Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Andreas Maletti
Gustav Grabolle
Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

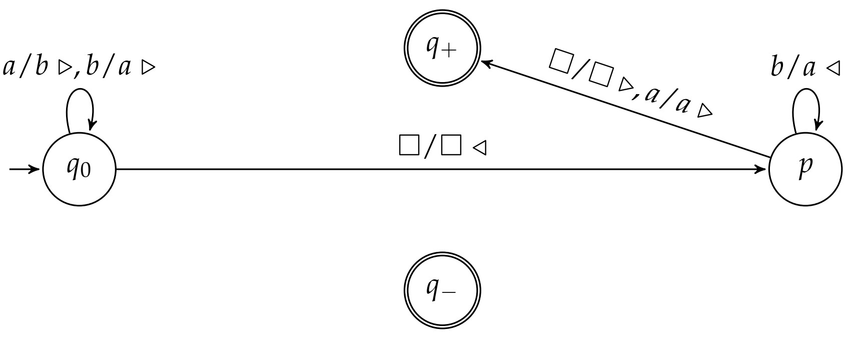
Serie 7

Hinweise:

- **Dieses Blatt beinhaltet leichte Überblicksaufgaben zu den bisherigen Themen. In der Klausur könnten schwerere Aufgaben enthalten sein.**
- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **12.07.2018** vor der Vorlesung.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
- In dieser Serie wird jede Aufgabe mit 0 oder 1 Punkten bewertet. Sobald 4 oder mehr Punkte erreicht wurden und in den Serien 1-6 noch nicht 6 Bonuspunkte erarbeitet wurden, gibt dieses Blatt einen Bonuspunkt für die Klausur.

Hausaufgabe 7.1 (Turingmaschinen)

Gegeben ist die Turingmaschine $M = (\{q_0, p, q_+, q_-\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$, wobei Δ durch folgendes Diagramm gegeben ist.



(a) Geben Sie $L(M)$ an.

(b) Geben Sie $T(M)$ an.

Hausaufgabe 7.2 (LOOP- und WHILE-Programme)

Gegeben sei ein LOOP-Programm P' mit $\text{maxvar}(P') \geq 2$. Geben Sie ein LOOP-Programm P an, sodass

$$|P|_1(n) = |P'|_2(n, n^2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie eigene Zeilen in strikter Syntax.

Hausaufgabe 7.3 (Primitive- und μ-Rekursion)

(a) Gegeben seien die primitiv rekursiven Funktionen

$$\begin{array}{rrcll} f: & \mathbb{N} \to \mathbb{N}: & k & \mapsto & 2^k \quad \text{und} \\ g: & \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}: & (a_1, a_2, a_3) & \mapsto & a_1 \cdot 2 \quad . \end{array}$$

Geben Sie $\text{pr}{<}f, g{>}$ explizit an.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Geben Sie eine primitiv rekursive Funktion $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ an, sodass

$$\mu(h) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq m \\ \texttt{undef} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Hausaufgabe 7.4 (Entscheidbarkeit und Reduktion)

Wir betrachten gerichtete, endliche, zusammenhängende Graphen $G = (V, E)$.

Ein *Eulerpfad* in G ist ein Pfad in G, welcher jede Kante genau einmal benutzt. Dies bedeutet, dass eine Eulerpfad p eine Sequenz von Kanten $p = \langle t_1, \ldots t_{|E|} \rangle$ ist, für welche (1) und (2) gelten.

$$\forall 1 \leq i < j \leq |E|. \big(t_i \neq t_j\big) \tag{1}$$

$$\forall 1 \leq i < |E|. \big(t_i = (v, v') \land t_{i+1} = (v'', v''') \to v' = v''\big) \tag{2}$$

Ein *Eulerkreis* in G ist ein Kreis in G, welcher jede Kante genau einmal benutzt. Dies bedeutet, dass ein Eulerkreis k eine Sequenz von Kanten $k = \langle t_1, \ldots, t_{|E|} \rangle$ ist, für welche (1), (2) und (3) gelten.

$$t_1 = (v, v') \land t_{|E|} = (v'', v''') \to v = v''' \tag{3}$$

Betrachten Sie folgende Probleme:

PROBLEM: EULERPFAD

GEGEBEN: Gerichteter, endlicher, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, Knoten $v_1, v_2 \in V$.

GEFRAGT: Existiert ein Eulerpfad in G, der in v_1 beginnt und in v_2 endet?

Problem: EULERKREIS

Gegeben: Gerichteter, endlicher, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Existiert ein Eulerkreis in G?

Zeigen Sie EULERPFAD $\preceq$ EULERKREIS.

Hausaufgabe 7.5 (Komplexität I)

Zeigen Sie EULERPFAD $\in$ NP.

Hausaufgabe 7.6 (Komplexität II)

Zeigen Sie, dass STABIL (s. Hausaufgabe 6.6) NP-vollständig ist.