Besprechungen zu Büchern der Computeralgebra

Erschienen im Computeralgebra Rundbrief 22, März 1998.

- **W.V. Vasconcelos, Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry**

  Band 2 der Reihe *Algorithms and Computations in Mathematics*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1998, ISBN 3-540-60520-7, pp. 394, DM 118.

  Dieses Buch eines ausgewiesenen Experten auf dem Gebiet der konstruktiven Methoden in der kommutativen Algebra (um diese geht es im wesentlichen) ist ein weiterer Mosaikstein in der monographischen Aufarbeitung der Grundlagen des symbolischen Rechnens, der sich eine Reihe von Autoren in den letzten Jahren verstärkt gewidmet haben.

  Ein wichtiges Anliegen des Autors besteht darin, auf beschränktem Raum eine Vielzahl von Ideen aufzugreifen und in (oft allerdings nur dem fortgeschrittenen Leser verständlichen) Grundzügen darzustellen, die sich in den letzten Jahren bei quantitativen Untersuchungen im Bereich der kommutativen Algebra als fruchtbar erwiesen haben und bisher einzig über eine Vielzahl von Zeitschriftenartikel (wenn überhaupt) zugänglich waren.

  Um dieses Ziel zu erreichen, muß die Darlegung des umfangreichen begrifflichen Apparats der kommutativen Algebra rudimentär bleiben, was mit Hinblick auf existierende klassische (Kaplansky, Matsumura) oder neuere Texte ([E] oder [BH]) allerdings kein Mangel ist. Wissen im Umfang von [AM] wird vorausgesetzt, jedoch sollte der Leser auch einige Erfahrung mit den darüber hinaus in einem Anhang A (60 S.) “A Primer on Commutative Algebra” entwickelten Konzepten besitzen, die von Noetherschen Ringen über ganze Erweiterungen und Syzygientheorie bis hin zu lokaler Kohomologie und Liaison reichen. Kenntnisse über Hilbertreihen als einem der grundlegenden Werkzeuge für homogene Ideale sind ebenfalls nützlich, obwohl in einem von J.Herzog verfaßten Anhang B (24 S.) wichtige Ergebnisse über Hilbertfunktionen (G-Filtrierungen und die Rolle des Rees- sowie des assoziierten graduierten Rings; das Bayersche Deformationsargument; Hilbert-Funktionen, Auflösungen und lokale Kohomologie; Lex-Segment-Ideale, Bettizahlen und die Sätze von Green und Gotzmann) zusammenhängend entwickelt werden.

  Aus ähnlichem Grund wird auf eine fundierte Einführung in die Theorie der Gröbnerbasen verzichtet, obwohl diese das primum mobile eigentlich aller diskutierten konstruktiven Verfahren sind; es wird einfach davon ausgegangen, daß diese in einer genügend effizienten und umfassenden (Modulfall, Syzygienberechnung) Implementierung zur Verfügung stehen. Neben einer Zusammenstellung grundlegender Begriffe zu diesem Thema in Kapitel 1 (20 S.) wird deshalb im Anhang C (25 S., Autoren: D.Eisenbud, D.R.Grayson, M.E.Stillman) das Arbeiten mit der Version 2 des bekannten Spezialsystem MACAULAY als einem für die entsprechenden Rechnungen bestens geeigneten Werkzeug vorgestellt.

  Das Buch ist also kein Lehrbuch im herkömmlichen Verständnis, obwohl für Graduiertenseminare bei entsprechenden Vorkenntnissen durchaus geeignet (und vom Autor in Teilen auf verschiedenen Sommerschulen auch bereits eingesetzt). Es beginnt im wesentlichen dort, wo in den oben genannten grundlegenderen Monographien insbesondere konstruktive Aspekte nicht weiter vertieft werden und ist damit ein Mosaikstein im wirklichen Sinne.

  Es ist zugleich keine Monographie im herkömmlichen Verständnis, die sich an einem engen Thema erschöpfend abarbeitet, sondern mehr eine Fundgrube von Ideen und Ansätzen, in denen die verschiedensten Techniken der kommutativen Algebra bis hin zu tiefliegenden homologischen Methoden zusammenspielen. Sie sind, wie vom Autor gewohnt, oft unterschiedlich detailliert ausgearbeitet, beleuchten aber an vielen Stellen Querverbindungen, die man in dieser Kostellation in anderen Arbeiten selten findet.

Für ein *detaillierteres* Studium insbesondere von Fragestellungen, die in den späteren Kapiteln aufgegriffen werden, wird der Leser deshalb kaum um die Konsultation der entsprechenden Zeitschriftenaufsätze herumkommen, sofern er sie nicht sowieso schon kennt. Als guter Leitfaden für ein solches Unterfangen ist das vorliegende Buch allerdings bestens geeignet und deshalb jedem, der sich ernsthaft mit konstruktiven Methoden in der kommutativen Algebra beschäftigen möchte, zu empfehlen.

Um dem Leser dieser Rezension auch einen gewissen inhaltlichen Überblick zu ermöglichen, seien zum Abschluß aus den einzelnen Kapiteln die wichtigsten Themen aufgelistet, die aufgegriffen und auf konstruktive Aspekte hin untersucht werden:

Kap. 2 (34 S.): Toolkit
Endomorphismenringe und reguläre Elemente; Noether-Normalisierung und Noether-Komplexität; Fitting-Ideale; ganze Erweiterungen; Flachheit, generische Flachheit und Torsionsfreiheit; Cohen-Macaulay-Algebren und deren Hilbertfunktion.

Kap. 3 (36 S.): Primärzerlegung
Grundlegende Begriffe; Primärzerlegung von Monomidealen; äquidimensionale Zerlegung und homologische Methoden; grobe äquidimensionale Zerlegung ohne Exts; Lokalisierungstechniken und verschiedene Reduktionen auf Dimension 0; Primalitätstests für Ideale ohne Faktorisierung; Symbolische Potenzen.

Kap. 4 (24 S.): Rechnen in Artinschen Algebren
Artinsche Algebren und lineare Algebra, Sockel und Jacobson-Radikal; Radikal nulldimensionaler Ideale; Berechnung von Dekompositionen als verallgemeinerte Faktorisierung.

Kap. 5 (22 S.): Nullstellensätze
Radikalberechnung und Jacobi-Ideal; generische Sockel-Formeln; Konstruktion regulärer Sequenzen; obere Jacobi-Ideale und das Top-Radikal.

Kap. 6 (38 S.): Ganzer Abschluß
Multiplikationsring $\mathrm{Hom}_R(I, I)$; S_2-ifizierung; Desingularisierung in Kodimension 1; ganzer Abschluß eines Ideals und eines Rings.

Kap. 7 (28 S.): Idealtransformierte und Invariantenringe
Gleichungen für verschiedene Aufblasungsringe; Tangentialkegel und analytic spread; faktorieller Abschluß und symbolische Aufblasung; Unterringe von Polynomringen; Semigruppen-Ringe; SAGBI-Basen; Invariantenringe von linearen Gruppen.

Kap. 8 (8 S.): Zur Kohomologieberechnung über dem $\mathbf{P}^n$ (von D.Eisenbud)

Kap. 9 (52 S.): Komplexitätsgrad eines graduierten Moduls
Grad, arithmetischer und geometrischer Grad und Verallgemeinerungen; Schranke von Brownawell/Kollar im Nullstellensatz (o. Bew.); Reduktionszahl; arithmetischer Grad und Reduktionszahl; arithmetischer Grad und Erzeugendenzahl; Verallgemeinerungen des arithmetischen Grades, die verschiedene Homologien genauer berücksichtigen; verschiedene Schranken.

[AM] M.F.Atiyah, I.G.MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley 1969

[BH] W.Bruns, J.Herzog: Cohen-Macaulay Rings, Cambridge Univ. Press 1993

[E] D.Eisenbud: Commutative Algebra with a View towards Algebraic Geometry, Springer 1994

Hans-Gert Gräbe (Leipzig)