Universität Leipzig
Institut für Informatik
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Andreas Maletti
Gustav Grabolle
Mirko Schulze

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Berechenbarkeit

Serie 1

Hinweise:

- Abgabeschluss für Lösungen zu Hausaufgaben: **19.04.2018** vor der Vorlesung.
- Die Seminaraufgaben werden in den Übungen vom 09.04. bis 20.04. besprochen.
- Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit Matrikelnummer, Name, Übungsgruppe.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.

Seminaraufgabe 1.1

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Was ist ein Alphabet?
- Was ist eine formale Sprache?
- Was ist ein endlicher Automat?
- Wann nennen wir eine Sprache regulär?

Seminaraufgabe 1.2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

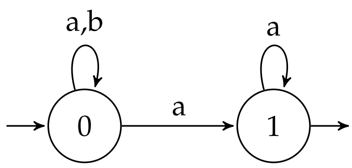
(a) Charakterisieren Sie die folgenden Sprachen:

(i) $\{a, ab\} \cdot \{a, ba\}$

(ii) $\{aa, ab, ba, bb\}^*$

(iii) $(\Sigma^* \cdot \{ab\} \cdot \Sigma^*)^{\mathsf{c}}$

(b) Bestimmen Sie die erkannte Sprache für den folgenden Automaten.



(c) Zeichnen Sie einen endlichen Automaten, der die folgende Sprache L erkennt.

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist durch 3 teilbar}\}$$

Hinweis: $|w|_a$ bezeichnet die Anzahl der a's in w.

(d) Geben Sie Sprachen L_1, L_2 und L_3 an, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $\emptyset \subsetneq L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subsetneq \Sigma^*$
- L_1 und L_3 sind regulär
- L_2 ist <u>nicht</u> regulär

Seminaraufgabe 1.3

Tauschen Sie sich mit Ihren KommilitonInnen aus und klären Sie die folgenden Fragen:

- Wann nennen wir zwei Mengen gleichmächtig?
- Wann nennen wir eine Menge abzählbar?
- Wann nennen wir eine Menge überabzählbar?

Seminaraufgabe 1.4

(a) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

(ii) Alle überabzählbaren Mengen sind gleichmächtig.

(b) Es seien M_1 und M_2 abzählbare Mengen. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$M_1 \times M_2 \text{ ist abzählbar.}$$

(c) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ ist nicht abzählbar.}$$

Hinweise: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ ist das *kartesische Produkt*.
$\mathcal{P}(A) = \{C \mid C \subseteq A\}$ ist die *Potenzmenge*.

Seminaraufgabe 1.5

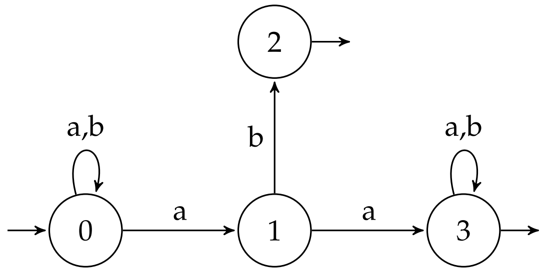
Beweisen Sie folgende Aussage:

Es existiert keine Menge größter Mächtigkeit.

Hausaufgabe 1.6

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Bestimmen Sie die erkannte Sprache für den folgenden Automaten.



(b) Zeichnen Sie einen endlichen Automaten, der die folgende Sprache L erkennt.

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ gerade und } |w|_b \geq 1\}$$

Hausaufgabe 1.7

(a) Es seien M_1 und M_2 abzählbare Mengen. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$M_1 \cup M_2 \text{ ist abzählbar.}$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ ist abzählbar.}$$

Hinweis: $B^A = \{f\colon A \to B \mid f \text{ ist Abbildung}\}$

Hausaufgabe 1.8

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sowie das Alphabet $\underline{n} = \{0, \ldots, n-1\}$. Geben Sie eine Injektion $\varphi : \underline{n}^* \to \mathbb{N}$ an. Folgern Sie mit dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\underline{n}^*$.