Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Andreas Maletti
Gustav Grabolle
Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 2

Hinweise:

- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **03.05.2018** vor der Vorlesung.
- Die Seminaraufgaben werden in den Übungen vom 23.04. bis 06.05. besprochen.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Matrikelnummer, Name, Übungsgruppe.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.

Zur Wiederholung 2.1

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Was ist eine Grammatik?
- Wann ist eine Grammatik vom Typ 0/1/2/3?
- Kann jede Sprache von einer Grammatik erzeugt werden?
- Was bedeutet intuitive Berechenbarkeit?

Zur Wiederholung 2.2

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Was ist eine partielle Funktion?
- Was ist eine Turingmaschine?
- Was ist unter einem Lauf einer Turingmaschine zu verstehen?
- Was ist die Transformationssemantik einer Turingmaschine?

Seminaraufgabe 2.1

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $G = (\{R, S\}, \Sigma, S, P)$ Grammatik mit folgender Regelmenge:

$$\begin{aligned} S &\to \epsilon \mid R \\ R &\to b \mid Rb \\ Rb &\to a \mid aRb \end{aligned}$$

(i) Geben Sie eine schrittweise Ableitung von *aaabbb* an.

(ii) Geben Sie $L(G)$ an.

(iii) Geben Sie $\text{typ}(G)$ an.

(iv) Ist $L(G)$ kontextsensitiv / kontextfrei / regulär?

(v) Geben Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ und $\text{typ}(G') = \text{typ}(L(G))$ an.

Hinweis: $\text{typ}(X)$ bezeichne den maximalen Typ einer Grammatik oder Sprache X.

(b) Sind die folgenden Funktionen über den natürlichen Zahlen intuitiv berechenbar?

$$f_1(n) = \left| \frac{1}{n+2} \right|$$

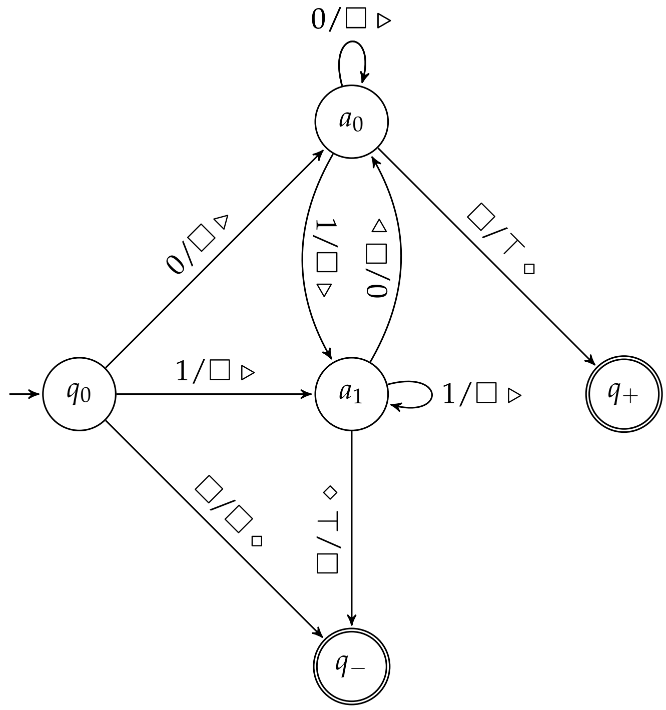
$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls e die Sequenz } n \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls e die Sequenz } n \text{ enthält} \\ \text{undef} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ genau } n\text{-mal die Sequenz } n \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seminaraufgabe 2.2

Gegeben ist die Turingmaschine $M_1 = (\{q_0, a_0, a_1, q_+, q_-\}, \{0,1\}, \{0,1,\top,\bot,\square\}, \Delta, \square, q_0, q_+, q_-)$, wobei Δ durch nachfolgendes Diagramm definiert ist.



(a) Geben Sie Läufe (als Folge von Systemsituationen) von M_1 auf 110 und 11101 an.

(b) Geben Sie $L(M_1)$ an.

(c) Bestimmen Sie die Transformationssemantik R_1 von M_1.

(d) Ist R_1 eine totale Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Seminaraufgabe 2.3

Sind die folgenden Funktionen über den natürlichen Zahlen intuitiv berechenbar?

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls P } = \text{ NP} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls ZFC widerspruchsfrei} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hausaufgabe 2.4

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $G = (\{R, S\}, \Sigma, S, P)$ Grammatik mit folgender Regelmenge:

$$\begin{aligned} S &\to aDbcX \\ D &\to \epsilon \\ aDb &\to aaDbbC \\ bCb &\to bbC \\ Cc &\to cc \\ bX &\to b \\ cX &\to X \end{aligned}$$

(i) Geben Sie eine schrittweise Ableitung von $aaabbb$ an.

(ii) Geben Sie $L(G)$ an.

(iii) Geben Sie $\text{typ}(G)$ an.

(iv) Ist $L(G)$ kontextsensitiv / kontextfrei / regulär?

(v) Geben Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ und $\text{typ}(G') = \text{typ}(L(G))$ an.

(b) Sind die folgenden Funktionen über den natürlichen Zahlen intuitiv berechenbar? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ genau } n\text{-mal die Sequenz } n \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls P} = \text{NP} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hausaufgabe 2.5

Sei $\Sigma = \{0, 1, \#\}$.

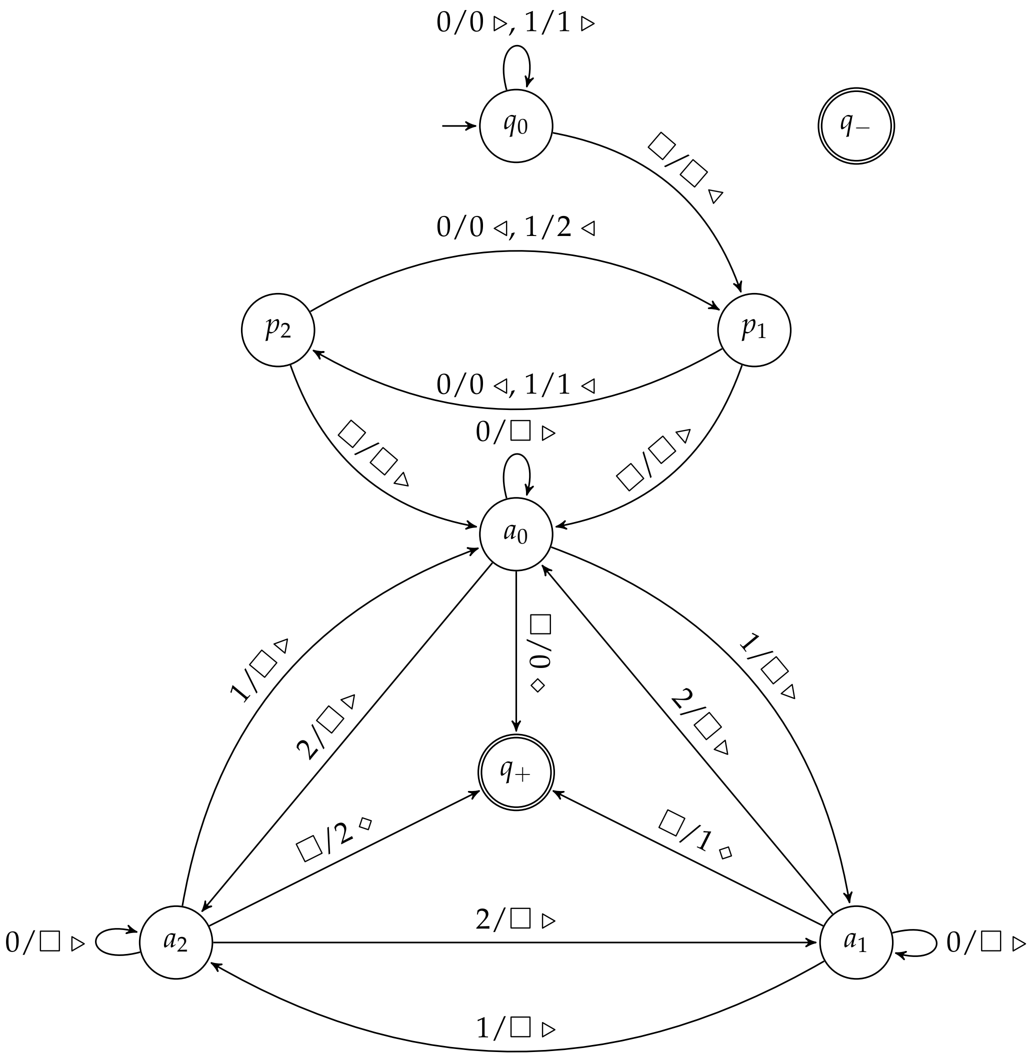
(a) Geben Sie die binäre Kodierung des Tupels $(5, 7)$ an.

(b) Geben Sie eine Turingmaschine M mit der folgenden Transformationssemantik und maximal 6 Zuständen an.

$$T(M) = \{(\text{bin}(m)\#\text{bin}(n), 1) \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Hausaufgabe 2.6

Gegeben ist die Turingmaschine $M_2 = (\{q_0, p_1, p_2, a_0, a_1, a_2, q_+, q_-\}, \{0,1\}, \{0,1,2,\Box\}, \Delta, \Box, q_0, q_+, q_-)$, wobei Δ durch nachfolgendes Diagramm gegeben ist.



(a) Geben Sie einen Lauf (als Folge von Systemsituationen) von M_2 auf 11101 an.

(b) Geben Sie $L(M_2)$ an.

(c) Bestimmen Sie die Transformationssemantik R_2 von M_2.
Tipp: Betrachten Sie zunächst Läufe auf $\text{bin}(1), \text{bin}(2), \text{bin}(3), \text{bin}(4)$.

(d) Ist R_2 eine totale Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.