \overline{\sum \varepsilon_\tau \tau} \in H_N(\Delta, cost_\Delta \sigma)$$

Damit gilt

$$\partial(\sum \varepsilon_\tau \tau) \in \bigcap_{\Delta - Bd\Delta} \tilde{C}_{N-1}(cost_\Delta \sigma) = \tilde{C}_{N-1}(\bigcap_{\Delta - Bd\Delta} cost_\Delta \sigma) =$$

$$= \tilde{C}_{N-1}(Bd\Delta)$$

und $\quad 0 \neq \overline{\sum \varepsilon_\tau \tau} \in H_N(\Delta, Bd\Delta)$. ∎

<u>Bemerkung 1</u> : Eine Pseudomannigfaltigkeit Δ mit $H_N(\Delta, Bd\Delta) \neq 0$ heißt orientierbar (/25;§24/). Dabei ist es unerheblich, ob man unseren Randbegriff oder den "üblichen", vgl. (7.2.4.), benutzt, da sich beide nur in niederdimensionalen (< N-1) Komponenten unterscheiden. Wir wollen deshalb eine Quasimannigfaltigkeit mit $H_N(\Delta, Bd\Delta) \neq 0$ <u>orientierbar</u> nennen. Für Triangulierungen von

nnigfaltigkeiten fällt dieser Begriff mit dem der Orientierbar-
keit im üblichen Sinne zusammen, vgl. /Sp;6.3.8./.

__Bemerkung 2 :__ Das Theorem gibt eine Teilantwort auf eine Frage
von Stanley /St;96/ nach dem kanonischen Modul von Triangulie-
rungen von Mannigfaltigkeiten, vgl. auch (9.5.2.).

8. Gorensteinkomplexe

8.1. Definition : Ist k ein Körper, so nennen wir Δ Gorenstein, wenn $R=k[\Delta]$ ein Gorensteinring ist, d.h. , vgl. /HK;6.11./

(1) R ist Cohen-Macaulay

(2) K_Δ besitzt genau ein Erzeugendes

Für $k=\mathbb{Z}$ sei (1) und (2) (formal) die Definition des Gorensteinbegriffs.

Da wir die Erzeugenden von K_Δ mit (6.3.) kennen, folgt daraus, daß es einen multihomogenen Isomorphismus $R \xrightarrow{\sim} K_\Delta$ vom Grad a gibt, wobei $a \in \mathbb{N}^V$ der Grad des Erzeugenden von K_Δ ist, vgl. /HK; 5.9./:

(3) $\underline{K \cong R[-a]}$

Aus (3.7.5.) und (3.3.3.) folgt damit bei $r=\dim\Delta+1$

$$t^{|a|} h(R,t) = t^r h(R,t^{-1})$$

und mit $s=r-|a|$ und $h(R,t) = h_0+h_1t+\ldots+h_st^s$

(4) $\underline{h_i = h_{s-i} \qquad i=0,\ldots,s}$

(5) Ist speziell $\tilde{H}_N(\Delta) \neq 0$, also $a = 0$, so folgt

$\underline{h_i = h_{r-i} \qquad i=0,\ldots,r}$

Diese Gleichungen sind äquivalent den Dehn-Sommerville-Gleichungen für den f-Vektor, vgl. etwa /Sch;6.4.1./.

(6) Leider folgt aus der Symmetrie des h-Vektors noch nicht die Gorensteineigenschaft, wie folgendes Beispiel zweier eindimensionaler simplizialer Komplexe mit gleichem f-Vektor zeigt, die beide CM sind, vgl. (11.6.2.). Der erste Komplex ist als Triangulierung einer Sphäre Gorenstein, vgl. (8.3.3.), der andere aber nicht ; vgl. /27;4.3./ :

(a)


$I(\Delta) = (x_1x_3, x_2x_4)$

$K_\Delta \cong k[\Delta] \qquad h = (1,2,1)$

(b)


$I(\Delta) = (x_1x_4, x_2x_4, x_1x_2x_3)$

$K_\Delta \cong (x_1-x_2+x_3, x_2x_3-x_3x_4)k[\Delta]$ nach (6.5.)

4.2. Beschreiben wir nun die Struktur eines Gorensteinkomple-xes, vgl. auch /St/ und /S1/.

Ist Δ Gorenstein, so wird K_Δ von einem einzigen (multihomogenen vom Grad $d(\sigma)$) Element erzeugt.

(1) $\underline{\Delta = \sigma * \Gamma \text{ mit } \Gamma = \mathrm{link}_\Delta \sigma}$:

Nach (3.3.) gilt für σ

$$H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) = k \text{ und f. alle } \tau \subsetneqq \sigma \quad H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau) = 0$$

Ist $\varepsilon \in \Delta$ höchstdimensional, so ist

$$H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \varepsilon) \cong \tilde{H}_{-1}(\emptyset) \cong k$$

Damit wird die Multiplikationsabbildung

$$a_N: H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) \longrightarrow H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \varepsilon),$$

die surjektiv ist, weil K_Δ von $H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$ erzeugt wird, in Wirklichkeit ein Isomorphismus eindimensionaler k-Vektorräume (freier $\mathbb{Z}$-Moduln). Das bedeutet $\varepsilon > \sigma$, denn sonst ist die Multiplikationsabbildung die Nullabbildung. Da diese Überlegungen für jedes maximale Simplex richtig sind, (Δ ist reindimensional, da [illegible]), gilt (1).

(2) Berechnen wir nun $H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau)$ für $\tau \in \Delta$:

$\underline{\text{Für } \tau \not\supset \sigma}$ ist $\mathrm{link}_\Delta \tau = (\sigma - \tau) * \mathrm{link}_\Gamma(\tau - \sigma)$ zusammenziehbar und somit azyklisch, d.h.

$$\underline{H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau) \cong \tilde{H}_{N-/\tau/}(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0}$$

$\underline{\text{Für } \tau \in \Delta, \tau > \sigma}$ wähle man ein maximales Simplex ε mit $\varepsilon > \tau > \sigma$ und betrachte

$$H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma) \xrightarrow{a} H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau) \xrightarrow{b} H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \varepsilon)$$

wobei a und b jeweils die Abbildungen a_N sind. a ist surjektiv, weil $H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \sigma)$ K_Δ erzeugt, ba ein Isomorphismus nach (1). Damit ist a ein Isomorphismus und

$$\underline{H_N(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau) \cong k}$$

(3) Wegen $\mathrm{link}_\Delta \tau = \mathrm{link}_\Gamma(\tau - \sigma)$ für $\tau > \sigma$ nach (1.4.1.) und (1.5.1.) gilt damit

$\underline{\check{H}_M(\Gamma) \cong H_M(|\Gamma|, |\Gamma|-p) \cong k}$ f. alle $p \in |\Gamma|$

$(M = \dim \Gamma = \dim \Delta - |\sigma|)$

(4) Definition (vgl. /31; 7.5./) :

Sei $U := \{v \in V : st_\Delta(v) \neq \Delta\}$

core $\Delta := \Delta_U$ nennen wir den Kern von Δ.

Dann ist $\sigma = V - U$ das größte Simplex in Δ mit der Eigenschaft

$$\Delta = st_\Delta \sigma = \sigma * link_\Delta \sigma ,$$

wie unmittelbar aus der Beziehung $st_\Delta \sigma = st_{st_\Delta(v)}(\sigma - (v))$ für $v \in \sigma$ folgt.

(3) zeigt, daß im Gorensteinfall $\underline{\Gamma = \text{core}\,\Delta}$ gilt.

(5) Theorem (/31; 7.5./) : Sei k ein Körper oder $\mathbb{Z}$, Δ ein simplizialer Komplex und $\Gamma = \text{core}\,\Delta$ sein Kern. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

(a) Δ ist Gorenstein (über k)

(b) Γ ist Gorenstein (über k)

(c) $$\tilde{H}_i(link_\Gamma \tau) \cong \begin{cases} k & \text{für } i = \dim(link_\Gamma \tau) \\ 0 & \text{für } i < \dim(link_\Gamma \tau) \end{cases}$$

(d) $$H_i(\Gamma, cost_\Gamma \tau) = \begin{cases} k & \text{für } i = \dim \Gamma \\ 0 & \text{für } i < \dim \Gamma \end{cases} \quad \text{und alle } \tau \in \Gamma$$

(e) Γ ist eine Homologiesphäre (über k), d.h. Γ ist eine Homologiemannigfaltigkeit und

$$\tilde{H}_i(\Gamma) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i < \dim \Gamma \\ k & \text{für } i = \dim \Gamma \end{cases}$$

Für $N = \dim \Delta \geq 1$ sind diese Bedingungen äquivalent zu

(f) Δ ist CM (über k), der Außenrand jedes (N-2)-Simplex von Δ ist entweder eine Kreislinie oder $\circ\!\!-\!\!\circ$ oder $\circ\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\circ$ und $\dim_k \tilde{H}_{\dim \Gamma}(\Gamma) = |\chi(\Gamma)| = 1$.

Beweis : Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt daraus, daß für $\Delta = \sigma * \Gamma$

$$\underline{k[\Gamma] = k[\Delta]/(x_v : v \in \sigma)}$$

gilt und $(x_v : v \in \sigma)$ eine Primsequenz in $k[\Delta]$ ist, denn $k[\Delta]$ ist ja $\mathbb{N}^V$-graduiert.

Aus (a) folgt (d), wie unter (3) gezeigt. (c),(d) und (e) sind aber äquivalente Aussagen, vgl. (5.2.7.),(5.2.8.),(7.3.2.).

Gilt umgekehrt (d), so ist Γ eine CM-Homologiemannigfaltigkeit ohne Rand, vgl. (5.2.7.) und (7.2.4.), und damit Gorenstein, vgl. (7.4.3.1.).

Gilt (f), so ist Δ eine Quasimannigfaltigkeit, vgl. (7.3.2.) und (7.4.3.) und damit auch Γ, wie wir in (8.4.1.) noch zeigen werden. Wie oben prüft man, daß mit Δ auch Γ Cohen-Macaulay ist. Somit folgt (c).

Aus (e) und (7.3.3.) folgt, da Γ eine CM-Homologiemannigfaltigkeit ohne Rand ist, daß jedes (n-2)-Simplex von Γ die Triangulierung einer Kreislinie ist. Daraus und aus (a) liest man sofort (f) ab. x

<u>Bemerkung</u> : Die Bedingung $\dim_k \tilde{H}_n(\Gamma) = 1$ in (f) ist für Körper einer Charakteristik verschieden 2 nicht überflüssig, wie Bsp. (2.2.4.) zeigt, das die restlichen Bedingungen von (f) erfüllt, aber nicht Gorenstein ist, vgl. (7.4.3.2.).

<u>Frage</u> : Hängt die Gorensteineigenschaft, d.h. die Eigenschaft, Homologiesphäre zu sein, von der Charakteristik von k ab ?

<u>8.3. Beispiele</u> :

(1) Jede orientierbare CM-Homologiemannigfaltigkeit ohne Rand (d.h. $\tilde{H}_n(\Delta) \neq 0$) ist Gorenstein, vgl. (7.4.3.1.).

(2) Umgekehrt ist nach (8.2.) und (9.4.) jeder Gorensteinkomplex eine CM-Homologiemannigfaltigkeit.

(3) Speziell ist jede Triangulierung einer Sphäre Gorenstein.

9. Der Join

9.1. Sei k ein Körper oder $\mathbb{Z}$ und Δ_1 und Δ_2 simpliziale Komplexe über den disjunkten Eckenmengen V_1 und V_2, $V = V_1 \dot\cup V_2$ und $N_i = \dim \Delta_i$ ($i=1,2$).

In (1.3.2.) wurde der Join von Δ_1 und Δ_2, $\Delta_1 * \Delta_2$, definiert. Sei weiter $\tau = \tau_1 \dot\cup \tau_2 \in \Delta_1 * \Delta_2$ ($\tau_i \in \Delta_i$)

Lemma :

(1) $\mathrm{link}_\Delta \tau = \mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1 * \mathrm{link}_{\Delta_2} \tau_2$

(2) $k[\Delta_1 * \Delta_2] \cong k[\Delta_1] \otimes_k k[\Delta_2]$

(3) $\dim(\Delta_1 * \Delta_2) = N_1 + N_2 + 1 =: N$

Beweis : (1) $\varepsilon = \varepsilon_1 \dot\cup \varepsilon_2 \in \mathrm{link}_\Delta \tau \Leftrightarrow (\varepsilon_1 \dot\cup \tau_1) \dot\cup (\varepsilon_2 \dot\cup \tau_2) \in \Delta_1 * \Delta_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \tau_i \dot\cup \varepsilon_i \in \Delta_i \Leftrightarrow \varepsilon_i \in \mathrm{link}_{\Delta_i} \tau_i$ ($i=1,2$)

(2) folgt sofort aus der Definition des Join, denn $k[\Delta_1 * \Delta_2]$ hat eine k-Modulbasis bestehend aus allen $x^{U_1} \cdot x^{U_2}$ mit $s(U_i) \in \Delta_i$ ($i=1,2$). (3) ist evident. ∎

9.2. Lemma :

$$\tilde C_{i-1}(\Delta_1 * \Delta_2) \xrightarrow{\ \sim\ } \bigoplus_{i_1+i_2=i} (\tilde C_{i_1-1}(\Delta_1) \otimes_k \tilde C_{i_2-1}(\Delta_2))$$

via

$$\tau_1 \dot\cup \tau_2 \longmapsto (-1)^{|\tau_2|} \tau_1 \otimes \tau_2$$

ist ein Isomorphismus von Komplexen von k-Moduln (wobei rechts der Tensorkomplex $\tilde C.(\Delta_1) \otimes_k \tilde C.(\Delta_2)$ mit den üblichen Randabbildungen steht, vgl. /Sp;5.3./).

Zum Beweis rechne man analog (5.1.5.) oder (5.1.6.) die Verträglichkeit der Abbildung mit den Randabbildungen nach.

Korollar : Über einem Körper k gilt

(2) $\tilde H_{i-1}(\Delta_1 * \Delta_2) \cong \bigoplus_{i_1+i_2=i} (\tilde H_{i_1-1}(\Delta_1) \otimes_k \tilde H_{i_2-1}(\Delta_2))$

und allgemein, vgl. auch /BG;3.2./

(3) $\tilde H_{i-1}(\Delta_1 * \dots * \Delta_s) \cong \bigoplus_{\Sigma i_j = i} (\tilde H_{i_1-1}(\Delta_1) \otimes_k \dots \otimes_k \tilde H_{i_s-1}(\Delta_s))$

Beweis : Dies folgt aus (1) und der Künnethformel, /Sp;5.3.1./

für k-Vektorräume. *

9.3. Sei k ein Körper, Δ_1 und Δ_2 wie in (9.1.), außerdem C

Sei $\tau = \tau_1 \dot\cup \tau_2 \in \Delta_1 * \Delta_2 =: \Delta$.

Dann ist nach (5.2.7.)

$$\tilde H_{n_i}(\mathrm{link}_{\Delta_i}\tau_i) = 0 \qquad \text{für } n_i \neq N_i - /\tau_i/ \qquad (i=1,2)$$

und wegen (9.1.1.) und (9.2.2.) damit auch

$$\tilde H_n(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0 \qquad \text{für } n \neq N - /\tau/$$

$$(N = N_1 + N_2 + 1 \text{ , vgl.(9.1.3.) })$$

Wiederum aus (5.2.7.) folgt damit

(1) Satz : Sind Δ_1 und Δ_2 Cohen-Macaulay, so ist auch Δ_1

Cohen-Macaulay.

(2) Sei nun $\Delta_1 * \Delta_2$ Buchsbaum, $\tau_1 \in \Delta_1$ ein Simplex und τ_2

ein N_2-dimensionales Simplex. Damit ist $\mathrm{link}_{\Delta_2}\tau_2 = \emptyset$ und

wie oben

$$\tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_\Delta \tau_1 \dot\cup \tau_2) \cong \tilde H_{-1}(\emptyset) \otimes_k \tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1)$$

$$\cong \tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1)$$

Da $\tau_1 \dot\cup \tau_2 \neq \emptyset$ (selbst wenn $\tau_1 = \emptyset$), folgt aus (5.2.6a) f

$$\tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1) = 0 \qquad \text{f.alle } i \neq N_1 + N_2 - /\tau_1 \dot\cup \tau_2/ = N$$

Nach (5.2.7.) ist damit Δ_1 CM. Analoges gilt für Δ_2:

(3) Satz : Ist der Join zweier (nichttrivialer) Komplexe Δ

Buchsbaum, so sind Δ_1 und Δ_2 und damit auch der J

reits Cohen-Macaulay.

Speziell ist der Join zweier Buchsbaumkomplexe,

einer nicht CM ist, nicht mehr Buchsbaum.

Bemerkung zu (2) und (3) : Nach (5.2.9.) bleiben die

auch über $k = \mathbb{Z}$ gültig.

(4) Damit können wir Beispiele konstruieren, in denen

baumeigenschaft (und auch die Eigenschaft, Homologiema

Beweis : Dies folgt aus (1) und der Künnethformel, /Sp;5.3.1./, f. k-Vektorräume. #

9.3. Sei k ein Körper, Δ_1 und Δ_2 wie in (9.1.), außerdem CM. Sei $\tau = \tau_1 \dot\cup \tau_2 \in \Delta_1 * \Delta_2 =: \Delta$.

Dann ist nach (5.2.7.)

$$\tilde H_{n_i}(\mathrm{link}_{\Delta_i} \tau_i) = 0 \qquad \text{für } n_i \neq N_i - |\tau_i| \qquad (i=1,2)$$

und wegen (9.1.1.) und (9.2.2.) damit auch

$$\tilde H_n(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0 \qquad \text{für } n \neq N - |\tau|$$

$$(N = N_1 + N_2 + 1 \text{ ,vgl.}(9.1.3.))$$

Wiederum aus (5.2.7.) folgt damit

(1) Satz : Sind Δ_1 und Δ_2 Cohen-Macaulay, so ist auch $\Delta_1 * \Delta_2$ Cohen-Macaulay.

(2) Sei nun $\Delta_1 * \Delta_2$ Buchsbaum, $\tau_1 \in \Delta_1$ ein Simplex und $\tau_2 \in \Delta_2$ ein N_2-dimensionales Simplex. Damit ist $\mathrm{link}_{\Delta_2} \tau_2 = \emptyset$ und somit wie oben

$$\tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_\Delta \tau_1 \dot\cup \tau_2) \cong \tilde H_{-1}(\emptyset) \otimes_k \tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1)$$

$$\cong \tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1)$$

Da $\tau_1 \dot\cup \tau_2 \neq \emptyset$ (selbst wenn $\tau_1 = \emptyset$), folgt aus (5.2.6c) für Δ

$$\tilde H_{i-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1) = 0 \qquad \text{f. alle } i \neq N_1 + N_2 - |\tau_1 \dot\cup \tau_2| = N_1 - |\tau_1|$$

Nach (5.2.7.) ist damit Δ_1 CM. Analoges gilt für Δ_2:

(3) Satz : Ist der Join zweier (nichttrivialer) Komplexe $\Delta_1 * \Delta_2$ Buchsbaum, so sind Δ_1 und Δ_2 und damit auch der Join bereits Cohen-Macaulay.

Speziell ist der Join zweier Buchsbaumkomplexe, von denen einer nicht CM ist, nicht mehr Buchsbaum.

Bemerkung zu (2) und (3) : Nach (5.2.9.) bleiben diese Sätze auch über $k = \mathbb{Z}$ gültig.

(4) Damit können wir Beispiele konstruieren, in denen die Buchsbaumeigenschaft (und auch die Eigenschaft, Homologiemannigfal-

tigkeit zu sein, vgl. (9.4.) und (7.3.2.)) von der Charakteristik des Körpers k abhängt. Sei nämlich Δ eine Triangulierung der projektiven Ebene, etwa (2.2.4.). Dann ist nach (7.3.) Δ CM für char $k \neq 2$ und BB, aber nicht CM für char $k = 2$, vgl. auch /23;Remark 3/. Sei Δ' ein anderer CM-Komplex, etwa $\Delta' = (v)$, wenn v keine Ecke von Δ ist. Dann ist $\Delta * \Delta'$ CM für char $k \neq 2$ (und damit eine Homologiemannigfaltigkeit über k), aber nicht BB (und damit keine Homologiemannigfaltigkeit über k) für char $k = 2$ (damit auch nicht über $\mathbb{Z}$).

(5) Ebenso können wir eine Klasse von Ringen angeben, für die genau die lokalen Kohomologiemoduln an den Stellen $t \geq 1$ und $d > t$ nicht verschwinden:

Sei Δ_1 ein Cohen-Macaulay-Komplex und Δ_2 die disjunkte Vereinigung von zwei Exemplaren eines anderen Cohen-Macaulay-Komplexes. Dann erfüllt Δ_2 ebenfalls (5.2.7.), nur ist $\tilde{H}_0(\Delta_2) \neq 0$.

Für $\tau_i \in \Delta_i$; $N_i = \dim \Delta_i$ ($i=1,2$) gilt also

$$\tilde{H}_{i_1}(\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1) = 0 \qquad \text{für } i_1 \neq N_1 - /\tau_1/$$

$$\tilde{H}_{i_2}(\mathrm{link}_{\Delta_2}\tau_2) = 0 \qquad \text{für } i_2 \neq N_2 - /\tau_2/ \text{ und } \tau_2 \neq \emptyset$$

$$\text{bzw. } i_2 \neq N_2 ; 0 \quad \text{für } \tau_2 = \emptyset .$$

(9.1.1.) und (9.2.2.) liefern dann für $\tau = \tau_1 \dot{\cup} \tau_2 \in \Delta_1 * \Delta_2 = \Delta$, $N = \dim \Delta = N_1 + N_2 + 1$

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta \tau_1 \dot{\cup} \tau_2) = 0 \qquad \text{für } i \neq N - /\tau_1 \dot{\cup} \tau_2/ \text{ wenn } \tau_2 \neq \emptyset$$

und $$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta \tau_1) = 0 \qquad \text{für } i \neq N - /\tau_1/ ; N_1 - /\tau_1/ + 1$$

Außerdem gilt

$$\tilde{H}_{N_1 - /\tau_1/ + 1}(\mathrm{link}_\Delta \tau_1) \cong \tilde{H}_{N_1 - /\tau_1/}(\mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1) \otimes_k \tilde{H}_0(\Delta_2)$$

Insgesamt gilt also mit (1.5.1.) und der Bemerkung, daß simpliziale Homologien und Kohomologien über einem Körper dual sind,

$$H^i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau_1 \dot{\cup} \tau_2) = 0 \quad \text{für } i \neq N \text{ und } \tau_2 \neq \emptyset$$

$$H^i(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau_1) = 0 \quad \text{für } i \neq N ; N_1 + 1 \qquad (\tau_2 = \emptyset)$$

$$H^{N_1+1}(\Delta, \mathrm{cost}_\Delta \tau_1) \cong H^{N_1}(\Delta_1, \mathrm{cost}_{\Delta_1} \tau_1) \otimes_k \tilde{H}^0(\Delta_2)$$

Da außerdem für N_2-dimensionale $\tau_1 \in \Delta_1$ $H^{N_2}(\Delta_1, \mathrm{cost}_{\Delta_1}\tau_1) \neq 0$, folgt damit aus (5.1.10.)

<u>Satz :</u> Sei k ein Körper, $1 \leq t < d$, Δ_1 ein $(t-2)$-dimensionaler simplizialer CM-Komplex und Δ_2 die disjunkte Vereinigung zweier $(d-t)$-dimensionaler CM-Komplexe.

Dann hat $k[\Delta_1 * \Delta_2]$ genau an den Stellen t und d nichtverschwindende lokale Kohomologiemoduln.

$(t=0 \Rightarrow$ nimm $\Delta_1 = \emptyset)$

<u>9.4.</u> Seien Δ_1 und Δ_2 wie in (9.1.) und k ein Körper.

<u>Satz :</u>

(1) $\Delta_1 * \Delta_2$ ist eine Quasimannigfaltigkeit genau dann, wenn Δ_1 und Δ_2 zusammenhängende Quasimannigfaltigkeiten sind.

(2) In diesem Fall ist

$$\underline{\partial d(\Delta_1 * \Delta_2) = (\partial d\,\Delta_1) * \Delta_2 \,\dot{\cup}\, \Delta_1 * (\partial d\,\Delta_2)}$$

Beweis : (a) $\Delta = \Delta_1 * \Delta_2$ ist reindimensional der Dimension $N_1 + N_2 + 1$ nach Definition des Join und (9.1.3.).

(b) Untersuchen wir die Gültigkeit von (7.1.3.) :

Wenn $\varepsilon = \varepsilon_1 \dot{\cup} \varepsilon_2 \in \Delta$ $(N_1 + N_2)$-dimensional ist, gilt $\dim \varepsilon_1 = N_1$ oder $\dim \varepsilon_2 = N_2$. Sei oBdA $\dim \varepsilon_1 = N_1$ und damit $\dim \varepsilon_2 = N_2 - 1$. (9.2.2.) liefert mit $\mathrm{link}_{\Delta_1}\varepsilon_1 = \emptyset$

$$\underline{\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \varepsilon) \cong \tilde{H}_0(\mathrm{link}_{\Delta_2}\varepsilon_2)}$$

Damit gilt (7.1.3.) genau dann für $\Delta_1 * \Delta_2$, wenn (7.1.3.) für Δ_1 und Δ_2 gilt.

(c) Sind Δ_1 und Δ_2 zusammenhängende Quasimannigfaltigkeiten, so gilt für $\Delta_1 * \Delta_2$ (7.1.2.) :

Für $\tau = \tau_1 \dot{\cup} \tau_2 \in \Delta$ mit $\dim \tau < N_1 + N_2$; $\tau \neq \emptyset$ ist $\dim \tau_1 < N_1$ oder $\dim \tau_2 < N_2$. Sei oBdA $\dim \tau_1 < N_1$. Dann ist $\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1 \neq \emptyset$, also $\tilde{H}_{-1}(\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1) = 0$ und nach (9.1.1.) und (9.2.2.)

$$\underline{\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau) \cong \tilde{H}_0(\mathrm{link}_{\Delta_1}\tau_1) \otimes_k \tilde{H}_{-1}(\mathrm{link}_{\Delta_2}\tau_2)}$$

Damit ist $\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0$ außer wenn $\tau_2 \in \Delta_2$ maximal ist. Ist aber

$\dim \tau_2 = N_2$, so folgt $\dim \tau_1 < N_1 - 1$ und mit (7.1.2.) für Δ_1 auch in diesem Fall

$$\underline{\tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0.}$$

(d) Ist umgekehrt $\Delta_1 * \Delta_2$ eine Quasimannigfaltigkeit und $\tau_1 \in \Delta_1$ $\dim \tau_1 < N_1 - 1$ (möglich ist $\tau_1 = \emptyset$), so wähle $\tau_2 \in \Delta_2$ N_2-dimensional. Dann ist $\dim(\tau_1 \dot\cup \tau_2) < N_1 + N_2$ und nach (7.1.2.) und (c)

$$\underline{0 = \tilde{H}_0(\mathrm{link}_\Delta \tau) \cong \tilde{H}_0(\mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1)}$$

also Δ_1 und analog Δ_2 eine zusammenhängende Quasimannigfaltigkeit.

(e) $\underline{\tau = \tau_1 \dot\cup \tau_2 \in \mathrm{Bd}\,\Delta}$ $\Leftrightarrow \tilde{H}_{N_1+N_2+1-/\tau/}(\mathrm{link}_\Delta \tau) = 0$

(vgl. (7.2.4.) und (1.5.1.)). Wegen (9.1.1.) und (9.2.2.) ist das äquivalent zu

$$\tilde{H}_{N_1-/\tau_1/}(\mathrm{link}_{\Delta_1} \tau_1) \otimes_k H_{N_2-/\tau_2/}(\mathrm{link}_{\Delta_2} \tau_2) = 0$$

und das wiederum zu

$$\underline{\tau_1 \in \mathrm{Bd}\,\Delta_1 \quad \text{oder} \quad \tau_2 \in \mathrm{Bd}\,\Delta_2.} \qquad \blacksquare$$

(3) Betrachtet man den Join einer Triangulierung Δ einer projektiven ~~Raumes~~ Ebene (char $k \neq 2$) und eines Simplexes σ, so ist wegen $\mathrm{Bd}\,\Delta = \{\emptyset\}$

$$\mathrm{Bd}(\Delta * \sigma) = \sigma \cup (\mathrm{Bd}\,\sigma) * \Delta \subset \Delta * \sigma$$

Damit kann der Rand einer CM-Homologiemannigfaltigkeit (über k) auch Komponenten niederer Dimension enthalten, d.h. nicht reindimensional sein (und ist dann keine Homologiemannigfaltigkeit). Nach (9.3.3.) sind dies jedoch keine Homologiemannigfaltigkeiten über $\mathbb{Z}$.

9.5. Untersuchen wir nun den Rand einer Quasimannigfaltigkeit näher.

(1) Satz : Ist Δ eine CM-N-Homologiemannigfaltigkeit und $\tilde{H}_{N-1}(\mathrm{Bd}\,\Delta) \neq 0$, so ist Δ orientierbar.
Speziell ist eine CM-Mannigfaltigkeit mit orientierbarem Rand orientierbar.

Beweis : Sei oBdA $Bd\,\Delta \neq \emptyset$. Die Aussage des Satzes folgt sofort aus der Homologiesequenz des Paares $Bd\,\Delta \subset \Delta$

$$0 = \tilde{H}_N(\Delta) \longrightarrow H_N(\Delta, Bd\,\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_{N-1}(Bd\,\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_{N-1}(\Delta) = 0$$

in der die äußeren Terme verschwinden, weil Δ einen Rand hat, vgl. (7.2.5.), bzw. CM ist, vgl. (5.2.7.).

Die zweite Aussage folgt daraus, daß für Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten $Bd\,\Delta$ stets die Triangulierung einer Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Damit ist die Bedingung $\tilde{H}_{N-1}(Bd\,\Delta) \neq 0$ gleichbedeutend mit der Forderung der Orientierbarkeit von $Bd\,\Delta$.

#

Damit ist Beispiel (2.2.3.) nicht Cohen-Macaulay.

Frage : Gibt es Homologiemannigfaltigkeiten (über $\mathbb{Z}$), deren Rand keine Homologiemannigfaltigkeit ohne Rand (bzw. leer) ist ? Vgl. auch (9.4.3.) und (3) unten.

(2) Proposition (vgl. Hochster oder /32;8.5./) :

Sei Δ eine Triangulierung einer CM-N-Mannigfaltigkeit mit nichtleerem Rand.

Dann gibt es einen multihomogenen Isomorphismus

$$J(\Delta) \cong K_\Delta$$

genau dann, wenn $Bd\,\Delta$ (N-1)-dimensional Gorenstein ist.

Beweis : $\Rightarrow$) Das folgt aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow J(\Delta) \longrightarrow k[\Delta] \longrightarrow k[Bd\,\Delta] \longrightarrow 0$$

wegen $I(Bd\,\Delta) = I(\Delta) + J(\Delta)$ und /HK;6.13./.

$\Leftarrow$) core $Bd\,\Delta = Bd\,\Delta$, denn $Bd\,\Delta$ ist für die Triangulierung einer Mannigfaltigkeit selbst Triangulierung einer Mannigfaltigkeit ohne Rand, vgl. oben. core $Bd\,\Delta \neq Bd\,\Delta$ würde damit einen Widerspruch zu (9.4.2.) bedeuten.

Nach (8.2.5.) ist also $\tilde{H}_{N-1}(Bd\,\Delta) \neq 0$ und aus der Sequenz

$$0 = \tilde{H}_N(\Delta) \longrightarrow H_N(\Delta, Bd\,\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_{N-1}(Bd\,\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_{N-1}(\Delta) = 0$$

wie oben folgt

$$H_N(\Delta, Bd\,\Delta) \neq 0 .$$

Wende nun (7.5.) an.

<u>Frage</u> : Ist für (CM-)Quasimannigfaltigkeiten immer

$$\operatorname{core} \operatorname{Bd} \Delta = \operatorname{Bd} \Delta$$

(oder wenigstens, wenn $\operatorname{Bd}\Delta$ (N-1)-dimensional Coremotein ist) ? Dann ließe sich die Proposition auf CM-Homologiemannigfaltigkeiten erweitern.

(3) Für $\operatorname{Bd}\Delta \neq \emptyset$ folgt aus der Sequenz

$$0 = \widetilde{H}_N(\Delta) \longrightarrow H_N(\Delta, \operatorname{Bd}\Delta) \longrightarrow \widetilde{H}_{N-1}(\operatorname{Bd}\Delta)$$

generell, daß $\widetilde{H}_{N-1}(\operatorname{Bd}\Delta) \neq 0$, wenn Δ eine orientierbare Quasimannigfaltigkeit ist, d.h.

$\operatorname{Bd}\Delta$ ist eine orientierbare Quasimannigfaltigkeit ohne Rand (wenn Δ orientierbar), sofern $\operatorname{Bd}\Delta$ nur eine Quasimannigfaltigkeit ist.

Gleiches gilt für den "üblichen Rand", vgl. (7.2.4.), da er sich von $\operatorname{Bd}\Delta$ nur in niederdimensionalen (< N-1) Komponenten unterscheidet.

<u>Frage</u> : Ist der "übliche Rand" einer (orientierbaren) Quasimannigfaltigkeit wieder eine Quasimannigfaltigkeit ?

Von Pseudomannigfaltigkeiten, vgl. Bemerkung (7.1.4.), weiß man, daß das nicht so ist, vgl. Beispiel (7.1.4.).

0. Färbbare simpliziale Komplexe

10.1. (1) Definition : Ein N-dimensionaler simplizialer Komplex Δ heißt färbbar ("completely balanced" in /29/), wenn es eine Abbildung ("Färbung")

$$c : V \longrightarrow [N+1]$$

gibt, so daß verschiedene Ecken eines Simplexes aus Δ verschieden gefärbt sind :

F. alle $\sigma \in \Delta$ und $v \neq w \in \sigma$ gilt $c(v) \neq c(w)$.

2) Sei P eine endliche teilweise geordnete Menge (Poset) und

$= P \dot{\cup} \{0,1\}$.

Für $v \in P$ sei $c(v)$ die Länge der längsten Kette im abgeschlossen Intervall $[0,v]$ (der Rang von v).

Dann ist der simpliziale Komplex $\Delta(P)$ über der Eckenmenge P, ssen Simplexe gerade die Ketten aus P sind, ein färbbarer simizialer Komplex (dafür muß die Jordan-Höldersche Kettenbedinng nicht unbedingt erfüllt sein, denn für $v < w$ ist per Definion $c(v) < c(w)$).

) Sei Δ ein simplizialer Komplex und $P(\Delta)$ das Poset der (nichtoren) Simplexe aus Δ bzgl. der Inklusionsrelation. $\Delta(P(\Delta))$, e erste baryzentrische Unterteilung von Δ (/Sp;3.3.9./), ist nn ein färbbarer Komplex. Die Färbung wird durch $c(\sigma)=/\sigma/$ geben.

) $\Delta_T := \{\sigma \in \Delta : c(\sigma) \subset T\} = \Delta_{c^{-1}(T)}$ für $T \subset [N+1]$

nennen wir die T-Selektion von Δ .

Für ein Poset P ist

$$\Delta(P)_T = \Delta(P_T) = \Delta_{P_T}$$

bei $P_T := \{v \in P : c(v) \in T\}$ das rangselektierte Poset ist

3G/).

0.2. Sei Δ ein färbbarer Komplex, $r = r(\Delta)$ und $c : V \longrightarrow [r]$ eine

Färbung.

Dann kann man auf $R=k[\Delta]$ eine $\mathbb{N}^r$-Graduierung definieren wie

$$\deg_F x_v = e_{c(v)} \in \mathbb{N}^r$$

Diese Graduierung nennen wir <u>Farbgraduierung</u> und bezeichnen sie mit dem Index F.

(1) <u>Proposition</u> (/BG;3.3./) :

$= \beta_T$ in Stanley [3]

$$F_F(R;\underline{t}) = \sum_{T \subseteq [r]} (-1)^{|T|-1} \chi(\Delta_T) \frac{\underline{t}^T}{\prod_{i=1}^{r} (1-t_i)}$$

wobei $\chi(\Delta_T)$ die reduzierte Eulercharakteristik von Δ_T ist (1.2.4.).

Beweis :

$$F_F(R;\underline{t}) = \sum_{\sigma \in \Delta} \prod_{v \in \sigma} \frac{t_{c(v)}}{1-t_{c(v)}} \qquad \text{wie (3.4.1.)}$$

$$= \Big(\sum_{\sigma} \prod_{i \in c(\sigma)} t_i \prod_{i \notin c(\sigma)} (1-t_i)\Big) \prod_{i=1}^{r} (1-t_i)^{-1}$$

$$= \Big(\sum_{S} C(S) \prod_{i \in S} t_i \prod_{i \notin S} (1-t_i)\Big) \prod_{i=1}^{r} (1-t_i)^{-1}$$

$$\text{mit } C(S) = |\{\sigma : c(\sigma) = S\}|$$

$$\prod_{i \in S} t_i \prod_{i \notin S} (1-t_i) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T|-|S|} \underline{t}^T$$

$$\sum_{S} C(S) \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T|-|S|} \underline{t}^T = \sum_{T} (-1)^{|T|} \underline{t}^T \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} C(S)$$

$$\sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} C(S) = \sum_{i=0}^{|T|} (-1)^i \sum_{\substack{S \subseteq T \\ |S|=i}} C(S) = \sum_{i=0}^{|T|} (-1)^i f_{i-1}(\Delta_T)$$

$$= -\chi(\Delta_T) \quad \text{nach (1.2.4.)}$$

denn

$$\sum_{\substack{S \subseteq T \\ |S|=i}} C(S) = |\{\sigma \in \Delta_T : |\sigma| = i\}| = f_{i-1}(\Delta_T) \qquad \blacksquare$$

(2) Aus (3.4.4.) folgt

$$h(k[\Delta],t) = \sum_{i=0}^{r} \Big(\sum_{\substack{|T|=i \\ T\subset[r]}} \chi(\Delta_T) \Big) (-1)^{i-1}\, t^i$$

und damit die Umrechnungsformeln

<u>Satz</u> :

$$h_i = (-1)^{i-1} \sum_{|T|=i} \chi(\Delta_T) \qquad (i=0,\dots,r)$$

$$f_{v-1} = \sum_{|T|\le v} (-1)^{|T|-1} \binom{r-|T|}{v-|T|} \chi(\Delta_T) \qquad (v=0,\dots,r)$$

Diese Formeln erhält man durch Koeffizientenvergleich in obiger bzw. durch Vergleich von (1) und (3.4.2.)

<u>10.3.</u> Sei $\theta_i := \sum_{v:c(v)=i} x_v \qquad (i=1,\dots,r)$

<u>Theorem</u> (/29;4.2./ bzw. /32;2.1./) :

$\theta_1,\dots,\theta_r$ bilden ein Parametersystem für $k[\Delta]$.

Beweis : Sei $I = I(\Delta)$. Für $i = c(v)$ ist

$$x_v^2 \equiv x_v \theta_i \quad (\bmod I)$$

denn für $c(v) = c(w)$, $v \ne w$, ist $x_v x_w \in I$ (kein Simplex aus Δ kann v und w gleichzeitig enthalten).

Damit ist $k[\Delta]/(\theta)$ als k-Vektorraum von quadratfreien Monomen erzeugbar und hat endliche Länge. ∎

<u>10.4.</u> In /BG;Th.3.1./ wird sogar $k[\Delta]/(\theta)$ beschrieben (k-Körper) :

(1) $$[k[\Delta]/(\theta)]_U = \begin{cases} \tilde{H}^{|s(U)|-1}(\Delta_{s(U)}) & U \in \{0,1\}^r \subset \mathbb{N}^r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt

(2) $$F_{\mathbb{N}}(k[\Delta]/(\theta);t) = \sum_{S\subset[r]} \dim_k \tilde{H}^{|S|-1}(\Delta_S)\, t_S$$

und folgendes CM-Kriterium :

(3) <u>Proposition</u> (/BG;5.2./) : Ein färbbarer Komplex Δ ist Cohen-Macaulay genau dann, wenn für alle $S\subset[r]$ gilt

$$(-1)^{|S|-1}\chi(\Delta_S) = \dim_k \tilde{H}^{|S|-1}(\Delta_S)$$

11. Spezielle simpliziale Komplexe

11.1. Sei k ein Körper oder $\mathbb{Z}$.

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz (2.5.1.) kann man folgende Mayer-Vietoris-Argumente für CM- bzw. BB-Komplexe ableiten :

Satz : (1) Sind Δ_1 und Δ_2 N-dimensionale CM-Komplexe und $\Delta_1 \cap \Delta_2$ (N-1)-dimensional CM, so ist $\Delta_1 \cup \Delta_2$ N-dimensional CM.

(2) Sind Δ_1 und Δ_2 N-dimensional BB und $\Delta_1 \cap \Delta_2$ (N-1)-dimensional BB, so ist $\Delta_1 \cup \Delta_2$ N-dimensional BB.

Beweis : Man wende auf (2.5.1.) die lange lokale Kohomologiesequenz an:

$$H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(k[\Delta_1 \cap \Delta_2]) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i}(k[\Delta_1 \cup \Delta_2]) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i}(k[\Delta_1]) \oplus H_{\mathfrak{m}}^{i}(k[\Delta_2])$$

(1) folgt dann unmittelbar aus (5.6.). (2), wenn man sich noch überlegt, daß in einer exakten Sequenz $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ von S-Moduln mit A und C auch B endlich erzeugt ist. ∅

11.2. Definition : Ein reindimensionaler simplizialer Komplex Δ heißt schälbar, wenn man die maximalen Simplexe von Δ so ordnen kann, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, daß die maximalen Elemente der Mengen

$$\{ \sigma_i \cap \sigma_k : i=1,2,\ldots,k-1 \}$$

für alle $k=2,\ldots,m$ (N-1)-dimensional sind.

(Vgl. /St;§5/, /16/ u.a.)

Eine Verallgemeinerung dieses Begriffes sind die konstruierbaren Komplexe (/St;§5/). Diese werden rekursiv definiert :

(a) Jedes Simplex ist konstruierbar.

(b) Sind Δ_1 und Δ_2 N-dimensional und konstruierbar sowie $\Delta_1 \cap \Delta_2$ (N-1)-dimensional und konstruierbar, so ist $\Delta_1 \cup \Delta_2$ konstruierbar.

Aus (11.1.) folgt dann sofort

<u>Korollar (/St;35/)</u> : Konstruierbare simpliziale Komplexe, speziell also auch schälbare, sind Cohen-Macaulay.

<u>1.3.</u> In (1.3.3.) wurde der Begriff des n-Skeletts von Δ definiert :

$$\underline{\Delta_n := \{\sigma \in \Delta : \dim \sigma \leq n\}}$$

1) <u>Lemma</u> (vgl./DD;3.1./) :

$$\tilde{H}_n(\Delta) \cong \tilde{H}_n(\Delta_i) \qquad \text{für } i > n$$

Diese Tatsache folgt aus der langen Homologiesequenz des Paares $\Delta_i \subset \Delta$ und $H_n(\Delta, \Delta_i) = 0$ für $n \leq i$ wegen $\tilde{C}_n(\Delta) = \tilde{C}_n(\Delta_i)$.

2) <u>Theorem</u> :

(a) Δ_i ist CM $\Leftrightarrow$ depth $k[\Delta] \geq i+1$

(b) Δ_i ist BB $\Leftrightarrow$ endim $k[\Delta] \geq i+1$

Beweis : Es gilt

(c) $\underline{\operatorname{link}_{\Delta_i} \sigma = (\operatorname{link}_\Delta \sigma)_{i-|\sigma|} \qquad \text{für } \sigma \in \Delta_i}$

$$= \{\tau \in \Delta_i : \sigma \,\dot{\cup}\, \tau \in \Delta_i\}$$

$$= \{\tau \in \Delta : \sigma \,\dot{\cup}\, \tau \in \Delta \,;\, \dim(\sigma \,\dot{\cup}\, \tau) \leq i\}$$

Nach (5.2.7.) ist Δ_i CM genau dann, wenn

$$\tilde{H}_j(\operatorname{link}_{\Delta_i} \sigma) = 0 \qquad \text{für } j < i-|\sigma| \text{ und alle } \sigma \in \Delta_i$$

Wegen (c) ist das aber äquivalent zu

$$\tilde{H}_j(\operatorname{link}_\Delta \sigma) = 0 \qquad \text{für } j < i-|\sigma| \text{ und alle } \sigma \in \Delta$$

(ist $|\sigma| > i+1$, so ist $j < -1$ und $\tilde{H}^j = 0$ automatisch erfüllt)

und mit (5.2.1.) zu

$\underline{\text{depth } k[\Delta] \geq i+1}$

Analog beweist man (b) ∎

3) <u>Korollar</u> :

depth $k[\Delta] = \max\{ i : \Delta_i - \text{CM} \} + 1$

endim $k[\Delta] = \max\{ i : \Delta_i - \text{BB} \} + 1$

4) <u>Korollar</u> :

(a) (vgl. /BG;5.5./) Ist Δ CM, so ist auch jedes Skelett

Δ_n CM ($n=0,\dots,\dim\Delta$)

(b) Ist Δ BB, so ist auch jedes Skelett Δ_n Buchsbaum

($n=0,\dots,\dim\Delta$)

(5) Die Gorensteineigenschaft bleibt im Allgemeinen nicht erhal-
ten, wie folgendes Beispiel zeigt :

$\Delta = ((123),(124),(134),(234))$

ist als Triangulierung einer Sphäre Gorenstein

(8.3.3.).

$\Delta_1 = ((12),(13),(14),(23),(24),(34))$

ist jedoch nicht Gorenstein.

us (6.5.) ergibt sich

$$K_{\Delta_1} \cong (x_1x_2-x_2x_3+x_1x_3,\ x_1x_2-x_2x_4+x_3x_4,\ x_1x_4-x_3x_4+x_1x_3)$$

gl. auch (11.6.2.).

11.4. Untersuchen wir nun die Selektionen eines färbbaren sim-
lizialen Komplexes Δ, vgl. (10.1.4.).

Sei Δ ein färbbarer simplizialer Komplex der Dimension $r-1$
nd $c: V \longrightarrow [r]$ eine Färbung.

1) Theorem : Ist Δ Cohen-Macaulay, so ist für alle $S \subseteq [r]$ Δ_S
Cohen-Macaulay.

weis : Ist Δ CM, so ist $(\theta_1,\dots,\theta_r)$ aus (10.3.) eine Primse-
enz in $k[\Delta]$. Da

$$k[\Delta_S] \cong k[\Delta]/(x_v : c(v) \notin S),$$

t dann auch $(\theta_i : i \in S)$ eine Primsequenz in $k[\Delta_S]$. Dies
lgt daraus, daß das Parametersystem $(\underline{\theta})$ multihomogen bzgl.
r Farbgraduierung ist :

Sei $F(\underline{x})\theta_i \in (\theta_1,\dots,\theta_{i-1}) + I(\Delta_S)$ und $i \in S$. OBdA können
r annehmen, daß $F(\underline{x})$ aus dem Polynomring $S(V')$ gewählt wurde
t $V'=c^{-1}(S)$, denn Variable mit Farben, die nicht zu S gehören,
nnen in $I(\Delta_S)$ aufgesammelt werden. Dann ist

$$F(\underline{x})\theta_i \in ((\theta_1,\dots,\theta_{i-1}) + I(\Delta_S)) \cap S(V') \subset$$

$$\subset (\theta_1, \ldots, \theta_{1-1}) + I(\Delta)$$

also $F(\underline{x}) \equiv 0 \pmod{I}$, da Δ CM, also $(\underline{\theta})$ Primsequenz für Δ_S. ■

(2) <u>Korollar :</u> Ist Δ Buchsbaum, so ist Δ_S Buchsbaum für alle $S \subset [r]$.

Beweis : Nach (5.2.8.) sind alle $\mathrm{link}_\Delta(v)$, $v \in V$, $(r-2)$-dimensional CM und färbbar. Nach (1) sind dann auch alle

$$\underline{\mathrm{link}_{\Delta_S}(v) = (\mathrm{link}_\Delta(v))_{S-c(v)}} \quad \text{für } v \in V \text{ mit } c(v) \in S$$

$(/S/-2)$-dimensional CM und damit Δ_S $(/S/-1)$-dimensional BB nach (5.2.8.). ■

(3) Diese Ergebnisse sind für den Fall von Posets in /2/ bzw. /BG/ enthalten. Man kann sie auch analog /BG;3.1./ beweisen, wobei für Buchsbaumkomplexe noch

$$\tilde{H}_i(\Delta_S) = \tilde{H}_i(\Delta) \quad \text{für } i < \dim \Delta_S - 1$$

abfällt (/2;6.5./).

<u>11.5.</u> Beschreiben wir nun den Außenrand eines Simplexes, vgl. (1.3.1.).

(2.3.4.) liefert zusammen mit der Definition des Außenrandes von $\tau \in \Delta$

(1) $$\underline{I(\mathrm{link}_\Delta \tau) = \bigcap_{\substack{\sigma \supset \tau \\ \sigma \in \Delta}} A(\sigma)}$$

Speziell gilt

(2) $$\underline{k[\Delta]_{A(\tau)} \cong k(x_v : v \in \tau)[\mathrm{link}_\Delta \tau]}$$

wobei links die Lokalisierung nach dem Primideal $A(\tau)$ steht und rechts der Stanley-Reisner-Ring von $\mathrm{link}_\Delta \tau$ über der transzendenten Erweiterung von k, die man durch die Hinzunahme der Unbekannten x_v, $v \in \tau$ bekommt.

Das folgt unmittelbar aus den Isomorphismen

$$k[\Delta]_{A(\tau)} \cong S(V)_{A(\tau)}/I(\Delta)_{A(\tau)} \cong$$
$$\cong k(x_v : v \in \tau)[x_v : v \notin \tau]/\bigcap_{\sigma \supset \tau} A(\sigma)$$

11.6. Der Fall kleiner Dimension

1) $\dim \Delta = 0$. Δ bestehe aus n Punkten

(5.2.7.) $\Rightarrow \Delta$ ist immer Cohen-Macaulay

(6.3.) $\Rightarrow K_\Delta$ hat $n-1$ Erzeugende vom Grad 0 ($n \geqq 2$) oder ein Erzeugendes vom Grad 1 ($n=1$).

(8.1.) $\Rightarrow \Delta$ ist Gorenstein genau wenn $n \leq 2$.

2) $\dim \Delta = 1$.

(5.2.6.) $\Rightarrow \Delta$ ist Buchsbaum genau dann, wenn Δ reindimensional ist, d.h. es gibt keine "alleinstehenden" Ecken.

(5.2.7.) $\Rightarrow \Delta$ ist Cohen-Macaulay genau dann, wenn Δ zusammenhängend ist.

(8.2.5.) $\Rightarrow \Delta$ ist Gorenstein genau dann, wenn Δ die Triangulierung einer Kreislinie ist oder eine Strecke mit höchstens drei Ecken.

(vgl. /15;5.5./)

12. Weitere Ergebnisse und Fragestellungen (Überblick).

12.1. Sei k ein Körper und Δ ein N-dimensionaler simplizialer Komplex über der Eckenmenge $V = \{1,2,\dots,n\}$.

Fröberg (/11/) berechnet die Homologien des Koszulkomplexes (Def. vgl. /M;(28.0.)/) von $k[\Delta] = R$

$$K_\bullet(x_1,\dots,x_n \,;\, k[\Delta]) : 0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 (\longrightarrow k) \longrightarrow 0$$

Dabei kann man die freien R-Moduln F_i so (multi)graduieren, daß die Randabbildungen multihomogen vom Grad 0 werden.

Proposition (/11/) : Für die Homologien $H_\bullet = H_\bullet(K_\bullet)$ $= \mathrm{Tor}_\bullet(k[\Delta], k)$ des Koszulkomplexes gilt

$$[H_\bullet]_U = 0 \qquad \text{wenn } U \notin \{0,1\}^V$$

$$[H_s]_U \cong \tilde{H}^{|s(U)|-s-1}(\Delta_{s(U)}) \qquad \text{wenn } U \in \{0,1\}^V$$

Speziell folgt daraus

Korollar (/15;5.1./ vgl. auch /11/) :

$$b_i = \dim_k H_i(K_\bullet) = \sum_{i \le |W| \le n} \dim_k \tilde{H}^{|W|-i-1}(\Delta_W)$$

sind die Bettizahlen von R, vgl. (3.1.3.)

12.2. Jede natürliche Zahl n läßt sich in Abhängigkeit von k eindeutig in der Form

$$n = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_i}{i}$$

$$\text{mit} \quad a_k > a_{k-1} > \dots > a_i \ge i > 0$$

darstellen.

Setzen wir

$$n^{(k)} := \binom{a_k+1}{k+1} + \binom{a_{k-1}+1}{k} + \dots + \binom{a_i+1}{i+1} \quad \text{und}$$

$$n_{(k)} := \binom{a_k}{k+1} + \binom{a_{k-1}}{k} + \dots + \binom{a_i}{i+1}.$$

Proposition (Satz von Kruskal) :

Eine Sequenz $(f_0, f_1, \dots, f_N)$ ist genau dann f-Vektor eines simplizialen Komplexes, wenn

$$0 \le f_k \le (f_{k-1})_{(k)} \qquad k=1,2,\dots,N$$

vgl. /9/ bzw. /29;1.1./.

Damit können wir die möglichen f-Vektoren simplizialer Komplexe beschreiben und es entsteht folgende

<u>Frage</u> : Wieviel (verschiedene) f-Vektoren gibt es (bei vorgegebener Dimension N und Eckenzahl $f_0=n$) ?

Dies wäre zugleich eine untere Abschätzung für die Zahl der kombinatorischen Typen von simplizialen Komplexen, d.h. der Zahl der Klassen simplizialer Komplexe, die, als teilweise geordnete Menge aufgefaßt, ordnungsisomorph sind.

(8.1.6.) gab ein Beispiel, daß es nichtisomorphe Komplexe mit demselben f-Vektor gibt.

<u>12.3.</u> Auf ähnliche Weise wie in (12.2.) kann man h-Vektoren von CM-Komplexen charakterisieren :

<u>Proposition</u> (/St;Th.6/) :

Ist Δ CM, so gilt für dessen h-Vektor

(1) $h_0=1$ und $0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{(i+1)}$ $i=1,\dots,N$

Umgekehrt gibt es zu jeder Sequenz (1) einen schälbaren Komplex Δ, dessen h-Vektor die vorgegebene Sequenz (1) ist.

Genau wie in (12.2.) ergibt sich die

<u>Frage</u> : Wieviel verschiedene h-Vektoren gibt es (bei vorgegebenem r und h_1) ?

<u>12.4.</u> Im Zusammenhang mit Fragen der linearen Optimierung stellen konvexe simpliziale Polytope eine Klasse besonders interessierender simplizialer Komplexe dar (vgl. /17/, /5/, /7/).

Konvexe simpliziale Polytope sind als Triangulierungen von Sphären Gorenstein, (8.3.3.).(Allerdings gibt es auch nichtkonvexe Triangulierungen der Sphäre). Für den h-Vektor $(h_0,\dots,h_r)$ gilt deshalb Symmetrie (8.1.5.)

$$\underline{h_i = h_{r-i} \qquad i=0,\dots,r}$$

Eine Vermutung von McMullen (/20/) besagt :

(McMullen's g-conjecture)

$(h_0,\dots,h_r)$ ist genau dann h-Vektor eines konvexen simplizialen Polytops, wenn

(1) $h_i=h_{r-i}$

(2) $(h_0,h_1-h_0,h_2-h_1,\dots,h_s-h_{s-1})$ $\qquad s=\left[\frac{r}{2}\right]$

erfüllt die Bedingung (12.3.1.)

In /6/ wird gezeigt, daß es zu jeder vorgegebenen Sequenz, die (1) und (2) erfüllt, ein konvexes simpliziales Polytop gibt, dessen h-Vektor die vorgegebene Sequenz ist.

Stanley zeigt in /30/, daß diese Bedingungen auch notwendig sind.

Es ergibt sich die (bis heute ungelöste) Frage, ob (1) und (2) generell die h-Vektoren von Gorensteinkomplexen (mit $\tilde{H}_r(\Delta)\neq 0$, vgl. (8.2.5.)) bzw. wenigstens von Triangulierungen der Sphäre S^{r-1} beschreibt.

Diese Frage ist auch deshalb interessant, weil es (allgemeinere) Gorensteinringe gibt, deren h-Vektor (2) nicht erfüllt (/28;4.5./). Ihre positive Beantwortung würde also zeigen, daß im Gegensatz zum CM-Fall die Menge der möglichen h-Vektoren von Gorensteinringen, die aus simplizialen Komplexen gebildet werden können, die Menge aller möglichen h-Vektoren von Gorensteinringen nicht ausschöpft.

LITERATUR

/1/ Atiyah,M.F. + MacDonald,I.G. : Introduction to Commutative Algebra (Reading, Mass. , 1969)

/2/ Baclawski,K. : Cohen-Macaulay Ordered Sets (J.of Alg. 63 (1980), 226 - 258)

/BG/ Baclawski,K. + Garsia,A. : Combinatorial Decompositions of a Class of Rings (Adv.math. 39 (1981), 155 - 184)

/3/ Baclawski,K. : Rings with Lexicographic Straightening Law (Adv.math 39 (1981), 185 - 213)

/4/ Baclawski,K. : Canonical Modules of Partially Ordered Sets (Manuskript)

/5/ Barnette,D. : A Proof of the Lower Bound Conjecture for Convex Polytopes (Pacific J.Math. 46 (1973), 349 - 355)

/6/ Billera,L.J. + Lee,C.W. : Sufficiency of McMullen's Conditions for f-vectors of Simplicial Polytopes (Bull.Amer.Math.Soc. (N.S.) 2 (1980), 181 - 186)

/7/ Björner,A. : The Unimodality Conjecture for Convex Polytopes (Bull.Amer.Math.Soc. (N.S.) 4 (1981), 187 - 189)

/8/ Cartan,H. + Eilenberg,S. : Homological Algebra (Princeton, New Jersey, 1956)

/9/ Eckhoff,J. + Wegner,G. : Über einen Satz von Kruskal (Period.math.hung. 6 (1975), 137 - 142)

/10/ Foxby,H.-B. : A Homological Theory of Complexes of Modules (Kopenhagen Univ., preprint 19.1981)

/11/ Fröberg,R. : Two Notes on Squarefree Monomial Rings (Rep.Dep.Math.Univ.Stockholm 13 (1977))

/12/ Garsia,A.M. : Combinatorial Methods in the Theory of CM Rings (Adv.math. 38 (1980), 229 - 266)

/13/ Grothendieck,A. Local Cohomology (Springer Lecture Notes Nr. 41 (1967))

/HK/ Herzog,J. + Kunz,E. : Der kanonische Modul eines CM-Ringes (Springer Lecture Notes 238 (1971))

/14/ Hochster,M. : Brief an R.P.Stanley (30.Juni 1976)

/15/ Hochster,M. : CM Rings, Combinatorics and Simplicial Complexes (in: Ring Theory II. Proceedings of the Second Oklahoma Conference, Springer Lecture Notes 26 (1977))

/16/ Kind,B. + Kleinschmidt,P. : Schälbare CM-Komplexe und ihre Parametrisierung (Math.Z. 167 (1979), 173 - 179)

/17/ Klee,V. : Polytope Pairs and their Relationship to Linear Programming (Acta Math. 133 (1974), 1 - 25)

/18/ Lefschetz,S. : Introduction to Topology (Princeton, 1949)

/19/ Matijevic,J. + Roberts,P. : A Conjecture of Nagata on Graded CM Rings (J.Math.Kyoto Univ. 14 (1974), 125-128)

/M/ Matsumura,H. : Commutative Algebra (Benjamin, New York, 1970)

/20/ McMullen,P. : The Number of Faces of a Simplicial Polytope (Isr.J.of Math. 9 (1971), 559 - 570)

/21/ Munkres,J. : Topological Results in Combinatorics (Manuskript, 1976)

/22/ Pontrjagin,L. : Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze (Math.Ann. 105 (1931), 165 - 205)

/23/ Reisner,G. : CM Quotients of Polynomial Rings (Adv.Math. 21 (1976), 30 - 49)

/24/ Schenzel,P. : Einige Anwendungen der lokalen Dualität und verallgemeinerte CM-Moduln (Math.Nachr. 69 (1975), 227-242)

/Sch/ Schenzel,P. : Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaumringe (Springer Lecture Notes 907 (1982))

/25/ Seifert,H. + Threlfall,W. : Lehrbuch der Topologie (Teubner, Berlin und Leipzig, 1934)

/26/ Serre,J.-P. : Algèbre locale - multiplicités (Springer Lecture Notes 11 (1965))

/Sp/ Spanier,E.H. : Algebraic Topology (McGraw-Hill, 1966)

/27/ Stanley,R.P. : The Upper Bound Conjecture and CM Rings (Studies in Applied Math. **54** (1975), 135 - 142)

/St/ Stanley,R.P. : Cohen-Macaulay Complexes (in: "Higher Combinatorics" (M.Aigner ed.), Reidel, Dortrecht, 1977, 52 - 62)

/28/ Stanley,R.P.: Hilbert Functions and Graded Algebras (Adv.Math. **28** (1978), 57 - 83)

/29/ Stanley,R.P.: Balanced CM Complexes (Trans.Amer.Math.Soc. **249** (1979), 139 - 157)

/30/ Stanley,R.P.: The Number of Faces of a Simplicial Convex Polytope (Adv.Math. **35** (1980), 236 - 238)

/31/ Stanley,R.P.: Interactions between Commutative Algebra and Combinatorics (Rep.Dep.Math.Univ.Stockholm 4.1982)

/32/ Zariski,O. + Samuel,P.: Commutative Algebra II (van Nostrand, Princeton, 1960)

ALTSVERZEICHNIS

Bemerkungen zu weiteren Konstruktionen neuer Komplexe aus alten → S. 59