

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 6

Hinweise:

- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **05.07.2018** vor der Vorlesung.
 - Die Seminaufgaben werden in den Übungen vom 26.06. bis 05.07. besprochen.
 - Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer, Name, Übungsgruppe**.
 - Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
-

Zur Wiederholung 6.1

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Was ist PCP?
- Wie beweisen wir (Un)Entscheidbarkeit mittels Reduktion?
- Welche Mengen bezeichnen die Probleme *Leerheit*, *Leerheit des Schnitts*, *Endlichkeit des Schnitts*, *Inklusion* und *Äquivalenz* üblicherweise?
- Was ist WA?

Zur Wiederholung 6.2

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Wie hängt die Komplexität von Algorithmen und Problemen zusammen?
- Wann ist eine Sprache polynomiell entscheidbar?
- Wann ist eine Sprache nichtdeterministisch polynomiell entscheidbar?
- Wann gilt $L \preceq_P K$ für zwei Probleme L, K ?

Seminaraufgabe 6.1

(a) Wir definieren: $L_{PCP}^{\Sigma} = \{P \mid P \text{ ist lösbares } \Sigma\text{-PCP}\}$. Beweisen Sie nachfolgende Aussagen.

- (i) $\{(100, 110), (11, 1), (1, 01)\} \in L_{PCP}^{\{0,1\}}$.
- (ii) $\{(110, 1), (10, 100), (10, 010), (01, 110)\} \in L_{PCP}^{\{0,1\}}$.
- (iii) $L_{PCP}^{\Gamma} \preceq L_{PCP}^{\{0,1\}}$, für beliebige Γ .

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Entscheidbarkeit des folgenden Problems:

$$\{P \text{ WHILE-Programm} \mid |P|_2 \text{ ist nicht LOOP-berechenbar}\}$$

Hinweis: Ein PCP P ist genau dann ein Σ -PCP, wenn $u_i, v_i \in \Sigma^*$ für alle $(u_i, v_i) \in P$ gilt.

Seminaraufgabe 6.2

Wir betrachten die folgenden Probleme:

PROBLEM: RUCKSACK

PROBLEM: PARTITION

GEGEBEN: $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}$.

GEGEBEN: $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

GEFRAGT: Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit

GEFRAGT: Existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit

$$\sum_{i \in I} n_i = r$$

$$\sum_{i \in I} n_i = \sum_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus I} n_j$$

- (a) Zeigen Sie $\text{RUCKSACK} \preceq_P \text{PARTITION}$.
- (b) Zeigen Sie $\text{PARTITION} \in \text{NP}$.

Seminaraufgabe 6.3

- (a) Bestimmen Sie die größte Teilmenge der Typ-0 Sprachen, die unter Komplement abgeschlossen ist.
- (b) Wir betrachten WHILE-Programme P , die ausschließlich durch nachfolgende Regeln erzeugt wurden.

- (1) $x_i = x_j + z$
- (2) $P_1; P_2$

Zeigen Sie explizit, dass für jedes dieser Programme $|P|_{\text{maxvar}(P)}$ arithmetisch repräsentierbar ist.

Hausaufgabe 6.4

(a) Beweisen oder widerlegen Sie nachfolgende Aussagen.

- (i) $\{(abb, aab), (aa, a), (a, ba)\} \in L_{PCP}^{\{a,b,c\}}$
- (ii) $\{(abca, bc), (caab, acbc), (ba, aaac), (abbaca, acab), (bb, bbbc), (abcb, bbaaab)\} \in L_{PCP}^{\{a,b,c\}}$.
- (iii) Es existiert $P \in L_{PCP}^{\{0,1\}}$ mit endlich vielen Lösungen.

Hinweis: Resultate aus der Vorlesung dürfen benutzt werden.

- (b) Wir definieren: Sei P ein PCP , dann ist $lsg(P)$ die Menge der Lösungen von P . Zeigen Sie, dass $\{(P_1, P_2) \mid lsg(P_1) \cap lsg(P_2) \neq \emptyset\}$ unentscheidbar ist.
- (c) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ beliebige Probleme. Beweisen oder widerlegen Sie:

Wenn $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$, dann $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$.

Hausaufgabe 6.5

Wir betrachten die folgende Klasse von Problemen:

PROBLEM: n-FÄRBBAR

GEGEBEN: Endlicher Graph G .

GEFRAGT: Existiert eine gültige n -Färbung auf G ?

Zeigen Sie, dass $3\text{-FÄRBBAR} \preceq_P 4\text{-FÄRBBAR}$ gilt.

Hausaufgabe 6.6

Wir betrachten einfachen, ungerichtete, endliche Graphen $G = (V, E)$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \text{clique}_n(G) &= \{S \subseteq V \mid |S| \geq n \text{ und } (s_1, s_2) \in E \text{ für alle } s_1, s_2 \in S\}, \\ \text{stabil}_n(G) &= \{S \subseteq V \mid |S| \geq n \text{ und } (s_1, s_2) \notin E \text{ für alle } s_1, s_2 \in S\} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Wir betrachten folgendes Problem:

PROBLEM: CLIQUE

GEGEBEN: Endlicher Graph G , natürliche Zahl n .

GEFRAGT: Existiert ein Element in $\text{clique}_n(G)$?

Zeigen Sie $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$.

(b) Wir betrachten folgendes Problem:

PROBLEM: STABIL

GEGEBEN: Endlicher Graph G , natürliche Zahl n .

GEFRAGT: Existiert ein Element in $stabil_n(G)$?

Zeigen Sie $STABIL \in NP$.

(c) Zeigen Sie $STABIL \preceq_P CLIQUE$.