Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Andreas Maletti
Gustav Grabolle
Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 4

Hinweise:

- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **07.06.2018** vor der Vorlesung.
- Die Seminaraufgaben werden in den Übungen vom 29.05. bis 07.06. besprochen.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer**, **Name**, **Übungsgruppe**.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.

Zur Wiederholung 4.1

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Wie unterscheiden sich LOOP- und WHILE-Programme in Syntax und Semantik?
- Wie lassen sich Makros für die Addition von Variablen und IF-ELSE realisieren?
- Ist jede WHILE-berechenbare partielle Funktion total?
- Welche Bedeutung kommt der Ackermann-Funktion zu? Welchen Wert hat $a(2,2)$?

Zur Wiederholung 4.2

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Warum ist die überall undefinierte Funktion eine partielle Funktion?
- Was sind die rekursiven Basisfunktionen?
- Was sind primitiv rekursive Funktionen?
- Ist die Ackermann-Funktion primitiv rekursiv?
- Wie ist der μ-Operator definiert?

Seminaraufgabe 4.1

(a) Gegeben folgendes WHILE-Programm P:

```
x3 = 5 ;
WHILE (x3 ≠ 0) {
    x3 = x1 ;
    x4 = x2 ;
    WHILE (x4 ≠ 0) {
        x3 = x3 − 1 ;
        x4 = x4 − 1
    } ;
    x1 = x2 + 2
}
```

(i) Geben Sie $\mathrm{var}(P)$ und $\mathrm{maxvar}(P)$ an.

(ii) Ist P ein WHILE-Programm mit strikter Syntax?

(iii) Vereinfachen Sie P und bestimmen Sie schrittweise $||P||_4\,(5,4,3,2)$.

(iv) Geben Sie $|P|_2$ an. Terminiert P für alle Eingaben?

(b) Ist die folgende Aussage korrekt?

$$\begin{aligned} &||WHILE(x_i \neq 0)\{P\}||_n\,(a_1,\ldots,a_n) \\ &= \begin{cases} \mathrm{id}(a_1,\ldots,a_n) & \text{falls } \pi_i^{(n)}(a_1,\ldots,a_n) = 0 \\ ||P||_n\,; ||WHILE(x_i \neq 0)\{P\}||_n\,(a_1,\ldots,a_n) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Geben Sie ein WHILE-Programm für die partielle Funktion $\mathrm{MOD} : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ in strikter Syntax an. Terminiert Ihr Programm für alle Eingaben?

(d) Begründen Sie mittels einer Programmskizze, dass die Funktion $\overline{\mathrm{mod}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\overline{\mathrm{mod}}(n,k) = \begin{cases} n \,\mathrm{MOD}\, k & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

LOOP-berechenbar ist.

(e) Beweisen Sie: Für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt

$$a(3,y) = 2^{y+3} - 3.$$

(f) Erläutern Sie, weshalb die Ackermann-Funktion nicht LOOP-berechenbar ist.

Seminaraufgabe 4.2

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

(i) $\mathrm{tower} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (*Definition in Serie 3*)

(ii) $\mathrm{isNull} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \mathrm{isNull}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(iii) $\overline{\mathrm{mod}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \overline{\mathrm{mod}}(n,k) = \begin{cases} n \,\mathrm{MOD}\, k & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) Zeigen Sie, dass die partielle Funktion $\mathrm{MOD} : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}$ μ-rekursiv ist.

Seminaraufgabe 4.3

(a) Sind die Funktionen bin und debin injektiv/surjektiv/bijektiv?

(b) Eignet sich debin zur Kodierung von Wörtern über dem Alphabet $\{a, b\}$ in natürlichen Zahlen?

(c) Sei Γ das Arbeitsalphabet einer Turingmaschine mit $|\Gamma| = n$. Konstruieren Sie eine Funktion $\mathrm{code} : \Gamma^* \to \mathbb{N}$ zur Kodierung von Wörtern über Γ im inversen Stellenwertsystem zur Basis n. Vergleichen Sie code mit debin.

(d) Seien $\gamma \in \Gamma$ und $w \in \Gamma^*$. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \mathrm{code}(\gamma) &= \mathrm{code}(\gamma w) \,\mathrm{MOD}\, n \\ \mathrm{code}(\gamma w) &= \mathrm{code}(\gamma) + \mathrm{code}(w) \cdot n \\ \mathrm{code}(w) &= \mathrm{code}(\gamma w) \,\mathrm{DIV}\, n \end{aligned}$$

Diskutieren Sie die Bedeutung der Gleichungen im Hinblick auf den Beweis, dass sich jede Turingmaschine durch ein WHILE-Programm simulieren lässt.

Hausaufgabe 4.4

(a) Zeigen Sie durch Angabe eines entsprechenden Programms, dass die folgenden partiellen Funktionen WHILE-berechenbar sind. Kommentieren Sie die Funktionsweise Ihrer Programme.

Verwenden Sie in (i) ausschließlich die Makros für Addition und Subtraktion von Variablen. In (ii) dürfen alle in Vorlesung und Seminar definierten Makros benutzt werden.

(i) $f : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}, \qquad f(k,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(ii) $\mathrm{sqrt} : \mathbb{N}^2 \dashrightarrow \mathbb{N}, \quad \mathrm{sqrt}(k,n) = \sqrt[k]{n}$

(b) Berechnen Sie $a(3,3)$.

(c) Beweisen Sie: Für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt

$$a(4,y) = \mathrm{tower}(y+3,2) - 3.$$

Hinweis: Verwenden Sie Seminaraufgabe 4.1(e).

Hausaufgabe 4.5

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

(i) $\_^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

(ii) $\mathrm{quad} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \mathrm{quad}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

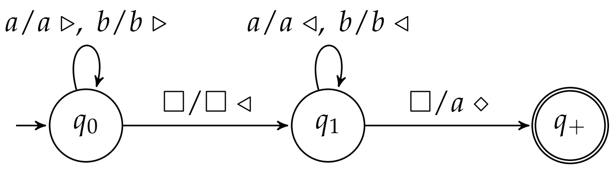
(iii) $[\sqrt{\cdot}] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Hinweis: Für eine reelle Zahl x bezeichnet $[x]$ den ganzzahligen Anteil von x.

(b) Zeigen Sie, dass die partielle Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ μ-rekursiv ist.

Hausaufgabe 4.6

Gegeben ist die Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1, q_+, q_-\}, \{a,b\}, \{a,b,\Box\}, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$ durch den folgenden Transitionsgraph.



Die Turingmaschine M soll mittels eines WHILE-Programms P_M entsprechend der Vorlesungskonstruktion simuliert werden.

(a) Geben Sie Bijektionen h_Q und h_Γ an, mit denen Konfigurationen von M kodiert werden können. Dabei gelte $h_Q(q_0) = 3$ und $h_\Gamma(a) = 1$.

(b) Sei P_M das Programm zur Simulation von M, welches durch h_Q und h_Γ festgelegt ist. Betrachten Sie das Unterprogramm zur Simulation von Ableitungsschritten und den Lauf für das Γ-Eingabewort aab. Geben Sie den „Inhalt" der Variablen x_1, x_2 und x_3 *vor jedem* Schleifendurchlauf und *nach dem letzten* Schleifendurchlauf als Folge von Tripeln an.

(c) Geben Sie $|P_M|_3$ an.