1 2 3 4 5

Logik

Script zur Vorlesung im Sommersemester 1999

S.Gerber

Inhaltsverzeichnis:

1. Aussagenlogik
   - Boolesche Funktionen
   - Aussagenlogische Ausdrücke
   - Äquivalenzen und Normalformen
   - Folgerungsbegriff
   - Ableitungsbegriff
   - Axiomatisierung
2. Prädikatenlogik
   - Ausdrücke der Prädikatenlogik
   - Semantik
   - Prädikatenlogisches Folgern
   - Ableitungsbegriff
   - Normalformen
   - Unentscheidbarkeit
   - Elementare Theorien
   - Logik-Programme

Vorbemerkungen

Logik als Lehre vom folgerichtigen Schließen und Denken.
Begründer Aristoteles (384 - 322 v. Chr.), Schüler Platons.
Untersuchungen über Objekte der Realität und des Denkens.
Logik als Sprache und Kalkül zur Beschreibung von Schlußweisen.
Zunächst in Philosophie allgemein, später formalisiert in Mathematik.
Begründer der mathematischen Logik: G.W. Leibniz (1646 - 1716).
Ziel: Universalkalkül als allgemeine Grundlage aller Wissenschaften.
a) Allgemeines Zeichensystem zur Begriffsbeschreibung
b) Formaler Kalkül zur Transformation sprachlicher Ausdrücke
c) Entscheidungsverfahren zum Auffinden von Wahrheiten.

Reduktion auf Objekte der Mathematik durch G. Frege (1848 - 1925).
Ableitung von Gesetzen der Mathematik mit logischen Mitteln, später als nicht widerspruchsfrei nachgewiesen (Russelsche Antinomie).
Programm zur Entwicklung der mathematischen Logik von D. Hilbert (1862 - 1943).
a) Formaler Kalkül,
b) Widerspruchsfreies formales System der Logik,
c) Entwicklung einer Beweistheorie.

Verbindung zur Informatik:
- Formale Zeichensysteme als Grundlage Formaler Sprachen (Tarski),
- Präzisierung des Algorithmenbegriffes (Leibniz/Turing),
- Schaltungsalgebra zur logischen Beschreibung digitaler Schaltungen (Shannon/Huffman),
- Spezifikationssysteme für Programme (automatisches Programmieren),
- Semantik formaler Sprachen und Programmiersprachen,
- Beweis von Programmeigenschaften (Verifikation),
- allgemeine Deduktionssysteme und Theorembeweiser,
- logisches Programmierparadigma und logische Sprachen,
- Grundlagen der Künstlichen Intelligenz und wissensbasierten Systeme.

Kapitel 1

Aussagenlogik:

Wahrheitswerte: wahr, falsch (zweiwertig)
Aussagen: Sätze über Eigenschaften (Beziehungen) von Objekten (reale, virtuelle), die wahr (zutreffen) oder falsch (nicht zutreffen) (eventuell auch unentscheidbar).Wahrheitswerte sind Klassen von Aussagen. 0 (falsch) = Klasse aller falschen Aussagen, 1 (wahr) = Klasse aller wahren Aussagen
Aussagenverbindungen: Mit Hilfe logischer Verknüpfungen zusammengesetzte Aussagen.
Grundprinzipien:
1. Zweiwertigkeit:
a) Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten (Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch, tertium non datur)
b) Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch (Es existiert keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist).
2. Extensionalitätsprinzip:
Der Wahrheitswert von Aussagenverbindungen hängt nur vom Wahrheitswert der Einzelaussagen ab, nicht von deren Inhalt (Sinn, Intension).
Logische Verknüpfungen: (Klassische Wahrheitswertfunktionen)
Konjunktion (und): $\wedge$
Disjunktion (Alternative, oder): $\vee$
Negation (nicht, not): $\neg$ ($\tilde{}$)
Implikation (wenn, so): $\rightarrow$
Äquivalenz (genau dann, wenn): $\leftrightarrow$
Verknüpfungen entsprechen Funktionen über $\{0, 1\}$, Boolesche Funktionen (Wahrheitswertfunktionen)

1.1 Boolesche Funktionen

Boolesche Funktionen : n-stellig $\quad \Phi^n : \{0,1\}^n \quad \longrightarrow \{0,1\} \quad n \geq 0$
Argumentbereich: $|\{0,1\}^n| = 2^n$, $\quad$ Wertebereich: $|\{0,1\}| = 2$
Funktionsbereich: $|\{\Phi^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}| = 2^{2^n}$

Wahrheitwerttabellen (Wahrheitswertverlauf):

$n = 0 \qquad \Phi_1^0 = 1, \quad \Phi_2^0 = 0$

$n = 1 \quad x$ Argument

x	Φ_1^2	Φ_2^2	Φ_3^2	Φ_4^2
0	1	1	0	0
1	1	0	1	0
	1	non	x	0

$n = 2 \quad x, y$ Argumente

$x\ y$	Φ_1^2	Φ_2^2	Φ_3^2	Φ_4^2	Φ_5^2	Φ_6^2	Φ_7^2	Φ_8^2	Φ_9^2	Φ_{10}^2	Φ_{11}^2	Φ_{12}^2	Φ_{13}^2	Φ_{14}^2	Φ_{15}^2	Φ_{16}^2
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1 0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1 1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	1	Sheffer	seq	notx		noty	äq	Nicod	vel		y		x		et	0

Basen:
(non, vel,et);(Sheffer);(Nicod) damit alle andereren Funktionen ausdrückbar,
Klassisch: non, vel, et, seq, äq ,
Tautologie: überall wahre Funktion,
Kontradiktion: überall falsche Funktion,
Boolesche Algebra: ($\{0,1\}$, non, et, vel).

1.2 Aussagenlogische Ausdrücke

Syntax des Aussagenkalküls:
Aussagenlogische *Formeln* (*Ausdrücke*) sind Wörter über dem Alphabet A mit
Aussagenvariablen: p_1, p_2, ..., $p_n \in \underline{Var}$ (auch andere Buchstaben möglich).
Konstanten: W,F $\in \underline{Const}$,
Funktoren: $\sim$ (einstellig), $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (zweistellig) und
Klammern: (,) .

Auswahl der *Formeln* (*Ausdrücke*) Aus über dem Alphabet A:
1. *Atomare* Formeln $\underline{Var} \cup \underline{Const}$.
2. Wenn H Formel, dann auch $\sim H$ Formel.
3. Wenn H_1, H_2 Formeln, dann auch $(H_1 \wedge H_2)$; $(H_1 \vee H_2)$; $(H_1 \rightarrow H_2)$; $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ Formeln.
Aus ist kleinste Menge von Wörtern über A, die die atomaren Formeln enthält und abgeschlossen ist, gegenüber den Bildungen 2. und 3.

Induktive Definition über Stufe (Rang):
1. Zeichenreihe H über A ist *Formel* 0-*ter Stufe* ($H \in \underline{Aus}_0$) gdw. H atomare Formel.
2. Zeichenreihe H über A ist *Formel n-ter Stufe* ($H \in \underline{Aus}_n$) gdw. einer der folgenden Fälle zutrifft:
a) H Formel $(n-1)$-ter Stufe ($H \in \underline{Aus}_{n-1}$),
b) $H \equiv \sim H_0$ und $H_0 \in \underline{Aus}_{n-1}$,
c) $H \equiv (H_1 \circ H_2)$ und $H_i \in \underline{Aus}_{n-1}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
3. Eine Zeichenreihe H über A ist genau dann *Formel* ($H \in \underline{Aus}$), wenn eine nat. Zahl $n \geq 0$ existiert, so daß $H \in \underline{Aus}_n$ Formel n-ter Stufe.

Bemerkungen:
1. Die Menge Aus ist entscheidbar.
2. $H \in \underline{Aus}$ gdw H atomar oder $H \equiv \sim H_0$ und $H_0 \in \underline{Aus}$ oder
$H \equiv (H_1 \circ H_2)$ und $H_i \in$ Aus und $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
$H_i, \circ$ sind eindeutig bestimmt, $\circ$ *Hauptverknüpfungszeichen* (HVZ) von H.
Bezeichnungen:
H heißt *Negation*, *Konjunktion*, *Alternative*, *Implikation*, *Äquivalenz* wenn $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ Hauptverknüpfungszeichen von H.
Var (H) = Menge der in H auftretenden Aussagenvariablen.
Folgerung:
Wenn $H \in \underline{Aus}$, so (notwendiges Kriterium) $l_((H) = l_)(H) = l_o(H)$ mit
$\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
($l_z(H)$ = Anzahl der Stellen in H an denen das Zeichen z steht.)
(Eindeutiger Abbau zusammengesetzter Ausdrücke möglich.
Echtes Anfangsstück eines Ausdruckes ist kein Ausdruck.)

Vereinbarungen:
1. Außenklammern eines Ausdrucks können weggelassen werden.
2. Wenn H' Teilausdruck (Teilzeichenreihe, die selbst Ausdruck ist) von H, dann dürfen Außenklammern von H' entfallen, falls vor öffnender Klammer und hinter der schließenden Klammer von H' keine Funktor steht, der schwächer als oder gleichstark bindet wie das HVZ von H'.
(Trennstärke: $\sim \prec \wedge \prec \vee \prec \rightarrow \prec \leftrightarrow$: Bindungsstärke).
3. Für $^\sim H$ bzw. $\neg H$ kann $\overline{H}$ geschrieben und Außenklammern von H können weggelassen werden.
4. Funktor $\wedge$ muß nicht geschrieben werden.

Beispiel:
$((p_1 \wedge \neg p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2)) \equiv_{1.)} (p_1 \wedge \neg p_3) \vee \neg(p_1 \wedge p_2) \equiv_{2.)}$
$p_1 \wedge \neg p_3 \vee \neg(p_1 \wedge p_2) \equiv_{3.)} p_1 \wedge \bar{p_3} \vee \overline{p_1 \wedge p_2} \equiv_{4.)} p_1\bar{p_3} \vee \overline{p_1 p_2}$
Semantik (Interpretation von Ausdrücken):
Variablenbelegung $b \in \underline{Bel} : \underline{Var.} \rightarrow \{0,1\}$ (Wahrheitswerte); $\underline{Bel} = 2^{\underline{Var}}$
Erweiterung auf Aus: $b^* : \underline{\text{Aus}} \rightarrow \{0,1\}$
Es gilt: $b^*(p) = b(p)$ wenn $p \in \underline{Var}$, $b^*(W) = 1$, $b^*(F) = 0$,
$b^*(^\sim H_0) =$ non $b^*(H_0)$, $b^*(H_1 \circ H_2) = \phi_\circ(b^*(H_1), b^*(H_2))$
mit $\phi_\circ =$ vel, et, seq, äq falls $\circ = \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Wert eines Ausdruckes: $Wert(H,b) = b^*(H)$ *Wert* von H bei der Belegung b: Var(H) $\rightarrow$ 0,1 (passende Belegung) (Wert von H nur abhängig von den in H auftretenden Variablen aus Var(H).)
Bemerkung:
Zu jedem Ausdruck $H \in \underline{Aus}$ mit $\underline{Var}(H) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ existiert eine n-stellige Boolesche Funktion $\Phi_H : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ mit $\Phi_H(x_1, \ldots, x_n) = y$ gdw eine Belegung $b \in$ Bel mit $b(p_i) = x_i$ und Wert $(H, b) = y$ existiert.

Wertetabelle (*Wahrheitswertverlauf*): H $\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \leftrightarrow \neg\, (p \vee q)$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$(\bar{p} \wedge \bar{q})$	$(p \vee q)$	$(p \bar{\vee} q)$	H
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1

Baum:

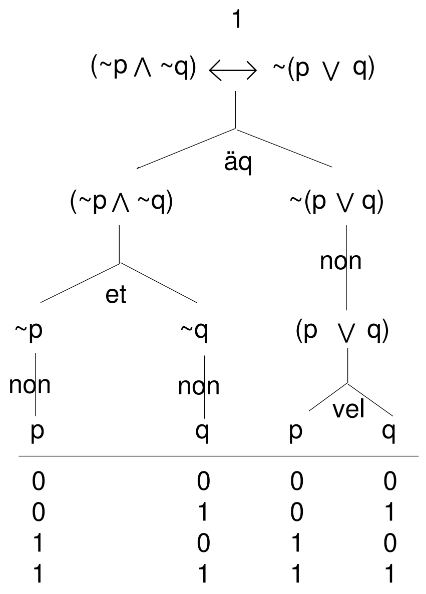

Bild 1

Definition:
- b heißt *erfüllende* Belegung von $H (b \models H)$, wenn $Wert(H, b) = 1$.
- H heißt *erfüllbar* (ef H), wenn eine erfüllende Belegung von H existiert.
- *Erfüllbarkeitsrelation* : $\models \subseteq \underline{Bel} \times \underline{Aus}$, $\quad ef \subset \underline{Aus}$ (F nicht erfüllbar).

Definition: *Modellklasse*
$X \subseteq \underline{Aus}$, b heißt *Modell* von X gdw $b \models H$ für alle $H \in X$.
Modellklasse von X: $Mod(X) = \{b | b \in \underline{Bel} \wedge b \models H$ für alle $H \in X\} \subseteq \underline{Bel}$

Definition:
a) *Tautologie*: H *logisch gültig* (*allgemeingültig*) (in Zeichen: ag H), falls jede (passende) Belegung $b \in \underline{Bel}$ erfüllt H ($b \models H$), d.h., $Mod(H) = \underline{Bel}$ (Ag = Menge der Tautologien $\subset \underline{Aus}$).
b) *Kontradiktion*: H *unerfüllbar* (in Zeichen: kd H), wenn keine erfüllende Belegung existiert, d.h. $Mod(H) = \emptyset$ (Kd = Menge der Kontradiktionen $\subset \underline{Aus}$).
c) *Neutralität*: (in Zeichen nt H) Ausdrücke die weder Tautologien noch Kontradiktionen sind, d.h. $\emptyset \neq M(H) \subset \underline{Bel}$. ($Nt$ = Menge der Neutralitäten $\subset \underline{Aus}$.)

Bemerkung:
Alle Eigenschaften sind entscheidbar (vollständige Wertetabelle, potentielle Komplexität, NP-vollständige Probleme.)

Beispiele für Tautologien:

Kettenschluß: $(p \to q) \quad \to \quad ((q \to r) \quad \to \quad (p \to r))$

Exportregel: $(p \wedge q \to r) \quad \to \quad (p \to (q \to r))$

Scottsches Gesetz: $p \wedge \sim p \quad \to \quad p$
Tertium non datur: $p \vee \sim p$

Selbstimplikation: $p \quad \to \quad p$

Prämissenvertauschung: $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Selbstdistributivität: $((p \to (q \to r)) \quad \to \quad (q \to (p \to r))$

Kontraposition: $(p \to q) \quad \to \quad (\sim q \to \sim p)$

Piercesches Gesetz: $((p \to q) \to p) \quad \to p$

de Morgansche Regeln: $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \quad \sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Satz:
a) H Tautologie ($H \in Ag$) gdw. $\sim H$ Kontradiktion ($\sim H \in Kd$).
b) *Einsetzungsregel*:
Wenn agH, so gilt agH^p/H_p für alle H, $H_p \in \underline{Aus}$ und $p \in \underline{Var}$.
$H' \equiv H^p/H_p$ entsteht durch *Einsetzung* (Substitution) aus H, wenn überall dort, wo in H die Variable p vorkommt, der Ausdruck H_p eingesetzt wird.
(Ausdruckseigenschaften bleiben dabei erhalten. Der Satz gilt auch für simultane Einsetzung.)

Satz(Regeln):

a) $ag(H_1 \wedge H_2)$ gdw. agH_1 und agH_2
b) agH_1 oder agH_2 , so $ag(H_1 \vee H_2)$
c) $ag(H_1 \to H_2)$ und agH_1 , so agH_2 (Abtrennungsregel, modus ponens)
d) $ag(H_1 \leftrightarrow H_2)$, so agH_1 gdw. agH_2
e) $ef(H_1 \wedge H_2)$, so efH_1 und efH_2
f) $ef(H_1 \vee H_2)$ gdw. efH_1 oder efH_2

1.3 Äquivalenzen und Normalformen

Definition:*Semantische Äquivalenz (Wertverlaufsgleichheit)*
$H_1 \approx H_2$ (H_1 Äqsem H_2) gdw. $Wert(H_1, b) = Wert(H_2, b)$ für alle $b \in Bel$.
($\approx$ ist eine Äquivalenzrelation).

Satz:
$H_1 \approx H_2$ gdw. $ag(H_1 \leftrightarrow H_2)$ gdw. $Mod(H_1) = Mod(H_2)$ gdw. $\Phi^n_{H_1} = \Phi^n_{H_2}$ und $Var(H_1) \cup Var(H_2) \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$.

Satz:*Ersetzbarkeitstheorem*: $Ers(H_1, H, H', H_2)$ und $H \approx H'$, so $H_1 \approx H_2$
(H_2 entsteht aus H_1, wenn an beliebigen Stellen wo in H_1 der Teilausdruck H steht, dieser durch H' ersetzt wird, d.h., $H_1 = z_0Hz_1...Hz_n$, $H_2 = z_0H'z_1...H'z_n$.)

Folgerung:
$Ers(H_1, H, H', H_2)$ und $H \approx H'$ und agH_1 , so agH_2 .
(Vererbung der Allgemeingültigkeit)

Beispieläquivalenzen:

Idempotenz: $(H \wedge H) \approx H$, $(H \vee H) \approx H$.

Kommutativität: $(H_1 \wedge H_2) \approx (H_2 \wedge H_1), (H_1 \vee H_2) \approx (H_2 \vee H_1)$,

$(H_1 \leftrightarrow H_2) \approx (H_2 \leftrightarrow H_1)$.

Assoziativität: $((H_1 \wedge H_2) \wedge H_3) \approx (H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3))$,

$((H_1 \vee H_2) \vee H_3) \approx (H_1 \vee (H_2 \vee H_3))$.

Absorption (Verschmelzung): $(H_1 \wedge (H_1 \vee H_2)) \approx H_1$, $(H_1 \vee (H_1 \wedge H_2)) \approx H_1$.

Distributivität: $(H_1 \wedge (H_2 \vee H_3)) \approx ((H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3))$,

$(H_1 \vee (H_2 \wedge H_3)) \approx ((H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3))$,

$(H_1 \rightarrow (H_2 \vee H_3)) \approx ((H_1 \rightarrow H_2) \vee (H_1 \rightarrow H_3))$,

$(H_1 \rightarrow (H_2 \wedge H_3)) \approx ((H_1 \rightarrow H_2) \wedge (H_1 \rightarrow H_3))$.

Prämissensätze: $(H_1 \rightarrow (H_1 \rightarrow H_2)) \approx (H_1 \rightarrow H_2)$ Verschmelzung,

$$(H_1 \rightarrow (H_2 \rightarrow H_3)) \approx (H_2 \rightarrow (H_1 \rightarrow H_3)) \quad \text{Vertauschung,}$$

$$H_1 \rightarrow (H_2 \rightarrow H_3)) \approx ((H_1 \wedge H_2) \rightarrow H_3) \quad \text{Verbindung.}$$

Negation: $\sim\sim H \approx H$, $^\sim(H_1 \rightarrow H_2) \approx (H_1 \wedge^\sim H_2)$,

$$^\sim(H_1 \wedge H_2) \approx (^\sim H_1 \vee^\sim H_2) \ , \ ^\sim(H_1 \vee H_2) \approx (^\sim H_1 \wedge^\sim H_2) \ ,$$

$$^\sim(H_1 \leftrightarrow H_2) \approx (H_1 \leftrightarrow^\sim H_2) \approx (^\sim H_1 \leftrightarrow H_2) \ .$$

Kontraposition: $(H_1 \rightarrow H_2) \approx (^\sim H_2 \rightarrow^\sim H_1)$, $(^\sim H_1 \rightarrow H_2) \approx (^\sim H_2 \rightarrow H_1)$,

$$(H_1 \rightarrow^\sim H_2) \approx (H_2 \rightarrow^\sim H_1) \ , \ (H_1 \leftrightarrow H_2) \approx (^\sim H_1 \leftrightarrow^\sim H_2).$$

Umwandlung: $(H_1 \rightarrow H_2) \approx (^\sim H_1 \vee H_2)$,

$$(H_1 \leftrightarrow H_2) \approx ((^\sim H_1 \wedge^\sim H_2) \vee (H_1 \wedge H_2)) \ ,$$

$$(H_1 \leftrightarrow H_2) \approx ((H_1 \rightarrow H_2) \wedge (H_2 \rightarrow H_1)) \ .$$

Erfüllbarkeitsregeln:

Wenn agH_1 , so $(H_1 \vee H_2) \approx H_1$ und $(H_1 \wedge H_2) \approx H_2$

(speziell $(W \vee H) \approx W$ und $(W \wedge H) \approx H$).

Wenn kdH_1 , so $(H_1 \vee H_2) \approx H_2$ und $(H_1 \wedge H_2) \approx H_1$

(speziell $(F \vee H) \approx H$ und $(F \wedge H) \approx F$).

Analoge Regeln gelten für mehrfache Konjunktionen und Alternativen.

Satz: *Dualitätstheorem*:
Sei $H_i \in$ Aus ohne Konstanten, $\rightarrow, \leftrightarrow$ und $d(H_i)$ entstehe aus H_i, wenn $\wedge$ durch $\vee$ und umgekehrt ersetzt wird.
Wenn $ag(H_1 \rightarrow H_2)$, so $ag(d(H_2) \rightarrow d(H_1))$ und
wenn $ag(H_1 \leftrightarrow H_2)$, so $ag(d(H_2) \leftrightarrow d(H_1))$.

Normalformen

Suche nach Repräsentanten von Klassen äquivalenter Ausdrücke. Dazu spezielle syntaktische Form (Normalform) konstruieren.

Definition:

a) *Verneinungstechnische* (*Negationstechnische*) Normalform VtNF

Ein Ausdruck $H \in \underline{\text{Aus}}$ heißt in VtNF, wenn auf jede Stelle in H, an der das Zeichen ~ steht, eine Variable folgt, d.h. $H \equiv z_0^{\sim} p_i z_1 ... {}^{\sim} p_j z_n \quad (p_i, p_j \in \underline{Var})$

b) *Fundamentalkonjunktion* FK (*Fundamentalalternative* FA)

$\bigwedge_{i=1}^{k} H_i \quad (\bigvee_{i=1}^{k} H_i)$ heißt FK (FA) in den Variablen $p_1, ..., p_n$, wenn eine injektive Abbildung ϕ von 1, ... ,k nach 1, ... ,n existiert mit $H_i \equiv p_{\phi(i)}$ oder $H_i \equiv \bar{p}_{\phi(i)}$ (H_i heißen Literale) (FK bzw. FA = Konjunktion bzw. Alternative von Literalen, jede Variable tritt höchstens einmal auf).

c) *Konjunktive* (*Alternative*) Normalform KNF (ANF)

$H \in \underline{\text{Aus}}$ heißt in KNF (ANF), wenn H eine Konjunktion (Alternative) von Fundamentalalternativen (Fundamentalkonjunktionen) ist,

d.h. KNF: $H \equiv \bigwedge_i \bigvee_j H_{ij}$ ANF: $H \equiv \bigvee_i \bigwedge_j H_{ij}$ (H_{ij} Literale).

d) Eine Fundamentalkonjunktion (-alternative) heißt *geordnet*, wenn für alle $1 \leq i, j \leq k$ gilt : $(i < j) \rightarrow (\phi(i) < \phi(j))$ (d.h. Literale sind nach Index geordnet).

e) *Elementarkonjunktion* EK (*Elementaralternative* EA) (EK, EA)

Ein Ausdruck $H \in \underline{Aus}$ heißt eine EK (EA) in den Variablen $p_1, ..., p_n$, wenn H eine geordnete FK (FA) in den Variablen $p_1, ..., p_n$ und ϕ eine Bijektion ist (alle Variablen treten auf).

Ordnung der Elementarkonjunktionen (-alternativen) EK_i (EA_i) $(0 \leq i \leq 2^n - 1)$ nach dem Dezimalwert ihrer Dualäquivalente $[EK_i]$ ($[EA_i]$).

(Negierte Variable entspricht 0, unnegierte Variable entspricht 1)

f) *Kanonisch alternative (konjunktive) Normalform* KANF (KKNF)

Ein Ausdruck $H \in \underline{\text{Aus}}$ heißt in KANF (KKNF) in den Variablen $p_1, ..., p_n$, wenn $H \equiv F$ (bzw. W) oder $H \equiv \bigvee_i H_i$ (bzw. $\bigwedge_i H_i$) und $H_i \equiv EK_{\phi(i)}$ (bzw. $EA_{\phi(i)}$) in den Variablen $p_1, ..., p_n$ und wenn $(i < j)$, so $(\phi(i) < \phi(j))$. (Die Elementarkonjunktionen (alternativen) sind nach dem Zahlenwert ihrer Dualäquivalente geordnet. Bei n Variablen existieren 2^{2^n} verschiedene KANF (KKNF).)

Satz:

a) Zu jedem Ausdruck $H \in \underline{\text{Aus}}$ existiert eine VtNF H' mit $H' \approx H$. (Anwendung vorstehender Regeln und des Ersetzbarkeitstheorems)

b) Zu jedem Ausdruck $H \in \underline{Aus}$ existiert ein Ausdruck H' mit $H' \equiv W$ (bzw. $H' \equiv F$) oder H' in KNF (bzw. ANF) und $H' \approx H$.

(Induktiv über die Ausdrucksstufe nachzuweisen. Zu jedem H existieren unendlich viele semantisch äquivalente Normalformen).

c) Jede EK (bzw. EA) in den Variablen $p_1, ..., p_n$ nimmt bei <u>genau einer</u> Variablenbelegung b den Wert 1 (bzw. 0) an. $Wert(EK, b) = 1$ gdw $b(p_i) = [EK]_i$,

(bzw. $Wert(EA, b) = 0$ gdw $b(p_i) = 1 - [EA]_i$).
d) Zu jedem Ausdruck H in den Variablen $p_1, ..., p_n$ existiert <u>genau eine</u> KKNF (bzw. KANF) H' bzgl. der Variablen $p_1, ..., p_n$ mit $H \approx H'$. (KNF (bzw. ANF) erweitern und ordnen zur Kanonischen Normalform.)

<u>Anwendung</u>:
- KANF nimmt bei Belegung b <u>genau dann</u> den Wert 1 an, wenn die der Belegung b nach c) zugeordnete Elementarkonjunktion als Alternativglied in der KANF auftritt (sonst Wert 0).
- KKNF nimmt bei Belegung b <u>genau dann</u> den Wert 0 an, wenn die der Belegung b nach c) zugeordnete Elementaralternative als Konjunktionsglied in der KKNF auftritt (sonst Wert 1).
- Aus der Wertetabelle einer Booleschen Funktion kann umgekehrt die KANF als Alternative aller derjenigen Elementarkonjunktionen gewonnen werden, bei deren zugeordneten Belegungen die Funktion den Wert 1 annimmt. (KKNF: Stellen mit Funktionswert 0 als Konjunktionsglieder.)
<u>Beispiel</u>:

p	q	r	$\bar{q} \vee r$	$p \leftrightarrow (\bar{q} \vee r)$	dez.
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	2
0	1	1	1	0	3
1	0	0	1	1	4
1	0	1	1	1	5
1	1	0	0	0	6
1	1	1	1	1	7

$p \leftrightarrow (\bar{q} \vee r) \approx \bar{p}\overline{(\bar{q} \vee r)} \vee p(\bar{q} \vee r) \approx \bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q} \vee pr \approx \bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}r \vee pqr \approx$
$\bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee pqr$ (KANF: 2 4 5 7)
$\approx (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)(\bar{p} \vee q \vee r)(p \vee q \vee \bar{r})$ (KKNF: 0 1 3 6)

<u>**Repräsentantenproblem**</u>:
Sei $H \in \underline{Aus}$, $\underline{Var} = \{p_1, ..., p_n\}$ und Φ^n, Φ_H n-stellige Boolesche Funktionen.
<u>Definition</u>
H *repräsentiert* Φ_H , wenn für jede Belegung b gilt:
$Wert(H, b) = \Phi_H(b(p_1), ..., b(p_n)) = b^*(H(p_1, ..., p_n))$.
Φ^n heißt *repräsentierbar*, wenn ein Ausdruck H mit $\Phi^n = \Phi_H$ existiert.

<u>Bemerkung</u>: Jeder Ausdruck des Aussagenkalküls repräsentiert eine Boolesche Funktion. Welche Funktionen sind repräsentierbar (Ausdrucksfähigkeit des Aussagenkalküls)?

Satz:*Repräsentantentheorem*:
Jede n-stellige Boolesche Funktion Φ^n ist (bis auf die Bezeichnung und Ordnung der Variablen) durch genau eine KANF (KKNF) in den Variablen $p_1, ..., p_n$ repräsentierbar (Konstruierbarkeit wie im Beispiel oben.)
Folgerung:
Jede Boolesche Funktion ist durch Negation, Alternative und Konjunktion darstellbar. (Abgeschlossenheit gegen $\sim \vee \wedge$)

Beschreibung von Schaltungen

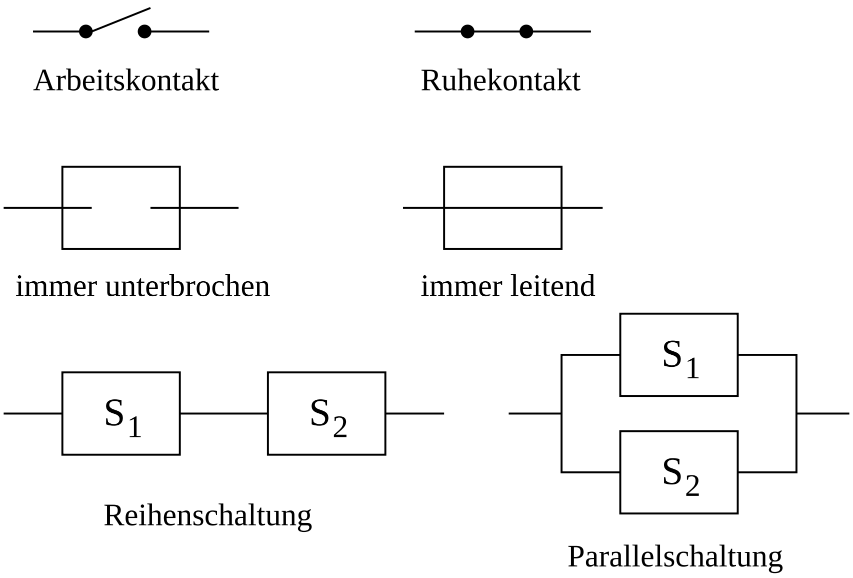

Bild 2

Kontakte (durch Relais, per Hand o.a. gesteuert) mit zwei Zuständen (ein- und ausgeschaltet).
Arbeitskontakt: (Bild 2a) eingeschaltet, entspricht elektrisch leitender Verbindung; ausgeschaltet, entspricht unterbrochener Verbindung.
Ruhekontakt:(Bild 2b) ausgeschaltet, entspricht elektrisch leitender Verbindung; eingeschaltet entspricht unterbrochener Verbindung.
Reihenparallelschaltung (RPS) aus Kontakten:
1.) immer unterbrochen (Bild 2c), immer leitend (Bild 2d), Arbeitskontakt (Bild 2a), Ruhekontakt (Bild 2b).
2.) Reihenschaltung (Bild 2e), Parallelschaltung (Bild 2f)
3.) Eine Schaltung ist nur dann eine RPS, wenn sie nach 1.) oder 2.) konstruiert ist.

Bemerkung:
- Jede RPS hat genau einen Eingang und genau einen Ausgang.
- Zuordnung zwischen RPS und VtNF in den Funktoren ~ $\vee$ $\wedge$ (eineindeutig bis auf die Bezeichnung der Variablen) durch *Homomorphismus* ϕ mit
ϕ : RPS $\rightarrow$ VtNF mit ϕ (immer unterbrochen) = F, ϕ (immer leitend) = W, ϕ (Arbeitskontakt) = p , ϕ (Ruhekontakt) = $\bar{p}, \phi$ (Reihenschaltung) = $(\phi(S_1) \wedge \phi(S_2))$, ϕ (Parallelschaltung) = $(\phi(S_1) \vee \phi(S_2))$.

Beispiel:
Interpretation: Kontakt eingeschaltet (bzw ausgeschaltet), wenn Variable den Wert 1 (bzw 0) hat.
Die Schaltung S ist genau dann leitend (zwischen Ein- und Ausgang), wenn Ausdruck $\phi(S)$ bei der dem Zustand der Kontakte zugeordneten Variablenbelegung den Wert 1 annimmt.

Die nachfolgende Beispielschaltung S (Bild 3) ist z.B. leitend (d.h. $Wert(\phi(S), b) = 1$) bei Zustand: p_1 eingeschaltet (d.h. $b(p_1) = 1$) , p_2 ausgeschaltet (d.h. $b(p_2) = 0$) , p_3 eingeschaltet (d.h. $b(p_3) = 1$) und p_4 ein- oder ausgeschaltet (d.h. $b(p_4) = 1$ oder 0).

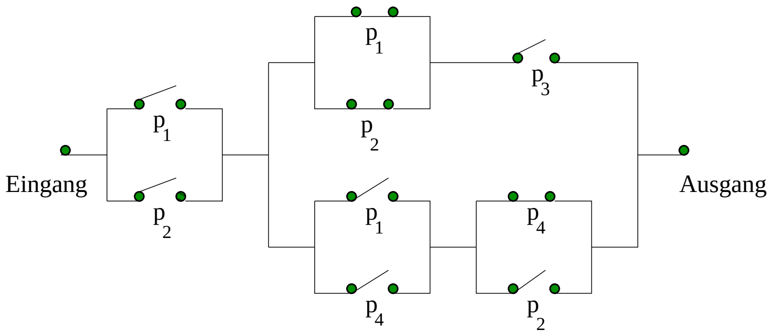

Bild 3

Bemerkungen::
- *Elektrisch gleichwertige* Schaltungen entsprechen semantisch äquivalenten Ausdrücken.
- *Schaltungsanalyse* (bei welchen Zuständen ist die Schaltung elektrisch leitend) entspricht Wertanalyse des zugeordneten Ausdruckes (bei welchen Belegungen ist der Ausdruck erfüllt).
- *Schaltungssynthese* (Schaltung ist zu konstruieren) entspricht Repräsentation einer Booleschen Funktion durch einen Ausdruck.
- *Minimisierung* der Kontaktanzahl, Verbindungsleitungen, Schaltungstiefe u.a. entspricht geeigneter äquivalenter Umformung von Ausdrücken.

Elektronische Schaltungen (Gatterdarstellung): (mehrere Eingänge möglich)

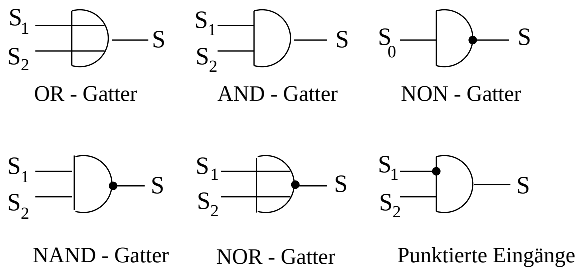

Bild 4

OR-Gatter: (Bild 4a) $S = (S_1 \vee S_2)$, AND-Gatter: (Bild 4b) $S = (S_1 \wedge S_2)$, NON-Gatter: (Bild 4c) $S = {}^\sim S_0$, NAND-Gatter: (Bild 4d) $S = {}^\sim(S_1 \wedge S_2)$, NOR-Gatter: (Bild 4e) $S = {}^\sim(S_1 \vee S_2)$, negierte Eingänge: (Bild 4f) $S = ({}^\sim S_1 \wedge S_2)$

Beispiel:

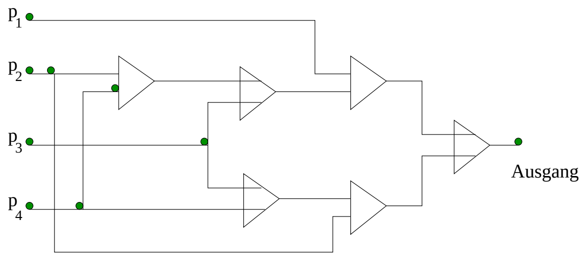

Bild 5

2 Eingänge: $(p_1 \wedge (p_2\bar{p}_4 \vee p_3) \vee ((p_3 \vee p_4) \wedge p_2)$

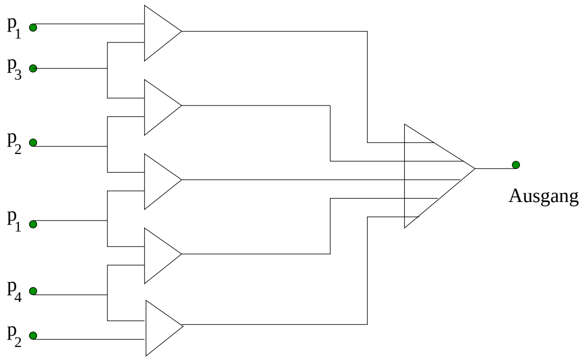

Bild 6

5 Eingänge: $p_1p_3 \vee p_2p_3 \vee p_1p_2 \vee p_1p_4 \vee p_2p_4$ (Alternative Normalform)

Probleme:
Gatterauswahl, Gattereingangszahl, Gatteranzahl, Schaltungstiefe u.a.

1.4 Folgerungsbegriff

Verallgemeinerung der Erfüllbarkeit von Ausdrücken (ohne Konstanten).

Definition: Es sei $X \subseteq \underline{Aus}$ und $H \in \underline{Aus}$
a) Aus X *folgt* (im Bolzanoschen Sinn) H (in Zeichen: $X \models H$), falls jede X erfüllende Belegung aus Mod (X) den Ausdruck H erfüllt, d.h., $Mod(X) \subseteq Mod(\{H\})$.
b) $Fl(X) = \{H \in \underline{Aus} | X \models H\}$ heißt *Folgerungsmenge* von X.

Beispiel:

Belegung	p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{p} \rightarrow q$
b_0	0	0	1	0
b_1	0	1	1	1
b_2	1	0	0	1
b_3	1	1	1	1

$Mod(\{p \rightarrow q, \bar{p} \rightarrow q\}) = \{b_1, b_3\} = Mod(\{q\}) \qquad \{p \rightarrow q, \bar{p} \rightarrow q\} \models q$
$Fl(\{p \rightarrow q, \bar{p} \rightarrow q\}) = [q]_{\approx}$ (Klasse zu q semantisch äquivalenter Ausdrücke).
Bemerkung:
ag H gdw. $\emptyset \models H$, $\qquad Fl(\emptyset) = Ag$ (Menge der Tautologien).

Hülleneigenschaften: Sei $X, Y \subseteq \underline{Aus}$
a) Inklusion : $X \subseteq Fl(X)$,
b) Idempotenz : $Fl(Fl(X)) \subseteq Fl(X)$,
c) Monotonie : Wenn $X \subseteq Y$, so $Fl(X) \subseteq Fl(Y)$.

Satz:
Sei $H, H_1, H_2 \in \underline{Aus}$ und $X \subseteq \underline{Aus}$:
a) Wenn $X \models (H_1 \rightarrow H_2)$ und $X \models H_1$, so $X \models H_2$ (Modus ponens).
b) Wenn $X \models (H_1 \rightarrow H_2)$, so $X \cup \{H_1\} \models H_2$ (Ableitungstheorem).
c) Wenn $X \cup \{H_1\} \models H_2$, so $X \models (H_1 \rightarrow H_2)$ (Deduktionstheorem).
d) $Mod(X \cup \{H\}) = \emptyset$ gdw. $X \models^{\sim} H$.
e) $Mod(X) = \emptyset$ gdw. $Fl(X) = \underline{Aus}$ gdw. $X \models (H \wedge^{\sim} H)$.

Beweis:
a) $b \in Mod(X) \Longrightarrow b \models X \Longrightarrow b \models (H_1 \rightarrow H_2), b \models H_1 \Longrightarrow Wert((H_1 \rightarrow H_2), b) = Wert(H_1, b) = 1 \Longrightarrow Wert(H_2, b) = 1 \Longrightarrow b \models H_2 \Longrightarrow b \in Mod(\{H_2\})$.
b) $b \in Mod(X \cup \{H_1\}) \Longrightarrow b \models (X \cup \{H_1\}) \Longrightarrow b \models (H_1 \rightarrow H_2), b \models H_1 \Longrightarrow b \models H_2 \Longrightarrow b \in Mod(\{H_2\})$.
c) $b \in Mod(X) \Longrightarrow b \models X \Longrightarrow b \models (X \cup \{H_1\}), b \models H_2 \Longrightarrow b \models (H_1 \rightarrow H_2) \Longrightarrow b \in Mod(\{H_1 \rightarrow H_2\})$.
d) Annahme: $X \models^{\sim} H$ nicht $\Longrightarrow$ exist. $b \in Mod(X)$ mit $b \models H \Longrightarrow Mod(X \cup \{H\}) \neq \emptyset$. (Wid.zur Vorauss.)
Annahme: $Mod(X \cup \{H\}) \neq \emptyset \Longrightarrow$ exist. $b \in \underline{Bel}$ mit $b \models X$ und $b \models H \Longrightarrow$

$X \models^{\sim} H$ nicht. (Wid.zur Vorauss.)

e) $Mod(X) = \emptyset \Longrightarrow X \models H \in \underline{Aus} \Longrightarrow FL(X) = \underline{Aus} \Longrightarrow X \models (H \wedge^{\sim} H) \Longrightarrow Mod(X) = \emptyset$.

Definition:
1.) Vollständigkeit:
$X \subseteq \underline{Aus}$ heißt *vollständig*, falls für alle $H, H_1, H_2 \in \underline{Aus}$ gilt:
a) $H \notin X$ gdw. ${}^{\sim}H \in X$,
b) $(H_1 \wedge H_2) \in X$ gdw. $\{H_1, H_2\} \subseteq X$,
c) $(H_1 \vee H_2) \in X$ gdw. $\{H_1, H_2\} \cap X \neq \emptyset$,
d) $(H_1 \rightarrow H_2) \in X$ gdw. $\{{}^{\sim}H_1, H_2\} \cap X \neq \emptyset$.

2.) Endliche Erfüllbarkeit:
$X \subseteq \underline{Aus}$ heißt *endlich erfüllbar*, falls jede endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ erfüllbar ist ($Mod(Y) \neq \emptyset$).

Satz:
Es sei $X, Y \subseteq \underline{Aus}$ und $H \in \underline{Aus}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
a) X erfüllbar ($Mod(X) \neq \emptyset$) gdw. Y erfüllbar ($Mod(Y) \neq \emptyset$) für jede endliche Teilmenge $Y \subseteq X$.
b) Wenn $X \models H$, so existiert endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $Y \models H$.

Beweis:
a) $\Longrightarrow$ b): Annahme: $X \models H$ und es gibt kein $Y \subseteq X$ endlich mit $Y \models H$.
X erfüllbar $\Longrightarrow$ exist. Belegung $b \in \underline{Bel} : b \models Y$ und $b \models^{\sim} H \Longrightarrow$ jede endliche Teilmenge von $X \cup \{{}^{\sim}H\}$ ist erfüllbar $\Longrightarrow X \cup \{{}^{\sim}H\}$ ist erfüllbar $\Longrightarrow X \models H$ gilt nicht. Widerspruch.
b) $\Longrightarrow$ a) : Annahme: X nicht erfüllbar, d.h., $Mod(X) = \emptyset \Longrightarrow X \models (H \wedge^{\sim} H) \Longrightarrow$ exist. endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $Y \models (H \wedge^{\sim} H)$ gdw. $Mod(Y) = \emptyset$. Y nicht erfüllbar.

Endlichkeitssatz: Sei $X \subseteq \underline{Aus}$.
Wenn X endlich erfüllbar, dann ist X erfüllbar (Umkehrung trivialerweise gültig.)

Beweis: Annahme: Jede endliche Teilmenge von X besitzt Modell $\Longrightarrow$ zu jeder Variablen $p_i \in \underline{Var}$ exist. Wert $w_i \in 0, 1$, so daß $b_i \models Y$ mit $b_i(p_i) = w_i \Longrightarrow$.
Konstruktion eines Modells für X: $X_0, X_1, ... \subseteq \underline{Aus}$ mit $X_0 = X$, $X_{n+1} = X_n \cup \{p_n\}$ (bzw. $X_n \cup \{\overline{p_n}\}$) falls für jede Teilmenge von X_n exist. $b \models X_n$ mit $b(p_n) = 1$ (bzw. 0). $\Longrightarrow$ jede endliche Teilmenge X_n (für alle $n \geq 0$) besitzt Modell (Induktion über n) $\Longrightarrow$ jede endliche Teilmenge von $Y = \bigcup_n X_n$ besitzt Modell (Y maximale endlich erfüllbare Teilmenge, Y vollständig) $\Longrightarrow b(p_i) = 1$ (bzw. 0) falls $p_i \in Y$ (bzw. $\overline{p_i} \in Y$) $\Longrightarrow b \models X$ (nicht konstruktiv).

Folgerung:
X ist unerfüllbar gdw. keine erfüllbare endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ existiert.
Anwendung: Test auf Unerfüllbarkeit rekursiv aufzählbarer Ausdrucksmengen. (Die Erfüllbarkeit ist so nicht prüfbar.)

1.5 Ableitungsbegriff

Charakterisierung der Allgemeingültigkeit durch Angabe eines Systems von Schlußregeln (Transformationen) und vorgegebenen Ausdrücken (Axiomen). (Vererbung der Allgemeingültigkeit.)

Definition:
$H \in \underline{Aus}$ heißt aus $X \subseteq \underline{Aus}$ *ableitbar* (in Zeichen: $X \vdash H$) wenn gilt
a) $H \in X$oder
b) Wenn $X \vdash H'$ und $X \vdash (H' \rightarrow H)$, so $X \vdash H$ (Abtrennungsregel) oder
c) Wenn $X \vdash H$, so $X \vdash Hp/H_p$ für beliebige Variablen $p \in \underline{Var}$ und beliebige Ausdrücke $H_p \in \underline{Aus}$ (Einsetzungsregel).
d) $X \vdash H$ gdw a), b) oder c) gilt.

Bemerkung: $X \vdash H$ (Deduktionsrelation) genau dann, wenn H durch endliche Anwendung von Abtrennungs- und Einsetzungsregel ausgehend von Ausdrücken aus X erhalten wird.

Definition: *Ableitungsmenge* (Deduktionsmenge)
Es sei $X \subseteq \underline{Aus}$. $Ab(X) = \{H | H \in \underline{Aus} \text{ und } X \vdash H\} \subseteq \underline{Aus}$.

Hülleneigenschaften:
a) $X \subseteq Ab(X)$ (Einbettung).
b) Wenn $X \subseteq Y$, so $Ab(X) \subseteq Ab(Y)$ (Monotonie).
c) $Ab(Ab(X)) \subseteq Ab(X)$ (Abgeschlossenheit)

Beweisidee: Einbettung nach Definition, Monotonie und Abgeschlossenheit durch vollständige Induktion über Ableitungsstufe entsprechend induktiver Definition der Ableitbarkeit.

Endlichkeitssatz:
Wenn $X \vdash H$, so existiert eine endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $Y \vdash H$.
(Jede aus einer vorgegebenen Menge X ableitbarer Ausdruck, ist bereits aus einer endlichen Teilmenge von X ableitbar.)
(Beweis durch vollständige Induktion über Ableitbarkeitsstufe.)

Eigenschaften:
a) $Ab(\emptyset) = \emptyset$ (endliche Ableitungsmenge nur für leere Menge)
b) $Ab(\underline{Aus}) = \underline{Aus}$ ($\underline{Aus}$ ist deduktionsabgeschlossen)
c) $Ab(\{p\}) = \underline{Aus}$ (Einsetzungsregel anwenden)
d) Wenn $X \vdash (H_1 \rightarrow H_2)$, so $X \cup \{H_1\} \vdash H_2$ (Ableitbarkeitstheorem).

Satz: (Deduktionserblichkeit der Allgemeingültigkeit)
Wenn $X \subseteq Ag$, so $Ab(X) \subseteq Ag$ (agH für alle H mit $X \vdash H$).
(Aus allgemeingültigen Ausdrücken können nur allgemeingültige Ausdrücke ab-

geleitet werden. Siehe Einsetzungsregel und modus ponens.)

Bemerkungen:
a) $Ab(Ag) = Ag$ (Ag deduktionsabgeschlossen)
b) Simultane Einsetzung keine Erweiterung (durch Kette einfacher Einsetzungen erzeugbar).
c) Häufig werden auch getrennte Ableitungsbegriffe für Abtrennungs- und Einsetzungsregel benutzt.

Definition: Schlußregeln
Eine (n-stellige) *Schlußregel* r (im Aussagenkalkül) ist eine (n+1)-stellige Relation über Aus: $(H_1, ..., H_n, H) \in r$ $H_1, ..., H_n$ heißen *Prämissen* mit Ausdrücken $H_i \in \underline{Aus}$, $H \in \underline{Aus}$ heißt *Konklusion.*
Sei R eine Menge (*Regelsystem*) von Schlußregeln.
$\vdash_R$ heißt *Ableitungsrelation* bzgl. R mit $X \vdash_R H$, wenn $H \in X$ oder es existieren Ausdrücke $H_1, ..., H_n \in \underline{Aus}$ und eine Regel $r \in R$ mit $(H_1, ..., H_n, H) \in r$ und $X \vdash_R H_i$ $(1 \leq i \leq n)$.
Das *Ableitungssystem* ($\underline{Aus}$, $\vdash_R$) heißt *(rekursiv) axiomatisierbar*, wenn R (rekursiv) entscheidbar ist.
Das Ableitungssystem heißt *endlich (aufzählbar) axiomatisierbar*, wenn R endlich und axiomatisierbar ($\bigcup R$ aufzählbar) ist.
Y heißt *Axiomensystem* für X, falls Ab (Y) = Ab (X) und Y entscheidbar.
X heißt *endlich axiomatisierbar*, falls es ein endliches Axiomensystem für X gibt.

Beispiele:
Ag Axiomensystem für Ag. (Gibt es ein endliches Axiomensystem für Ag?)
$\{p\}$ (endliches) Axiomensystem für Aus.

Bemerkung:
Zu jeder endlich axiomatisierbaren Menge $X \subseteq \underline{Aus}$ existiert ein endliches Axiomensystem Y mit $Y \subseteq X$. (Nach Endlichkeitssatz und Hülleneigenschaften der Ableitbarkeit.)
Es existieren nicht (endlich) axiomatisierbare Ausdrucksmengen.

1.6 Axiomatisierung

Zusammenhang zwischen Folgern und Ableiten.
Ag deduktionsabgeschlossen, kann Ag aus einer endlichen Menge abgeleitet werden?
Wie muß Regelsystem R beschaffen sein, daß durch Ableitung inhaltliches Folgern charakterisiert werden kann, d.h. $X \vdash_R H$ gdw $X \models H$?
0-stellige Regeln (*Axiome*) $Ax \subseteq \underline{Aus}$ (ohne Konstanten).
Weitere Regeln :
Abtrennungsregel (Modus ponens) $(H_1, H_1 \to H_2; H_2)$
Einsetzungsregel $(H; Hp/H_p)$ mit $H, H_i, H_p \in \underline{Aus}, p \in \underline{Var}$.
Notwendige Bedingung zur Charakerisierung der Allgemeingltigkeit:
$\emptyset \models Ax \subseteq Ag$.

Beispiele:
Ax1: (Hilbert, Bernays) $p, q, r \in \underline{Var}$
p $\to (q \to p)$,
$((p \to q) \to p) \to p$,
$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$,
$(p \wedge q) \to p$,
$(p \wedge q) \to q$,
$(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to q \wedge r))$,
$p \to (p \vee q)$,
$q \to (p \vee q)$,
$(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$,
$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$,
$(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$,
$(p \leftrightarrow q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$,
$(p \to q) \to (\bar{q} \to \bar{p})$,
$p \to^{\sim} \bar{p}$,
${}^{\sim}\bar{p} \to p$

$Ax2$: p, q, r $\in \underline{Var}$
p $\to p$,
$p \to (q \to p)$,
$(p \to q) \to (((p \to r) \to q) \to q)$,
$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

Ax3: (Meredith) $p, q, r, s, t \in \underline{Var}$
$(((\mathrm{p} \to q) \to (\bar{r} \to \bar{s})) \to t) \to ((t \to p) \to (q \to p))$.

Häufig wird auf die Einsetzungsregel verzichtet und dafür Axiomschemata Axs angegeben mit $H_1 \to (H_2 \to H_1)$ statt $p \to (q \to p)$, wobei H_1, H_2 konstantenfreie Ausdrücke.

Axiomensysteme (Menge der 0-stelligen Regeln) endlich bzw. endlich angebbar.
$\vdash_e$ *Ableitbarkeitsrelation* bzgl. Ax, Abtrennungs- und Einsetzungsregel.
$\vdash_a$ *Ableitbarkeitsrelation* bzgl. Ax und Abtrennungsregel.
Wir bezeichnen durch $X \vdash H$ die Beziehung $X \cup Ax \vdash_a H$.

Definition: *Konsistenz* (semantisch, syntaktisch, klassisch)
a) X heißt *semantisch konsistent*, falls X erfüllbar ist $(Mod(X) \neq \emptyset)$.
b) X heißt *syntaktisch konsistent*, falls $\{H/X \vdash H\} \subset \underline{Aus}$.
c)X heißt *klassisch konsistent*, falls kein H existiert mit $X \vdash H$ und $X \vdash^{\sim} H$.
(Entsprechend *widerspruchsfrei* auf Allgemeingültigkeit bezogen) .

Satz:
a) X syntaktisch konsistent gdw X klassisch konsistent.
b) Wenn X semantisch konsistent, so auch X klassisch konsistent.
(Umkehrung gilt nicht)
c) Jede Teilmenge konsistenter Mengen ist konsistent (semantisch, syntaktisch,klassisch).
d) Wenn jede endliche Teilmenge von X konsistent, dann ist auch X konistent (semantisch, syntaktisch,klassisch) (Endlichkeitssatz).

Beweis:
a) Sei X syntaktisch konsistent, aber nicht klassisch konsistent. Dann existiert H mit $X \vdash H$ und $X \vdash^{\sim} H$, woraus folgt $X \vdash (H \wedge^{\sim} H)$.
$Ax \vdash_a (H \wedge^{\sim} H) \rightarrow H'$ für alle H' und daraus $\{H'/X \vdash H'\} = \underline{Aus}$.
Widerspruch. (Umkehrung trivial.)
b) aus X erfüllbar folgt , $\{H/X \models H\}$ erfüllbar.
c) trivial
d) nach Endlichkeitssatz für Ableitbarkeit.

Es sei $X \subseteq \underline{Aus}$, $H_i \in \underline{Aus}$ (konstantenfrei).
Satz (*Deduktionstheorem*): Wenn $X \cup \{H_1\} \vdash H_2$, so $X \vdash (H_1 \rightarrow H_2)$.

Beweis: (Induktion über Ableitungsstufe)
Aus $X \cup \{H_1\} \vdash^0 H_2$ folgt $H_2 \in X \cup Ax \cup \{H_1\}$ folgt $X \vdash (H_1 \rightarrow H_2)$
wegen $Ax \vdash_a (H_1 \rightarrow H_1)$ oder $Ax \vdash_a (H_2 \rightarrow (H_1 \rightarrow H_2))$.
Aus $X \cup \{H_1\} \vdash^{n+1} H_2$ folgt, es existiert H mit $X \cup \{H_1\} \vdash^n H$, $(H \rightarrow H_2)$
wegen Ax gilt $X \vdash^n (H_1 \rightarrow H) \rightarrow (H_1 \rightarrow H_2)$ und daraus $X \vdash^n (H_1 \rightarrow H_2)$.

Satz (*Korrektheitssatz*):
Wenn $X \vdash H$, so $X \models H$.
(Jeder aus X mit Axs ableitbare Ausdruck kann aus X gefolgert werden.)

Beweis: (Induktion über Ableitungsstufe)
$X \vdash^0 H$ gdw $H \in X \cup Ax$ woraus $X \models H$ folgt (Inklusionsbeziehung).
Aus $X \vdash^{n+1} H$ folgt, es existiert $H' \in \underline{Aus}$ mit $X \vdash^n (H' \rightarrow H)$, H' und daraus $X \models (H' \rightarrow H)$, H' also $X \models H$.

Satz (*Vollständigkeitssatz*):
$X \vdash H$ gdw $X \models H$ (Umkehrung Korrektheit).
(Ableitungsbegriff bzgl. Ax und Folgerungsbegriff sind äquivalent.)

Beweis:
$\Longleftarrow$ Falls nicht $X \vdash H$, dann existiert Y mit $X \cup Ax \subseteq Y \subseteq \underline{Aus}$ mit $H \notin Y$ und $\{H'/Y \vdash H'\} = Y$ und wenn $H' \notin Y$, so $Y \cup \{H'\} \vdash H$.
zu zeigen: Y vollständig, dann existiert eine Belegung b mit $b \models Y \cup \{{}^{\sim}H\}$ woraus Widerspruch zu $X \models H$ folgt. (Anwendung der Regeln aus Ax)

Satz (*Axiomatisierungstheorem*):
agH gdw $Ax \vdash_a H$.
(Allgemeingültigkeit = Ableitbarkeit aus Ax)
($\emptyset \vdash H$, d.h. Ax ist Axiomensystem für Ag, Ag ist endlich axiomatisierbar.)

Beweis:
$\Longrightarrow$ Aus agH folgt $\emptyset \models H$ und daraus $\emptyset \vdash H$ also $Ax \vdash_a H$.
$\Longleftarrow$ Aus $Ax \subseteq Ag$ und $Ax \vdash_a H$ folgt $H \in Ag$.

Bemerkungen:
Ax ist Axiomensystem für Ag.
Ag ist endlich axiomatisierbar.
Ag ist aus endlicher Menge ableitbar.

Ax1 kann weiter reduziert werden zu Ax2 bzw. Ax3. Ax1 ist syntaktisch vollständig, d.h. nach Hinzunahme eines nicht aus Ax1 ableitbaren Ausdrucks H ist $Ax1 \cup \{H\}$ syntaktisch inkonsistent.

Folgerung:
Jede (semantisch vollständige) Ausdrucksmenge aus der alle allgemeingültigen Ausdrücke ableitbar sind, ist syntaktisch vollständig. (Gilt nur im Aussagenkalkül.)(Umkehrung gilt nicht.)

Kapitel 2

Prädikatenlogik:

In der Aussagenlogik werden Aussagenverbindungen ohne Berücksichtigung der inneren Struktur der Elementaraussagen behandelt (Extensionalität). Nur deren Wahrheitswerte und der Aufbau von Verbindungen mit Hilfe aussagenlogischer Funktionen ("nicht", "und", "oder", "wenn, so", " genau dann, wenn") sind von Interesse. Aussagen der Form $(x < y)$ kann nur dann ein Wahrheitswert zugeordnet werden, wenn x, y bestimmte Objekte und < eine bestimmte zweistellige Relation über diesen Objekten zugeordnet ist.
Allgemein werden x, y als Variable (z.B. für Zahlen) und < als konkrete Relation oder als Relationsvariable aufgefaßt. Dann wird $(x < y)$ erst dann zu einer Aussage, wenn x, y bzw. < mit bestimmten Objekten bzw. einer bestimmten Relation belegt werden.
Wir nennen solche Konstrukte dann *Aussageformen*. Diese können durch aussagenlogische Verbindungen zu komplexeren Formen verbunden werden. Die Aussageform $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$ ist für alle Belegungen von x, y, z erfüllt, wenn x, y, z Zahlvariable und < die Kleiner-Relation über diesen Zahlbereich bezeichnet. Diese Aussageform A (x, y, z) in den Variablen x, y, z hat die Stellenzahl drei und A ist hier als Attribut (Eigenschaft) für Zahlentripel aufzufassen. Werden für bestimmte Variable y, z feste Werte (Individuen) aus dem zugrunde gelegten Objektbereich (Individuenbereich) gesetzt, entsteht eine neue Aussageform A (x) der Stellenzahl 1.
Neue Aussageformen entstehen auch dadurch, daß über den Belegungsbereich der Variablen Annahmen getroffen werden. Z.B. hat die Aussageform "Für jedes x: $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$" die Stellzahl 2, da nur noch y und z belegt werden können. Über x ist schon dadurch verfügt, daß die nach Belegung der Variablen y und z entstehende Aussage für alle Werte von x erfüllt sein soll (Tautologie). Die Variable x ist damit gebunden, während y und z frei (belegbar) sind.
"Für jedes x: A (x, y, z)" bzw. "Für alle x: A (x, y, z)" ist eine zweistellige Aussageform mit den freien Variablen y und z. Analog dazu könnte man auch "Es gibt ein x: A (x, y, z)" als Aussageform bilden, die bei Belegung der freien Variablen y und z dann zu einer wahren Aussage wird, wenn es überhaupt einen Wert aus

dem Objektbereich der Variablen x gibt, für den das Attribut A zusammen mit den Werten von y und z zutrifft.
Wir nennen diese Form der Verknüpfung *Quantifizierung* und schreiben für "Für jedes" bzw. für "Es gibt ein" das Zeichen $\forall$ bzw. $\exists$.
Aus einstelligen Aussagenformen entstehen durch Quantifizierungen der Variablen Aussagen. Die Aussageform "Für jedes x: A (x)" bzw. "Es gibt ein x: A (x)" ist genau dann eine wahre Aussage, wenn sie für jedes bzw. mindestens ein Element des für x vereinbarten Individuenbereiches das Attribut A zutrifft. Quantifizierungen beziehen wir zunächst nur auf Objekt(Individuen)-Variable, wobei der Bereich, aus dem die Objekte entstammen, zu vereinbaren ist.(Einfache Prädikatenlogik)
Voraussetzung für die Quantifizierung einer Variablen x in einer Aussageform A (x) ist die Tatsache, daß x in A überall frei vorkommt. Wenn x in A durch eine weitere Quantifizierung gebunden ist, besteht Verwechselungsgefahr (Variablenkonfusion), was später insbesondere bei Einsetzungen zu beachten ist.
In der Aussageform "Es gibt ein x: A (x)" bzw. "Für alle x: A (x)" bezeichnen wir A (x) als den Wirkungsbereich des Quantors "Es gibt ein" bzw. "Für alle". Das Frei- (Gebunden)-sein einer Variablen bezieht sich dann auf diesen Wirkungsbereich des die Variable bindenden Quantors.
Es sind auch andere Quantifizierungen denkbar, wie z.B. " Es gibt genau ein" oder "Es gibt höchstens ein", oder solche, die sich auf Variable für Attribute beziehen (Prädikatenlogik höherer Stufe).
Quantifizierungen können auch verschachtelt werden, wobei komplexere Aussagenformen entstehen. In der hier betrachteten *einsortigen* Logik werden alle Variablen und Quantifizierungen über ein und demselben (Objekt-) Individuenbereich betrachtet. Ansonsten könnten auch mehrere Individuenbereiche für Variablen und Bindungen zugelassen werden (mehrsortige Logiken).
Wir verwenden auch hier das Extensionalitätsprinzip, daß der Wahrheitswert einer Aussagenform nach Belegung der freien Variablen nur vom Wahrheitswert der entstehenden Aussagen abhängig ist. Der Abstraktionsprozeß von den Aussagen zu Wahrheitswerten wird damit auf Aussageformen übertragen, d.h. einer n-stellige Aussageform $A(x_1, ..., x_n)$ entspricht bei fest gewähltem Individuenbereich I eine n-stellige Funktion (Attribut, Prädikat) F_A von I^n in die Menge der Wahrheitswerte.
0-stellige Attribute sind *Wahrheitswerte*,
1-stellige Attribute heißen *Eigenschaften*,
2-stellige Attribute heißen binäre *Relationen* usw.
F heißt *All-Attribut* in I, wenn für jedes $a \in I$ gilt: F (a) = 1 (wahr).
F heißt *Null-Attribut* in I, wenn für jedes $a \in I$ gilt: F (a) = 0 (falsch).
F heißt *Identität* in I, wenn F (a, b) = 1 gdw. $a \equiv b$.
Analog definieren wir mehrstellige All-, Null-, Identitätsattribute.
Attribute können durch aussagenlogische Funktoren verknüpft werden. So ist z.B. $F_1(a_1, ..., a_n) \wedge F_2(b_1, ..., b_m)$ ein (n+m)-stelliges Attribut $F(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$,

dessen Wahrheitswert durch die Konjunktion der Wahrheitswerte von F_1 und F_2 bestimmt wird. Analog dazu können quantifizierte Aussageformen mit Hilfe der Funktionale Om_k und Ex_k ($k \leq n$) interpretiert werden.
Entspricht der Aussageform $A(x_1, ..., x_k, ..., x_n)$ mit der freien Variablen x_k das Attribut F, dann wird der Aussageform "Für jedes $x_k : A$" (bzw. "Es gibt ein $x_k : A$") das (n-1)-stellige Attribut $Om_k(F)$ (bzw. $Ex_k(F)$), mit
$Om_k(F)(a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n) = 1$ gdw. für jedes $a_k \in I$ gilt: $F(a_1, ..., a_n) = 1$ (bzw. $Ex_k(F)(a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n) = 1$ gdw. ein $a_k \in I$ existiert, so daß gilt: $F(a_1, ..., a_n) = 1$) zugeordnet.
Quantifizierungen entsprechen demnach Funktionen, die n-stelligen Attributen (n-1)-stellige Attribute zuordnen (z.B.: aus Eigenschaft wird Wahrheitswert). Die Quantifizierungsfunktion Om wird als *Generalisierung*, Ex als *Partikularisierung* bezeichnet und beziehen sich in Aussageformen als Om_k (Ex_k) auf bestimmte freie Variablen x_k.
In der einfachen Prädikatenlogik (Logik 1. Stufe) werden aus Grundattributen mit Hilfe der aussagenlogischen Funktionen und mit Quantifizierungsfunktionen zusammengesetzte Attribute aufgebaut. Die *Sätze* (*Tautologien*) der Prädikatenlogik sind solche Attribute, die für alle Individuentupel den Wahrheitswert wahr annehmen, entsprechen also Aussageformen, die unabhängig von ihrer inhaltlichen Bedeutung der verknüpften Aussageformen bei jeder Interpretation der freien Variablen über den betrachteten (vorgegebenen) Individuenbereich eine wahre Aussage ergeben. Aussagenlogische Tautologien sind auch prädikatenlogische Tautologien, d.h. die Aussagenlogik ist in die Prädikatenlogik eingebettet. Weitere Tautologien entstehen durch Quantifizierung.

2.1 Ausdrücke der Prädikatenlogik

<u>Semiotische Basis B (Signatur)</u> (mit den Indexmengen L, M, N)
Individuensymbole a_i mit $i \in L$; Attributensymbole $A_j^{s_j}$ mit $j \in M$;
Funktions(Operations)symbole $F_k^{t_k}$ mit $k \in N$ (s_j, t_k Stellenzahl (Arität), Individuensymbole werden auch als 0-stellige Funktionssymbole behandelt.).
$B = \{a_i | i \in L\} \cup \{A_j^{s_j} | j \in M\} \cup \{F_k^{t_k} | k \in N\} \cup Z$, wobei Z die Menge der weiteren Grundzeichen $\{x_k | k$ nat. Zahl$\}$ für Individuenvariable; $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ für Junktoren (aussagenlogische Funktoren) ; $\exists$ (Partikularisator), $\forall$ (Generalisator) für Qantoren und (,) für technische Zeichen (Klammern). (Auf Attributen- bzw. Funktionsvariable wird hier verzichtet.)

Definition: *Prädikatenlogische Ausdrücke*

a) $\underline{\text{Term}}_B Termeüber B$:

1)$\{ \text{x}_k | k$ nat.Zahl $\} \cup \{a_i | i \in L\} \subseteq \underline{Term}_B$.

2) Wenn $T_1, ..., T_n \in \underline{Term}_B$ und F^n ein n-stelliges Funktionssymbol, dann auch $F^n(T_1, ..., T_n) \in \underline{Term}_B$.

3) $T \in \underline{Term}_B$ gdw. wenn 1) oder 2) zutrifft.

b) $\underline{\text{Aus}}_B Ausdrückeüber B$:

1)$Wenn \text{T}_1, ..., T_m \in \underline{Term}_B$ und A^m ein m-stelliges Attributensymbol, dann sind auch $A^m T_1, ..., T_n \in \underline{Aus}_B$ (prädikative Ausdrücke, Atomformeln).

2) Wenn H bzw. $H_1, H_2 \in \underline{Aus}_B$, dann ist auch $\sim H$, bzw. $(H_1 \circ H_2) \in \underline{Aus}_B$, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und wenn $H(x) \in \underline{Aus}_B$ und x vollfrei in H (in H steht vor x an keiner Stelle ein Quantor), dann sind auch $\exists x H(x), \forall x H(x) \in \underline{Aus}_B$.

3) $H \in \underline{Aus}_B$ gdw. 1) oder 2) zutrifft.

Beispiele:

$A_1^3 x_1 F_2^2(x_0, F_3^1(x_1)) F_4^1(x_0)$ prädikativer Ausdruck (Atomformel),

$(A_2^2 x_0 x_1 \rightarrow A_3^2 x_0 F_3^1(x_1))$ zusammengesetzter Ausdruck , x_0, x_1 vollfrei,

$\forall x_0 (A_2^2 x_0 x_1 \rightarrow A_3^2 x_0 F_3^1(x_1))$ quantifizierter Ausdruck , x_0 gebunden, x_1 vollfrei,

$\forall x_0 (A_2^2 x_0 x_1 \rightarrow \exists x_1 A_3^2 x_0 F_3^1(x_1))$ Ausdruck, keine Variable vollfrei, erstes Vorkommen von x_1 frei,

$\forall x_0 \exists x_1 (A_2^2 x_0 x_1 \rightarrow A_3^2 x_0 F_3^1(x_1))$ Aussage (geschlossener Ausdruck), alle Variablen an allen Stellen gebunden.

Bezeichnungen:

a) Eine Variable x heißt *vollfrei* in H gdw. x in H vorkommt und für alle z wo zx Teilzeichenreihe von H gilt: $z \neq \exists, \forall$. (In H steht vor x an keiner Stelle ein Quantor. Die Variable ist an keiner Stelle in H quantifiziert.)

b) Der Ausdruck H' heißt *Wirkungsbereich* des Quantors $\exists$ bzw. $\forall$ zur Variablen x an einer Stelle im Ausdruck H wo x quantifiziert gdw. H' der auf $\exists x$ bzw. $\forall x$ unmittelbar folgende Teilausdruck von H ist.(Eindeutig bestimmter Teilausdruck, der nach x beginnt und in dem x vollfrei ist.)

c) Die Variable x heißt im Ausdruck H an einer Stelle *gebunden*, wenn x dort quantifiziert ist, d.h. im Wirkungsbereich eines Quantors zur Variablen x liegt.

d) Die Variable x heißt an einer Stelle in H *frei* vorkommend, wenn x dort nicht gebunden ist. (x frei in H, wenn eine Stelle in H existiert, wo x frei vorkommt.)

e) Der Ausdruck H ist eine *Aussage*, wenn alle Variablen von H an allen Stellen gebunden sind (geschlossener Ausdruck).

Definition:

a) *Freie Termeinsetzung*: H[x / T] entsteht aus H, indem an allen Stellen wo x in H frei vorkommt, für x der Term T eingesetzt wird. Die Termeinsetzung heißt *korrekt*, wenn keine Variable aus T bei der Einsetzung gebunden wird, sonst Variablenkonfusion (Auflösung durch Variablenumbenennung).

Beispiel:
$\forall x_0(A_2^2 x_0 x_1 \to \exists x_1 A_3^2 x_0 F_2^1(x_1))[x_1/F_3^1(x_0)]$ nicht korrekt, da x_0 gebunden.
Analog simultane Einsetzung H [x_i // T_i] als Kette einfacher korrekter Termeinsetzungen realisierbar.

b) *Gebundene Umbenennung*: Der Ausdruck H' entsteht aus H durch gebundene Umbenennung, wenn eine in H vorkommende gebundene Variable x an einer Stelle, wo x quantifiziert ist und an allen Stellen im zugehörigen Wirkungsbereich dieses Quantors, durch eine andere Variable y ersetzt wird.
Eine gebundene Umbenennung heißt *korrekt*, wenn H' Ausdruck ist und durch die Umbennung keine frei in H vorkommende Variable in H' gebunden wird (Vermeidung von Variablenkonfusion).
H' bleibt Ausdruck, wenn Variablenkollision vermieden wird, d.h., die Variable y darf im betroffenen Wirkungsbereich nicht quantifiziert sein und dieser Wirkungsbereich darf nicht in einem Wirkungsbereich eines Quantors von y liegen.
(Analog simultane Umbenennung durch Kette einfacher Umbenennung ersetzbar.)
Beispiel:
$\exists x_0 \forall x_1(A_1^2 x_0 x_1 \to \exists x_2(A_1^2 x_2 x_4 \wedge A_2^2 x_1 x_3)) \wedge \exists x_1 A_2^2 x_1 x_2$.
Bei korrekter gebundener Umbenennung von x_1 in x_4 entsteht:
$\exists x_0 \forall x_4(A_1^2 x_0 x_4 \to \exists x_2(A_1^2 x_2 x_4 \wedge A_2^2 x_4 x_3)) \wedge \exists x_1 A_2^2 x_1 x_2$.
Umbenennung von x_1 in x_3 führt zu Variablenkonfusion und Umbennung von x_1 in x_0 oder x_2 führt zu Variablenkollision.

Abkürzungen/Vereinbarungen:

1.) Attribute als Präfixe auch mit geklammerten Argumenten oder in Infixschreibweise möglich (letzteres auch für Funktionen erlaubt).

2.) Negierte Attribute durch gestrichenes Attributzeichen beschreibbar.

3.) Generalisierungen bzw. Partikularisierungen für mehrere Variable können klammerfrei zusammengefaßt werden.

4.) Klammereinsparung bzw. Klammersetzung wie im Aussagenkalkül.

5.) Außer x_i können als Zeichen für Variable auch andere Kleinbuchstaben mit oder ohne Index verwendet werden.

2.2 Semantik

Gegeben sei eine nichtleere Menge I , als *Individuenbereich* (Universum) bezeichnet, und eine Funktion f von der semiotischen Basis B in den Individuenbereich I als *Interpretation* bezeichnet, mit
$f(A^m) = I^m \to \{0,1\}$ m-stellige Relation über I,
$f(F^n) = I^n \to I$ n-stellige Operation auf I, $f(a_i) \in I$ und
$f(\circ) = \Phi_\circ$ (Boolesche Funktion) für $\circ = \{\sim, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ standardmäßig.
$\Sigma = (I, f)$ heißt eine *B-Algebra* (Algebra vom Typ B). Eine solche setzen wir als Grundlage der Semantik immer voraus.

Definition: *Wertfunktion*
Zu vorgegebener *Belegung* b der Variablen aus Var als Abbildung $\underline{Var} \to I$ (jeder Variablen wird ein Ding aus dem Individuenbereich zugeordnet) wird jedem Term $T \in \underline{Term}_B$ bzw. Ausdruck $H \in \underline{Aus}_B$ bzgl. der B-Algebra Σ durch die Funktion $Wert_\Sigma$ ein Individuum $Wert_\Sigma(T, b) \in I$ bzw. ein Wahrheitswert $Wert_\Sigma(H, b) \in \{0,1\}$wie folgt zugeordnet:

- $Wert_\Sigma(x, b) = b(x)$, $Wert_\Sigma(a, b) = f(a)$ für $x \in \underline{Var}$ und $a \in B$,
  $Wert_\Sigma(F^n(T_1, ..., T_n), b) = f(F^n)(Wert_\Sigma(T_1, b), ..., Wert_\Sigma(T_n, b))$.
- $Wert_\Sigma(A^m T_1, ..., T_m, b) = 1$ gdw. $(Wert_\Sigma(T_1, b), ..., Wert_\Sigma(T_m, b)) \in f(A^m)$,
  $Wert_\Sigma(\sim H, b) = non Wert_\Sigma(H, b)$,
  $Wert_\Sigma((H_1 \circ H_2), b) = Wert_\Sigma(H_1, b) f(\circ) Wert_\Sigma(H_2, b)$,
  $Wert_\Sigma(\exists x H(x), b) = Ex(A_{x,b})$, $Wert_\Sigma(\forall x H(x), b) = Om(A_{x,b})$ mit
  $A_{x,b}(\alpha) = Wert_\Sigma(H, b\langle{x \atop \alpha}\rangle)$ wobei
  $Om_k(A)(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n) = 1$ gdw. für jedes $\alpha_k \in I : A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1$ bzw.
  $Ex_k(A)(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n) = 1$ gdw. existiert $\alpha_k \in I : A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1$.

Bemerkung:
a) Die Belegung $b' = b\langle{x \atop \alpha}\rangle$ unterscheidet sich von der Belegung b höchstens an der Stelle (für die Variable) x, d.h., für alle $y \neq x$ gilt $b'(y) = b(y)$ und $b'(x) = \alpha$.
b) Da eine Aussage keine freien Variablen hat, hängt ihr Wert nicht von Belegungen ab. In einer gewählten Algebra ist jede Aussage für alle Belegungen wahr oder für alle Belegungen falsch.
c) $Wert_\Sigma(H, b)$ hat für jeden Ausdruck H und jede Belegung b einen eindeutig bestimmten Wahrheitswert, der nur von der Belegung b der in H frei vorkommenden Individuenvariablen abhängt.
Bei Übergang zu einer anderen Algebra (mit der gleichen Signatur) kann sich der Wahrheitswert der Aussagen ändern.

d) Die Funktion $Wert_\Sigma$ kann als Erweiterung b^* von Belegungen b auf Ausdrücke aufgefaßt werden, d.h. $Wert_\Sigma(H, b) = b^*(H)$.

Beispiel:
Es sei I = Menge $\Re$ der reellen Zahlen, $f(0) = Null \in \Re$, $f(\leq) \subseteq \Re^2$ Kleiner-Relation, $f(-) : \Re^2 \to \Re$ Differenz, $f(||) : \Re \to \Re$ Betrag, ϕ eine einstellige reelle Funktion und ϵ, δ, x_0, $x \in \underline{Var}$.
Mit Hilfe des Ausdruckes
$H_\phi(x_0, x) = \forall\epsilon(0 < \epsilon \to \exists\delta(0 < \delta \wedge \forall x(|x - x_0| \leq \delta \to |\phi(x) - \phi(x_0)| \leq \epsilon))$
(x_0 frei, ϕ Parameter) definieren wir die Stetigkeitseigenschaft:
ϕ an der Stelle $b(x_0)$ stetig gdw. $Wert_\Sigma(H_\phi(x_0, x), b) = 1$ (wahr).
Der Ausdruck H_ϕ wird zur Aussage (geschlossener Ausdruck), wenn für die Variable x_0 das Individuum $b(x_0)$ eingesetzt wird.

Definition:*Erfüllbarkeit, Gültigkeit*
Für Ausdrücke $H \in \underline{Aus}_B$, Ausdrucksmengen $X \subseteq \underline{Aus}_B$ und Belegungen b über $\Sigma = (I, f)$ führen wir folgenden Begriffsbildungen ein:

a) b über Σ erfüllt H (in Zeichen: $\Sigma \models_b H$), wenn $Wert_\Sigma(H, b) = 1$ (wahr), d.h.,
1.) $\Sigma \models_b A^m T_1 ... T_m$ gdw. $(Wert_\Sigma(T_1, b), ..., Wert_\Sigma(T_m, b)) \in f(A^m)$,
2.) $\Sigma \models_b {}^{\sim}H$ gdw. $\Sigma \not\models_b H$ und $\Sigma \models_b (H_1 \circ H_2)$ gdw. $(\Sigma \models_b H_1)\Phi_\circ(\Sigma \models_b H_2)$,
3a.) $\Sigma \models_b \exists x H(x)$ gdw. existiert $\alpha \in I$ mit $\Sigma \models_{b_{x,\alpha}} H(x)$ und $b_{x,\alpha} = b\langle{x \atop \alpha}\rangle$,
3b.) $\Sigma \models_b \forall x H(x)$ gdw. für alle $\alpha \in I$ mit $\Sigma \models_{b_{x,\alpha}} H(x)$ und $b_{x,\alpha} = b\langle{x \atop \alpha}\rangle$,
4.) $\Sigma \models_b X$ gdw. $\Sigma \models_b H$ für alle $H \in X$.

b) H heißt erfüllbar in Σ (in Zeichen: $ef_\Sigma H$), wenn eine Belegung b mit $\Sigma \models_b H$ existiert, X heißt erfüllbar in Σ, wenn $\{b | \Sigma \models_b X\} \neq \emptyset$.
Durch Ef_Σ bezeichnen wir die Menge der in Σ erfüllbaren Ausdrücke.

c) Ein Ausdruck H heißt (allgemein)gültig in Σ (Σ-Tautologie) (in Zeichen: $ag_\Sigma H$), wenn $\Sigma \models_b H$ für alle Belegungen b über Σ.
X heißt (allgemein)gültig in Σ (in Zeichen $\Sigma \models X$), wenn $ag_\Sigma H$ für alle Ausdrücke $H \in X$.
Die Menge aller in Σ (allgemein)gültigen Audrücke bezeichnen wir durch Ag_Σ.
Wenn X gültig in Σ , dann ist $X \subseteq Ag_\Sigma$, d.h. Σ ein Modell für X.

d) H heißt logisch gültig, wenn $ag_\Sigma H$ für alle Σ (in jeder B-Algebra Σ).
X heißt logisch gültig, wenn $\Sigma \models X$ für alle B-Algebren Σ.
(Beispiel: Der Ausdruck $\forall x H(x) \to \exists x H(x)$ ist logisch gültig.)

Eigenschaften:
1.) $ag_\Sigma \subseteq ef_\Sigma$, d.h. wenn H in Σ allgemeingültig, dann ist H in Σ auch erfüllbar.)
2.) Für Aussagen (geschlossene Ausdrücke) H gilt: $ag_\Sigma H$ gdw. $ef_\Sigma H$, d.h. eine Aussage wird von jeder Belegung über I erfüllt oder von keiner (Prinzip der Zweiwertigkeit).
Beispiel:
Für $\Sigma = (Nz, f)$ mit Nz = Menge der nat.Zahlen, $f(0)$ = Null , $f(<)$ = kleiner, $f(*)$ = mult sind $(x < y) \to {}^{\sim}(y < x)$ und $((x < y) \wedge (0 < z)) \to ((x * z) < (y * z))$ erfüllbare und allgemeingültige Ausdrücke.

Der Ausdruck $(x < y) \to \exists z((x < z) \land (z < y))$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.
Erfüllende Belegungen für $b(y) \leq b(x)$ (Prämisse falsch) und $(b(x) + 1) < b(y)$ (Zwischenwert existiert).
Falsifizierende Belegungen für $(b(x) + 1) = b(y)$ (y Nachfolger x).

Es sind weiter folgende Eigenschaften beweisbar:
3.) Aussagenlogische Beziehungen:
$ag_\Sigma H$ gdw. nicht $ef_\Sigma {}^\sim H$, $ef_\Sigma H$ gdw. nicht $ag_\Sigma {}^\sim H$,
$ag_\Sigma(H_1 \land H_2)$ gdw. $ag_\Sigma H_1$ und $ag_\Sigma H_2$, $ef_\Sigma(H_1 \lor H_2)$ gdw. $ef_\Sigma H_1$ oder $ef_\Sigma H_2$,
wenn $ag_\Sigma H_1$ oder $ag_\Sigma H_2$, so $ag_\Sigma(H_1 \lor H_2)$,
wenn $ef_\Sigma(H_1 \land H_2)$, so $ef_\Sigma H_1$ und $ef_\Sigma H_2$,
wenn $ag_\Sigma(H_1 \to H_2)$ und $ag_\Sigma H_1$, so $ag_\Sigma H_2$ (Abtrennungsregel),
wenn $ag_\Sigma(H_1 \leftrightarrow H_2)$, so $ag_\Sigma H_1$ gdw. $ag_\Sigma H_2$.

4.) Prädikatenlogische Beziehungen:
$ag_\Sigma \forall x(H(x))$ gdw. $ag_\Sigma H(x)$, $ef_\Sigma \exists x H(x)$ gdw. $ef_\Sigma H(x)$,
wenn $ag_\Sigma H(x)$, so $ag_\Sigma \exists x H(x)$, wenn $ef_\Sigma \forall x H(x)$, so $ef_\Sigma H(x)$.

5.) Umformungsregeln:
Vordere Generalisierung
Wenn $ag_\Sigma(H_1(x) \to H_2)$ und x vollfrei in H_1, so $ag_\Sigma(\forall x H_1(x) \to H_2)$.

Hintere Partikularisierung
Wenn $ag_\Sigma(H_1 \to H_2(x))$ und x vollfrei in H_2, so $ag_\Sigma(H_1 \to \exists x H_2(x))$.

Hintere Generalisierung
Wenn $ag_\Sigma(H_1 \to H_2(x))$ und x nicht in H_1, so $ag_\Sigma(H_1(x) \to \forall x H_2(x))$.

Vordere Partikularisierung
Wenn $ag_\Sigma(H_1(x) \to H_2)$ und x nicht in H_2, so $ag_\Sigma(\exists x H_1(x) \to H_2)$.

Korrekte freie Termeinsetzung(Vermeidung von Variablenkollision)
Wenn $ag_\Sigma H(x)$ und x vollfrei in H und T zulässig für H, so $ag_\Sigma H({}^x/_T)$.

Korrekte gebundene Umbenennung:(Vermeidung von Variablenkonfusion)
Wenn $ag_\Sigma H$ und H geht durch korrekte gebundene Umbenennung in H' über, so $ag_\Sigma H'$.

Bemerkungen:
a) Für alle Ausdrücke $H \in \underline{Aus}_B$, alle Belegungen b über I und jeden für H zulässigen Term T gilt:
$Wert_\Sigma(H(x/T), b) = Wert_\Sigma(H(x), b\langle{}^x_{Wert_\Sigma(T,b)}\rangle)$.
b) Wenn H durch korrekte gebundene Umbenennung in H' übergeht, dann gilt für alle Belegungen b über Σ : $Wert_\Sigma(H, b) = Wert_\Sigma(H', b)$.

Definition:*Semantische Äquivalenz in* Σ:
a) H_1 *semantisch äquivalent* über Σ mit H_2 (in Zeichen: $H_1 \approx_\Sigma H_2$), wenn für jede Belegung b in Σ gilt: $Wert_\Sigma(H_1, b) = Wert_\Sigma(H_2, b)$ (d.h. $ag_\Sigma(H_1 \leftrightarrow H_2)$),
b) T_1 *semantisch äquivalent* in Σ mit T_2 (in Zeichen: $T_1 \approx_\Sigma T_2$), wenn für jede Belegung b über Σ gilt: $Wert_\Sigma(T_1, b) = Wert_\Sigma(T_2, b)$.

Satz: Ersetzbarkeitstheoreme
Für Terme T, T', T_i und Ausdrücke H, H', H_i gelten folgende Beziehungen:
a) Wenn $Ers(T, T_1, T_2, T')$ und $T_1 \approx_\Sigma T_2$, so $T \approx_\Sigma T'$,
b) Wenn $Ers(H_1, T_1, T_2, H_2)$ und $T_1 \approx_\Sigma T_2$, so $ag_\Sigma(H_1 \leftrightarrow H_2)$,
c) Wenn $Ers(H, H_1, H_2, H')$ und $ag_\Sigma(H_1 \leftrightarrow H_2)$, so $ag_\Sigma(H \leftrightarrow H')$.

Definition: *Semantische Äquivalenz*
$H_1 \approx H_2$ (bzw. $T_1 \approx T_2$), wenn $H_1 \approx_\Sigma H_2$ (bzw. $T_1 \approx_\Sigma T_2$) für jede Algebra Σ.
(Es gelten die entsprechenden Eigenschaften und Ersetzbarkeitstheoreme.)

2.3 Prädikatenlogisches Folgern

Sei $H \in \underline{Aus}_B$ Ausdruck, $X \subseteq \underline{Aus}_B$ Ausdrucksmenge und $\Sigma = (I, f)$ B-Algebra.
Definition: *Folgerungsbegriff*
a) H *folgt* aus X , wenn H allgemeingültig in jedem Modell von X,
d.h. jedes Modell von X ist auch Modell von H (in Zeichen: $X \models H$).
b) $Fl(X) = \{H | X \models H\}$ Menge aller Ausdrücke H, die aus X folgen (Folgerungsmenge).

Dafür gelten folgende Eigenschaften:
1) $Fl(\emptyset) = Ag$ Menge der in jeder B-Algebra Σ allgemeingültigen identitätsfreien Ausdrücke.
2) Fl ist abgeschlossen gegenüber Abtrennungsregel, vordere und hintere Generalisierung, vordere und hintere Partikularisierung, vollfreier Termeinsetzung und gebundener Umbenennung.
3) Fl hat Hülleneigenschaften.
($X \subseteq Fl(X)$, wenn $X_1 \subseteq X_2$, so $Fl(X_1) \subseteq Fl(X_2)$, $Fl(Fl(X)) \subseteq Fl(X)$).
4) Wenn $\Sigma \underline{Mod} X$, so $\Sigma \underline{Mod} Fl(X)$.
5) $Fl(X) = Fl(Gen(X))$,d.h. $X \models H$ gdw $X \models Gen(H)$, mit
$Gen(H) = \forall x_1 ... \forall x_n H'(x_1, ..., x_n)$ heißt *Generalisierte* von $H(x_1, ..., x_n)$, wenn H' durch gebundene Umbenennung aus H entsteht und $x_1, ..., x_n$ vollfrei in H'.

Satz:
1)Endlichkeitssatz (für identitätsfreie Ausdrücke):
a) Zu jeder Ausdrucksmenge $X \subseteq \underline{Aus}_B$ und jedem Ausdruck $H \in Fl(X)$ existiert eine endliche Teilmenge $X' \subseteq X$ mit $H \in Fl(X')$.

b) Wenn zu jeder <u>endlichen</u> Teilmenge $X' \subseteq X$ ein Modell Σ' existiert, dann existiert ein Σ mit $\Sigma \underline{Mod} X$.

2 a) Ableitungstheorem (für identitätsfreie Ausdrücke):
Wenn $(H_1 \to H_2) \in Fl(X)$, so $H_2 \in FL(X \cup \{H_1\})$.
2 b) Deduktionstheorem (für Aussagen H_1):
Wenn $H_2 \in FL(X \cup \{H_1\})$, so $(H_1 \to H_2) \in FL(X)$,
so $(Gen(H_1) \to H_2) \in FL(X)$.

3) Rückverlegungssatz (für korrekte freie Einsetzung bzw. korrekte gebundene Umbenennung):
Wenn $X \models H$, so
a) $X[a/T] \models H[a/T]$,
b) $X[F^n/T^n] \models H[F^n/T^n]$,
c) $X[A^m/G^m] \models H[A^m/G^m]$
für Aussagenmengen $X \subseteq \underline{Aus}_B$, Aussagen $H \in X$, $G^m \in \underline{Aus}_B$, $a, F^n, A^m \in B$, $T^n \in \underline{Term}_B$, $T^n = T(x_1, ..., x_n)$ und $G^m = G(x_1, ..., x_n)$.

<u>Bemerkung</u>:Gleichheitsrelation (Identität)
Häufig werden Kalküle mit Gleichheitsrelation betrachtet.
$=_\Sigma$ über Σ wird als Äquivalenzrelation auf Σ aufgefaßt, wofür die Axiome aus $Axi = \{\forall x : (x = x)\ , \forall xy : ((x = y) \to (y = x))\ , \forall xyz : (((x = y) \wedge (y = z)) \to (x = z))\}$ gelten.
$[\alpha]_\Sigma = \{\beta | (\alpha =_\Sigma \beta)\}$ sei Äquivalenzklasse zu $\alpha \in I$ und Σ^* Faktorstruktur zu Σ mit $\Sigma \models H$ gdw. $\Sigma^* \models H$ für alle $H \in \underline{Aus}_B$, $\Sigma \models_b H$ gdw $\Sigma \models_{b^*} H$, wo b^* Belegung mit Faktoren über Σ.
Σ heißt *normal*, wenn das Zeichen = durch die Identität interpretiert wird, d.h. $f(=) = \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in I\}$.
$X \models_n H$ wenn Σ normales Modell für X. Jedes normale Modell für X ist auch ein Modell für H.
<u>Eigenschaften</u>:
a) Wenn $X \models H$, so $X \models_n H$ (Wenn H aus X folgt, dann folgt H aus X auch normal.)
b) $X \cup Axi \models H$ gdw $X \models_n H$ (Kein Unterschied zur Normalidentität).
<u>Beispiel</u>:
$\Sigma = (I, f)$, $\epsilon \in I$ mit $f(e) = \epsilon$ (neutrales Element) , $f(\circ) = I^2 \to I$.
Σ Gruppe gdw $\Sigma \underline{Mod} X$,
mit $X = \{\forall xyz : ((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))\ , \forall x : (e \circ x = x)\ , \forall x \exists y : (y \circ x = e)\}$.

2.4 Ableitungsbegriff

Zur Entscheidung der Algemeingültigkeit von Ausdrücken steht in der Prädikatenlogik kein der Aussagenlogik entsprechendes Verfahren zur Verfügung, was bei Überprüfung der endlichen Belegungsmenge für die im Ausdruck auftretenden Aussagenvariablen in endlich vielen Schritten zur Lösung kommt. Die Gründe dafür liegen in der Struktur der der Interpretation der Ausdrücke zugrundeliegenden B-Algebren.
Aus gegebenen Ausdrücken $H \in \underline{Aus}_B$ bzw. Ausdrucksmengen $X \subseteq \underline{Aus}_B$ durch rein syntaktische Umformungen neue Ausdrücke zu gewinnen die Eigenschaften der Ausdrücke, von denen wir ausgehen, ererben.
Definition:
a) Der Ausdruck H heißt *ableitbar* aus der Ausdrucksmenge X (in Zeichen: $X \vdash H$) , wenn $H \in X$ oder durch endlichoftmalige Anwendung folgender Regeln gebildet werden kann (genauer induktiv über Stufe):
Abtrennungsregel:
Wenn $X \vdash H_1$ und $X \vdash (H_1 \to H_2)$, so $X \vdash H_2$,
Vordere Generalisierung:
Wenn $X \vdash (H_1(x) \to H_2)$ und x vollfrei in H_1, so $X \vdash (\forall x : H_1(x) \to H_2)$,
Hintere Partikularisierung:
Wenn $X \vdash (H_1 \to H_2(x))$ und x nicht in H_1, so $X \vdash (H_1 \to \forall x : H_2(x))$,
Hintere Generalisierung:
Wenn $X \vdash (H_1 \to H_2(x))$ und x vollfrei in H_2, so $X \vdash (H_1 \to \exists x : H_2(x))$,
Vordere Partikularisierung:
Wenn $X \vdash (H_1(x) \to H_2)$ und x nicht in H_2, so $X \vdash (\exists x : H_1(x) \to H_2)$,
Korrekte Termeinsetzung:
Wenn $X \vdash H(x)$ und x vollfrei in H und T zulässig für H, so $X \vdash H[x/T]$,
Korrekte gebundene Umbenennung:
Wenn $X \vdash H$ und H' durch korr.geb. Umbenenung aus H entsteht, so $X \vdash H'$.

b) Die *Ableitungsmenge* $Abl(X) = \{H | H \in \underline{Aus}_B \wedge X \vdash H\}$ von X bezeichnet die kleinste Menge von Ausdrücken, die alle Ausdrücke aus X enthält und abgeschlossen ist gegenüber Anwendung obiger Regeln.
Bemerkung:
$X \vdash H$ gdw. existiert eine endliche Folge von Ausdrücken $H_1, ..., H_n$ (Ableitungsfolge) mit:
1.) $H_i \in X$ oder entsteht aus Ausdrücken H_j für $j < i$ durch Anwendung einer Regel und 2.) $H_n \equiv H$.

Eigenschaften:
a) Hülleneigenschaften: $X \subseteq Abl(X)$, wenn $X \subseteq Y$, so $Abl(X) \subseteq Abl(Y)$, $Abl(Abl(X)) \subseteq Abl(X)$.
b) Endlichkeitssatz: Wenn $X \vdash H$, dann existiert eine endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $Y \vdash H$.

c) Ableitungstheorem: Wenn $X \vdash (H_1 \rightarrow H_2)$, so $X \cup \{H_1\} \vdash H_2$.
d) Deduktionstheorem:
Wenn $X \cup \{H_1\} \vdash H_2$ und H_1 Aussage, so $X \vdash (H_1 \rightarrow H_2)$.
e) Deduktionserblichkeit der Allgemeingültigkeit: Wenn $X \subseteq Ag_\Sigma$, so $Abl(X) \subseteq Ag_\Sigma$ für jede B-Algebra Σ.
f) $Abl(\emptyset) = \emptyset$ (Die leere Ausdrucksmenge ist Einselement).

Zur Charakterisierung der Allgemeingültigkeit wurde in der Aussagenlogik von Axiomensystemen ausgegangen, aus denen alle allgemeingültigen Ausdrücke abgeleitet werden konnten. In Übertragung auf die Prädikatenlogik bezeichnen wir durch Axa ein System von Ausdrücken, welches aus einem solchen aussagenlogischen Axiomsystem entsteht, wenn für alle Aussagenvariable simultan beliebige prädikatenlogische Ausdrücke eingesetzt werden. Das System ist dann nicht mehr endlich und wird als Axiomschema bezeichnet. Zur Einbeziehung der Gleichheit betrachten wir das System
$Axi = \{x = x, \quad (x = y \rightarrow y = x), \quad ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z),$
$(x = y \rightarrow (F^n(x_1, ...x..., x_n) = F^n(x_1, ...y..., x_n))),$
$(x = y \rightarrow (A^m x_1 ...x... x_m A^m x_1 ...y... x_m))\}.$

<u>Definition</u>: *Beweisbarkeit*
Sei $H \in \underline{Aus}_B$ und $X \subseteq \underline{Aus}_B$.
a) Ein Ausdruck H heißt *beweisbar* aus X (in Zeichen: $X \vdash_a H$ bzw $X \vdash_i H$) , wenn $Axa \cup X \vdash H$ für identitätsfreie Ausdrücke bzw. $Axa \cup Axi \cup X \vdash H$ für Ausdrücke mit Identität.
b) $Bew_a(X) = Abl(X \cup Axa)$ bzw. $Bew_i(X) = Abl(X \cup Axa \cup Axi)$ Menge der aus X beweisbaren Ausdrücke.

<u>Eigenschaften</u>:
1. Für Bew_a und Bew_i gelten Hülleneigenschaften, Endlichkeitssatz, Ableitungstheorem und Deduktionstheorem wie oben.
2. $Bew_a(X) \subseteq Bew_i(X)$ und $X \vdash_a H \rightarrow X \vdash_i H$.
3. Wenn $X \subseteq Ag_\Sigma$, so $Bew_a(X) \subseteq Ag_\Sigma$ (Vererbung der Allgemeingültigkeit).

<u>Definition</u>: *Widerspruchsfreiheit, Konsistenz*
a) Eine Ausdrucksmenge X heißt *syntaktisch widerspruchsfrei (konsistent)*, wenn $Bew_a(X) \neq \underline{Aus}_B$ (entsprechend für Ausdrücke mit Identität).
b) Eine Ausdrucksmenge X heißt *klassisch widerspruchsfrei (konsistent)*, wenn kein Ausdruck H mit $X \vdash_a H$ und $X \vdash_a {}^\sim H$ existiert (entsprechend für Ausdrücke mit Identität).

Insgesamt gelten folgende Aussagen:
<u>Satz</u>:
1. X ist syntaktisch widerspruchsfrei gdw. X klassisch widerspruchsfrei ist.
2. Für Aussagen H und $X \subseteq \underline{Aus}_B$ ist $Bew(X \cup \{H\}) = \underline{Aus}_B$ gdw. $X \vdash^\sim H$.
(Anwendung Deduktionstheorem und Abtrennungsregel zusammen mit 1.)

3. Wenn $X \vdash H$, so $X \models H$ (Korrektheitssatz).
4. $X \models H$ gdw. $X \vdash H$ (Vollständigkeitssatz).
5. X ist syntaktisch widerspruchsfrei gdw. ein Modell von X existiert.
6. Wenn jede endliche Teilmenge von X semantisch widerspruchsfrei ist, dann ist auch X semantisch widerspruchsfrei.
7. Wenn jede endliche Teilmenge von X ein Modell hat, dann hat auch X ein Modell (Kompaktheitssatz).
8. Die Menge Ag der allgemeingültigen prädikatenlogischen Ausdrücke ist rekursiv aufzählbar.
9. (Hauptsatz der Prädikatenlogik 1.Stufe) Für jede Menge X identitätsfreier Ausdrücke aus $\underline{Aus}_B$ gilt: $Bew_a(X) = Fl(X)$.
(Bemerkung: Jeder aus $Axa \cup Axi \cup X$ ableitbare identitätsfreie Ausdruck ist aus $Axa \cup X$ ableitbar. Erweiterungen der Signatur führen nicht zur Erhöhung der Beweisbarkeitskraft der ursprünglichen Ausdrucksmittel.)

Des weiteren gelten folgende Axiomatisierungstheoreme:
<u>Satz</u>:
1) $Bew_a(\emptyset) = Abl(Axa) \subseteq Ag_\Sigma$, $\qquad Bew_i(\emptyset) = Abl(Axa \cup Axi) \subseteq Ag$.
2) Für jede Menge X $\subseteq \underline{Aus}_B$ identitätsfreier Ausdrücke existiert eine Obermenge X' von X mit $Abl(X') = Fl(X)$ ($X' \setminus X$ Axiomensystem für $Fl(X)$).

<u>Definition</u>: *Syntaktische Äquivalenz*
Für (identitätsfreie) Ausdrücke H_i und Ausdrucksmengen X heißt
a) H_1 *syntaktisch äquivalent* bzgl. X mit H_2 (in Zeichen: $H_1 \simeq_X H_2$), wenn $X \vdash (H_1 \leftrightarrow H_2)$,
b) H_1 *syntaktisch äquivalent* mit H_2 (in Zeichen: $H_1 \simeq H_2$), wenn $H_1 \simeq_\emptyset H_2$ (d.h., bzgl. jeder Menge X äquivalent).

Bemerkung: $\simeq_X$ und $\simeq$ sind Äquivalenzrelationen und es gelten dafür das Ersetzbarkeitstheorem sowie das Dualitätstheorem für identitätsfreie Ausdrücke
($\forall$ dual zu $\exists$ u.u.).

2.5 Normalformen

Normalformen sind Reduktionstypen zur Charakterisierung von Ausdrucksklassen mit speziellem syntaktischen Aufbau. Die Transformation (Reduktion) von Ausdrücken in nachfolgende Normalformen sind konstruktiv. Zunächst betrachten wir einen Reduktionstyp, bei dem alle Quantoren im Präfix stehen.
Definition:*Pränexe Normalform PNF*
Ein Ausdruck $H \in \underline{Aus}_B$ heißt in *pränexer* Normalform (PNF), wenn $H \equiv PH'$ und $P \equiv Q_1x_1...Q_nx_n$ (Präfix) mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, x_i paarweise verschiedene Variablen aus B und H' quantorenfreier Ausdruck (Kern) aus $\underline{Aus}_B$.

Satz:
Zu jedem (identitätsfreien) Ausdruck H $\in \underline{Aus}_B$ existiert eine (identitätsfreie) pränexe Normalform N_H mit $H \approx N_H$ und $H \simeq N_H$. (Die Normalform ist nicht eindeutig bestimmt.)
Konstruktion:
1. Elimination von $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ (aussagenlogisch).
2. Herstellung der negationstechnischen Form ($\sim$ nur noch vor prädikativen Ausdrücken).
3. Trennung der Wirkungsbereiche der Quantoren (durch gebundene Umbenennung von Variablen).
4. Quantorenverschiebung nach außen mit Regeln $Qx(H_1(x)\Diamond H_2) \leftrightarrow QxH_1(x)\Diamond H_2$ bzw. $Qx(H_1\Diamond H_2(x)) \leftrightarrow H_1\Diamond QxH_2(x)$ für x vollfrei in H_1 bzw H_2, x nicht in H_2 bzw. H_1, $Q = \forall$ bzw. $\exists$ und $\Diamond = \wedge$ bzw. $\vee$.
Auf diese Weise ist N_H effektiv herstellbar und es existiert eine berechenbare Funktion $f_p : \underline{Aus}_B \rightarrow \underline{Aus}_B$ mit $f_p(H) \simeq N_H$ (in pränexer Normalform äquivalent zu N_H).
Beispiel:
$H \equiv \quad \forall x(\exists y B_1^2xy \rightarrow B_2^1x) \rightarrow \forall x B_1^2xy \quad \simeq$
1) $\quad {\sim}\forall x({\sim}\exists y B_1^2xy \vee B_2^1x) \vee \forall x B_1^2xy \quad \simeq$
2) $\quad \exists x(\exists y B_1^2xy \wedge{\sim} B_2^1x) \vee \forall x B_1^2xy \quad \simeq$
3) $\quad \exists x(\exists u B_1^2xu \wedge{\sim} B_2^1x) \vee \forall v B_1^2vy \quad \simeq$
4) $\quad \exists x\exists u\forall v(B_1^2xu \wedge{\sim} B_2^1x \vee B_1^2vy)$

Weitere Reduktion zur *Skolemschen Normalform*, bei der im Präfix alle Generalisatoren vor allen Partikularisatoren stehen oder umgekehrt bzw. in *strenger* Form nur eine Sorte von Quantoren auftreten.

Definition:*Skolemsche Normalform*
a) Der Ausdruck $H \equiv PH'$ heißt in *allgemeingültigkeitstheoretischer* Skolemscher Normalform (aSNF), wenn $P \equiv \exists\overline{x}\forall\overline{y}$ mit $\overline{x} = x_1...x_m$ und $\overline{y} = y_1...y_n$, paarweise verschiedenen Variablen x_i, y_j und H' quantorenfreier Ausdruck (Kern).
b) Der Ausdruck $H \equiv PH'$ heißt in *erfüllbarkeitstheoretischer* Skolemscher Normalform (eSNF), wenn $P \equiv \forall\overline{x}\exists\overline{y}$ mit $\overline{x} = x_1...x_m$ und $\overline{y} = y_1...y_n$, paarweise verschiedenen Variablen x_i, y_j und H' quantorenfreier Ausdruck (Kern).

Satz:
Zu jedem (identitätsfreien) Ausdruck $H \in \underline{Aus}_B$ gibt es eine erweiterte Basis (Signatur) B^* und Ausdrücke $H_a^* \in \underline{Aus}_{B^*}$ in aSNF, $H_e^* \in \underline{Aus}_{B^*}$ in eSNF mit:
1) $ag_\Sigma H$ gdw. $ag_\Sigma H_a^*$ und $ef_\Sigma H$ gdw. $ef_\Sigma H_e^*$.
(H, H_a^* allgemeingültigkeitsgleich und H, H_e^* erfüllbarkeitsgleich für jeden nichtleeren Individuenbereich.)
2) $X \vdash_{(i)} H$ gdw $X \vdash_{(i)} H_a^*$ und $X \vdash_{(i)}^{\sim} H$ gdw $X \vdash_{(i)}^{\sim} H_e^*$.
(H, H_a^* beweisbarkeitsgleich und H, H_e^* widerlegbarkeitsgleich für jede Menge $X \subseteq \underline{Aus}_B$ (identitätsfreier) Ausdrücke.)

Bemerkung: aSNF und eSNF sind nicht eindeutig bestimmt und nicht äquivalent zum Ausgangsausdruck.

Konstruktion eSNF:
Ausgangspunkt sei die pränexe Normalform $H \equiv \forall\overline{x}_1\exists\overline{y}_1...\forall\overline{x}_n\exists\overline{y}_n H'(\overline{x}_1,\overline{y}_1...\overline{x}_n,\overline{y}_n)$ mit Tupeln $\overline{x}_i$, $\overline{y}_j$ paarweise verschiedener Variablen. Mit nachfolgenden Schritten führen wir eine Reduktion von n nach (n-1) durch, so daß nach (n-1)-facher Anwendung eine eSNF entsteht. (Analog dazu ist die aSNF zu konstruieren.)
1. Schritt: Erweiterung der Signatur B um das Attributensymbol A_1^2 (hier Beschränkung auf 1-Tupel) zu B_1.
Bilde: $G \equiv \forall x_1\exists y_1 A_1^2 x_1 y_1 \wedge \forall x_1 \forall y_1 (A_1^2 x_1 y_1 \to \forall\overline{x}_2\exists\overline{y}_2 P' H')$
mit P' Präfix ab $\overline{x}_3$, $\overline{y}_3$ (d.h. $P \equiv \forall x_1\exists y_1\forall\overline{x}_2\exists\overline{y}_2 P'$).
Man kann nun zeigen: $ef_\Sigma H$ gdw. $ef_\Sigma G$ für jeden nichtleeren Individuenbereich und $X \vdash_{(i)}^{\sim} H$ gdw $X \vdash_{(i)}^{\sim} G$ für jede Menge $X \subseteq \underline{Aus}_B$.
Durch äquivalente Umformungen erhält man weiter:
$G \simeq \forall x_1'\exists y_1' A_1^2 x_1' y_1' \wedge \forall x_1\forall y_1\forall\overline{x}_2\exists\overline{y}_2 P'(A_1^2 x_1 y_1 \to H')$
$\simeq \forall x_1'\forall x_1\forall y_1\forall\overline{x}_2\exists y_1'\exists\overline{y}_2 P'(A_1^2 x_1' y_1' \wedge (A_1^2 x_1 y_1 \to H'))$ (durch gebundene Umbenennung und Vorziehen der Quantoren mit $Qx(H_1 \to H_2(x)) \leftrightarrow (H_1 \to QxH_2(x))$ bzw. $Qx(H_2(x)\diamondsuit H_1) \leftrightarrow (QxH_2(x)\diamondsuit H_1)$ wo $Q \equiv \forall, \exists$ und $\diamondsuit \equiv \wedge, \vee$).
Damit erreichen wir eine Reduktion der Paare $\forall\overline{x}\exists\overline{y}$ um 1.
i-ter Schritt: Erweiterung der Signatur um die Attributensymbole $A_i^{s_i}$ mit $s_i = \Sigma_{1\leq j\leq i} 2^{i-j}(|\overline{x}_j| + |\overline{y}_j|)$ (bei 1-Tupel $s_2 = 6$).
Nach (n-1)-ten Schritt entsteht eSNF.

Beispiel: $\exists x\exists u\forall v((B_1^2 xu \wedge^{\sim} B_2^1 x) \vee B_1^2 vy) \quad \Longrightarrow$
$\exists x\exists u A_1^2 xu \wedge \forall x\forall u(A_1^2 xu \to \forall v(B_1^2 xu \wedge^{\sim} B_2^1 x \vee B_1^2 vy)) \quad \approx$
$\exists x'\exists u' A_1^2 x'u' \wedge \forall x\forall u\forall v(A_1^2 xu \to (B_1^2 xu \wedge^{\sim} B_2^1 x \vee B_1^2 vy)) \quad \approx$
$\forall x\forall u\forall v\exists x'\exists u'(A_1^2 x'u' \wedge (A_1^2 xu \to (B_1^2 xu \wedge^{\sim} B_2^1 x \vee B_1^2 vy))) \quad \approx \quad$ eSNF.

Weitere Einschränkung des Präfix, bei der nur noch eine Sorte von Quantoren zugelassen ist, führt zur Reduktion auf *strenge*-eSNF ($P \equiv \forall\overline{x}$) bzw. *strenge*-aSNF ($P \equiv \exists\overline{x}$).

Satz:
Zu jedem (identitätsfreien) Ausdruck $H \in \underline{Aus}_B$ gibt es eine erweiterte Basis (Signatur) B^* und Ausdrücke $H_a^* \in \underline{Aus}_{B^*}$ in strenger-aSNF, $H_e^* \in \underline{Aus}_{B^*}$ in strenger-eSNF mit den im vorigen Satz genannten Eigenschaften 1) und 2).

Konstruktion einer strengen-eSNF (strenge-aSNF analog):
Ausgangspunkt sei jetzt eine eSNF $H = \forall\overline{x}\exists\overline{y}H'(\overline{x},\overline{y})$ mit $|\overline{x}| = m$ und $|\overline{y}| = n$.
$m = 0$:
Erweiterung von B durch Individuensymbole (Konstanten) $b_1, ..., b_n = \overline{b}$ führt zu $ef_\Sigma\exists\overline{y}H'(\overline{y})$ gdw. $ef_\Sigma H'(\overline{b})$ (erfüllbarkeitsgleich) und
$X \vdash^{\sim} \exists\overline{y}H'(\overline{y})$ gdw $X \vdash^{\sim} H'(\overline{b})$ (widerlegbarkeitsgleich).
$m > 0$:
Erweiterung von B durch neue m-stellige Funktionssymbole $F_1^m, ..., F_n^m$.
Zu zeigen: $H_e^* \equiv \forall\overline{x}H'(\overline{x}, F_1^m(\overline{x}), ..., F_n^m(\overline{x}))$.
Bemerkung: Beide Schritte können gekoppelt werden.
$\exists y_0\forall x_1\exists y_1\forall x_2\exists y_2 H(\overline{x},\overline{y})$
1. Schritt: $\forall x_1\exists y_1\forall x_2\exists y_2 H(\overline{x}, F_1^0, y_1, y_2)$
2.Schritt: $\forall x_1\forall x_2\exists y_2 H(\overline{x}, F_1^0, F_2^1(x_1), y_2)$
3.Schritt: $\forall x_1\forall x_2 H(\overline{x}, F_1^0, F_2^1(x_1), F_3^2(x_1, x_2))$
bei geeigneter Interpretation der F_i^m in Erweiterung von Σ.

Beispiele:
1.) Als strenge-eSNF vom vorgehenden Beispiel entsteht:
$\forall x\forall u\forall v(A_1^2F_1^3(x,u,v)F_2^3(x,u,v) \wedge (A_1^2xu \rightarrow (B_1^2xu \wedge^{\sim} B_2^1x \vee B_1^2vy)))$.
2.) Aus $^{\sim}\exists x(A_1^2xz \vee \forall yA_2^2xF_1^1(y)) \vee \forall yA_1^2F_2^2(z,y)z$ mit gebundener Umbenennung:
$\approx \quad ^{\sim}\exists x(A_1^2xz \vee \forall yA_2^2xF_1^1(y)) \vee \forall y'A_1^2F_2^2(z,y')z$
Nach Transformation $H(x) \rightarrow \exists xH(x)$ wo x frei in H :
$\approx \quad \exists z(^{\sim}\exists x(A_1^2xz \vee \forall yA_2^2xF_1^1(y)) \vee \forall y'A_1^2F_2^2(z,y')z)$
Nach Bildung pränexer Normalform:
$\approx \quad \exists z\forall x\exists y\forall y'(^{\sim}(A_1^2xz \vee^{\sim} A_2^2xF_1^1(y)) \vee A_1^2F_2^2(z,y')z)$
Nach Bildung Skolem-NF mit F_3^0, F_4^1 als neue Funktionssymbole entsteht:
$\forall x\forall y'(^{\sim}(A_1^2xF_3^0 \wedge^{\sim} A_2^2xF_1^1(F_4^1(x))) \vee A_1^2F_2^2(F_3^0,y')F_3^0)$
Transformation in aussagenlogische Normalform:
$\approx \quad \forall x\forall y'(^{\sim}(A_1^2xF_3^0 \vee A_1^2F_2^2(F_3^0,y')F_3^0) \wedge^{\sim} A_2^2xF_1^1(F_4^1(x))) \vee A_1^2F_2^2(F_3^0,y')F_3^0))$
Als Klausenform mit generalisierten Variablen erhält man:
$\{^{\sim}(A_1^2xF_3^0; A_1^2F_2^2(F_3^0,y')F_3^0\}$ und $\{^{\sim}A_2^2xF_1^1(F_4^1(x)); A_1^2F_2^2(F_3^0,y')F_3^0\}$.

Andere Normalformen
a) Kontrapränexe Normalform:
Quantoren nach Innen transformiert, Verkürzung der Wirkungsbereiche.
b) Beseitigung von Gleichheitsoperator:
Jeder Ausdruck kann allgemeingültigkeitsgleich und beweisbarkeitsgleich in einen identitätsfreien Ausdruck transformiert werden (Berücksichtigung von Axi).
c) Operationsfreie Normalform:

Jeder Ausdruck kann allgemeingültigkeitsgleich und beweisbarkeitsgleich in einen Ausdruck ohne Operationszeichen transformiert werden. (n-stellige Operationen durch (n+1)-stellige Attribute ausdrücken.)
d) Beschränkung auf Klausenmenge nach Generalisierung der Variablen (Verwendung in der logischen Programmierung.)

2.6 Unentscheidbarkeit

Bei der Suche nach Modellen von Ausdrücken oder Ausdrucksmengen ist die Vielfalt der B-Algebren $\Sigma = (I, f)$ von Bedeutung. Wir schränken deshalb den Individuenbereich ein und betrachten zunächst das sogenannte Herbrand-Universum.
Definition:*Herbrand-Universum*
Sei H ein geschlossener Ausdruck in strenger-eSNF $\forall\overline{x}H^*(\overline{x})$. Wir bilden
$U(H)_0 =_{def} \{F^0|F^0 \in H\}$ oder $U(H)_0 =_{def} \{a\}$ wenn $a \in I$ und kein F^0 in H,
$U(H)_{n+1} =_{def} \{F^m(t_1, ..., t_m)|F^m \in H \ , 1 \leq m \ , t_i \in U(H)_n\}$.
Die Menge $U(H) =_{def} \bigcup_n U(H)_n$ heißt das *Herbrand-Universum* von H.

Beispiel:
$H \equiv \forall xyzA_1^3xf(y)g(x, z) \hookrightarrow U(H) = \{a; f(a), g(a, a); f(f(a)), f(g(a, a)), g(a, f(a)), ...\}$;
$H \equiv \forall xyA_2^3cf(x)h(y, b) \hookrightarrow U(H) = \{c, b; f(c), f(b), h(c, b), h(b, b), h(b, c), h(c, c), ...\}$;

Wir benutzen diesen Bereich zum Aufbau der semantischen Algebra Σ_H als Einschränkung von Σ.
Definition: *Herbrand-Struktur*, *Herbrand-Modell*
a) $\Sigma_H = (U(H), f_H)$ heißt *Herbrand-Struktur* (Basis) bzgl. H,
wenn $f_H(F^n)(t_1, ..., t_n) = F^n(t_1, ..., t_n)$, F^n in H und $t_i \in U(H)$ variablenfreie Terme. (Die mit den Funktionssymbolen aus B bildbaren Terme werden durch sich selbst interpretiert.)
b) Σ_H heißt *Herbrand-Modell* von H, wenn $\Sigma_H \underline{Mod} H$, d.h. $ag_{\Sigma_H} H$.

Satz:
Ein Ausdruck H in strenger-eSNF ist erfüllbar gdw. H ein Herbrand-Modell besitzt. (Entsprechend für Ausdrucksmengen X.)

Beweis:
Wenn $\Sigma = (I, f)$ Modell von H, dann existiert eine Herbrand-Struktur
$\Sigma_H = (U(H), f_H)$ mit $f_H(F^m)$ wie bisher und $(t_1, ..., t_n) \in f_H(P^n)$ gdw.
$(Wert_\Sigma(t_1), ..., Wert_\Sigma(t_n)) \in f(P^n)$.
Hierfür gilt: $\Sigma \models G \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_H \models G$ für jede Aussage G in strenger-eSNF mit gleichen Funktions- und Attributsymbolen wie in H. (Induktiv über die Anzahl der Generatoren in H)
Also erhalten wir $\Sigma_H \underline{Mod} H$ mit $Wert_{\Sigma_H}(H, b_{x,t}) = H[x/t]$ mit $b_{x,t}(x) = f(t)$.
(Die Umkehrung ist trivial.)

Folgerung: (Löwenheim-Skolem)
Jeder erfüllbare prädikatenlogische Ausdruck besitzt ein abzählbares Modell.
(Beschränkung auf strenge-eSNF, abzählbare Individuenbereiche.)

In Beziehung zur Aussagenlogik spielen bei der Erfüllbarkeit bzw. Gültigkeit prädikatenlogischer Ausdrücke Instanzen von Ausdrücken eine Rolle.

Definition: *Herbrand-Erweiterung, Instanzen*
Sei $H \equiv \forall\overline{x}H^*(\overline{x})$ eine Aussage in strenger-eSNF.
Die Termmenge $Inst(H) = \{H^*[x_i//t_i] | t_i \in U(H)\}$ heißt *Instanzenmenge* von H.
Entsprechend für Ausdrucksmengen X: $Inst(X) = \bigcup_{H \in X} Inst(H)$.
(Für Variable werden Terme t_i aus U (H) auf alle mögliche Weisen substituiert.)

Beispiel:
$H = \forall xyz A_1^3 x f(y) g(x, z) \Longrightarrow Inst(H) \ni A_1^3 a f(a) g(a, a), A_1^3 f(a) f(a) g(f(a), a), ...$
(variablenfreie aussagenlogische Ausdrücke).

Satz: (Gödel, Herbrand, Skolem)
Sei H eine Aussage in strenger-eSNF.
Der Ausdruck H ist erfüllbar gdw. Inst (H) aussagenlogisch erfüllbar.
(Zu zeigen ist: Inst (H) erfüllbar gdw. H ein Herbrand-Modell besitzt.)
Approximation prädikatenlogischer Ausdrücke durch (unendlich viele) aussagenlogische Ausdrücke.

Folgerung: (Reduktion auf aussagenlogische Erfüllbarkeit)
Sei H eine Aussage in strenger-eSNF.
H ist unerfüllbar gdw. eine unerfüllbare endliche Teilmenge von Inst (H) existiert.
(H ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Inst (H) erfüllbar ist.)

Satz: Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik
Sei H Ausdruck und X Ausdrucksmenge.
a) X erfüllbar gdw. X endlich erfüllbar.
b) $X \models H$ gdw. eine endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $Y \models H$ existiert.

Beweis: a) nach Endlichkeitssatz bezogen auf Instanzenmengen.
b) analog Aussagenlogik $X \models H$ gdw. $X \cup \{{\sim}H\}$ nicht erfüllbar.

Satz:
Die Unerfüllbarkeit und Gültigkeit von Ausdrücken der Prädikatenlogik ist semientscheidbar, (d.h. existiert Verfahren, welches stoppt, wenn Antwort positiv.)

Beweis:
Sei $Inst(H) = \{H_1, H_2, H_3, ...\}$ eine Aufzählung der Instanzen von H. Man bilde die Ausdrücke $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} H_i$. Wenn H unerfüllbar, dann exisitiert ein kleinstes n, wo diese Konjunktion unerfüllbar ist, was aussagenlogisch getestet werden kann.
Wenn H erfüllbar ist , dann bricht das Verfahren nicht ab.
Gleichzeitig haben wir damit einen Gültigkeitstest für ${\sim}H$.

Frage:
Kann man für die obigen Eigenschaften auch ein Entscheidungsverfahren finden? Man beachte: Es gibt erfüllbare Ausdrücke, die nur unendliche Modelle besitzen.

Satz: (Church)
Sei Σ eine beliebige B-Algebra.
Die Menge Ag_Σ der bzgl. Σ allgemeingültigen Ausdrücke ist nicht entscheidbar.

Beweis:
Durch Reduktion aus dem Postschen Korrespondenz-Problem PCP über 0,1-Wörtern
Zu PCP : $\{(x_i, y_i)|1 \leq i \leq k\}$ konstruiere Ausdruck H_{PCP}, der in einer passenden B-Algebra Σ genau dann allgemeingültig ist, wenn das PCP eine Lösung hat.
Konstruktion:
$H_{PCP} = (\bigwedge_{1\leq i\leq k} AF_{x_i}(a)F_{y_i}(a) \wedge \forall xy(Axy \rightarrow \bigwedge_{1\leq i\leq k} AF_{x_i}(x)F_{y_i}(y))) \rightarrow \exists zAzz$
mit $I = \{0,1\}^*$, $f(a) = e$ (leeres Wort), $f(F_0)(p) = p0$ (Verkettung mit 0), $f(F_1)(p) = p1$ (Verkettung mit 1) und $(p,q) \in f(A)$ gdw. $p, q \neq e$ und es existieren $1 \leq i_1, ..., i_t \leq k$ mit $p = x_{i_1}...x_{i_t} \in \{0,1\}^+$ und $q = y_{i_1}...y_{i_t} \in \{0,1\}^+$ und $F_{qx}(p) = F_x(F_q(p))$ für $x = 0,1$ und $p, q \in \{0,1\}^*$.
Zu zeigen:
a) $ag_\Sigma H_{PCP} \quad \Longrightarrow \quad$ PCP hat Lösung $z \quad \Longleftarrow \Sigma \models \exists zAzz$.
b) PCP hat Lösung $i_1, ..., i_n$ mit $x_{i_1}...x_{i_n} = y_{i_1}...y_{i_n} \Longrightarrow \Sigma \models H_{PCP}$ für Σ passend zu H.
$\phi : \{0,1\}^* \rightarrow I$ mit $\phi(e) = e = f(a)$, $\phi(p0) = f(F_0)(\phi(p)) = \phi(p)0$,
$\phi(p1) = f(F_1)(\phi(p)) = \phi(p)1$, d.h. $\phi(q) = f(F_q(a))$.
$\Sigma \models \bigwedge_{1\leq i\leq k} AF_{x_i}(a)F_{y_i}(a) \quad \Longrightarrow \quad (\phi(x_i), \phi(y_i)) \in f(A)$
$\Sigma \models \forall xy(Axy \rightarrow \bigwedge_{1\leq i\leq k} AF_{x_i}(x)F_{y_i}(y))$
$\Longrightarrow \quad (\phi(x), \phi(y)) \in f(A) \rightarrow (\phi(xx_i), \phi(yy_i)) \in f(A)$
$\Longrightarrow$ (induktiv) $(\phi(x_{i_1}...x_{i_n}), \phi(y_{i_1}...y_{i_n})) \in f(A)$,
d.h. $(z,z) \in f(A)$ für $z = \phi(x_{i_1}...x_{i_n}) = \phi(y_{i_1}...y_{i_n})$.
$\Longrightarrow \Sigma \models \exists zAzz \quad \Longrightarrow \quad \Sigma \models H_{PCP}$.

Folgerung:
Für beliebige B-Algebren ist die Menge Ef_Σ nicht entscheidbar.
($ag_\Sigma H$ gdw. $ef_\Sigma {}^\sim H$ nicht, d.h. wenn Ef_Σ entscheidbar dann auch Ag_Σ entscheidbar.)
Bemerkung:
Entscheidbarkeit liegt vor, wenn Attributensymbole einstellig (monadische Logik) und keine echten Funktionssymbole (nur Konstanten) auftreten. Jedes Modell für H besitzt bei n einstelligen Attributensymbolen 2^n Äquivalenzklassen.

2.7 Elementare Theorien

Unter einer elementaren Theorie verstehen wir eine Gesamtheit von Aussagen, die Eigenschaften von Wirklichkeitsbereichen widerspiegeln und im Rahmen der Prädikatenlogik der ersten Stufe beschrieben sind.
Eine solche *Theorie* $Th(B, \Sigma, \underline{Aus}_B, S, Abl)$ besteht aus einer Semiotischen Basis B mit Zeichen F^t für t-stellige Funktionen, A^s für s-stellige Attribute, Indivduenvariable x , aussagenlogische Funktoren (Junktoren), Quantoren und technische Zeichen, eine Sprache $\underline{Aus}_B \subseteq B^*$ als Menge von Wörtern (Ausdrücken) über B, der semantischen Basis $\Sigma = (I, f)$ mit dem Individuenbereich I und der Interpretationsfunktion f, einer Satzmenge S als Teilmenge von $\underline{Aus}_B$ und einem Ableitungsoperator Abl.
Die inhaltliche Bedeutung der Zeichen und Ausdrücke wird durch die Interpretationsfunktion f wie folgt vermittelt:
$f(F^t) = I^t \to I$, $f(A^s) \subseteq I^s$, $f(\circ) = \Phi_\circ$ für Junktoren $\circ$ standardmäßig , $f(\forall x) = Om_x$, $f(\exists_x) = Ex_x$ und in Erweiterung auf Ausdrücke $f_b(H) = Wert(H, b)$ wie früher beschrieben.
Der Ableitungsoperator bezogen auf Ausdrucksmengen $Abl(X) \subseteq \underline{Aus}_B$ beschreibt eine inhaltliche bzw. syntaktische Relation $\models$ und $\vdash$ für Ausdrücke H bzw. Ausdrucksmengen X.
Die Satzmenge kann *semantisch* als $S = \{H|\Sigma \models H \in \underline{Aus}_B\} = Ag_\Sigma$ Menge der allgemeingültigen Ausdrücke oder *syntaktisch* als $S = \{H|X \vdash H \in \underline{Aus}_B\}$ Menge der aus einer als Axiomensystem vorgegebenen entscheidbaren Menge X ableitbaren Ausdrücke angegeben werden.
In beiden Fällen ist die Satzmenge S deduktiv abgeschlossen, d.h. $Abl(S) \subseteq S$.
Die Theorie Th wird semantisch (bzw. syntaktisch) *widerspruchsfrei* genannt, wenn $S \subseteq Ag_\Sigma$ (bzw. $Abl(S) \neq \underline{Aus}_B$).
Die Theorie Th wird semantisch (bzw. syntaktisch) *vollständig* genannt, wenn $Ag_\Sigma \subseteq Abl(S)$ (bzw. $Abl(S \cup \{H\}) = \underline{Aus}_B$ für $H \notin S$).
Diese Eigenschaften werden häufig auch auf die Satzmenge S selbst bezogen.
Die Theorie Th heißt (rekursiv) *axiomatisierbar*, wenn eine (rekursiv) entscheidbare Menge X von Ausdrücken mit $S = Abl(X)$ (Axiomensystem) existiert.
Die Satzmengen axiomatisierbarer Theorien sind (rekursiv) aufzählbar.

Beispiele:
a) Elementare Arithmetik der natürlichen Zahlen
Semiotische Basis $B = (\{0\}, \{=\}, \{Succ, +, *, ...\})$ mit einer Konstanten 0 (Null), dem Attributzeichen = , den Funktoren $Succ, +, *, ...$ und einer semantischen Basis $\Sigma = (Nz, f)$ wo f standardmäßig definiert ist.
Bildung der Ausdrucksmenge $\underline{Aus}_B$ über B wie in der Arithmetik üblich.
Semantisch definierte Satzmenge $S_1 = Ag_\Sigma$, Theorie $T_1 = (B, \Sigma, \underline{Aus}_B, S_1, \models)$.
Syntaktisch definierte Satzmenge $S_2 = AblX$, Theorie $T_2 = (B, \Sigma, \underline{Aus}_B, S_2, \vdash)$.

Axiomensystem X der Peano-Arithmetik:
$Succ(x) \neq 0$, $(Succ(x) = Succy) \rightarrow x = y$, $x + 0 = x$, $x * 0 = 0$,
$x + Succ(y) = Suc(x + y)$, $x * Succ(y) = (x * y) + x$
und das Axiomschema: $(H(x/\emptyset) \wedge \forall x(H(x) \rightarrow H(x/Succ(x))) \rightarrow \forall x H(x)$ mit $H(x) \in \underline{Aus}_B$, x vollfrei in H .
Hierfür gilt: Σ Modell von X und $X \subseteq Ag_\Sigma$.
Behauptung:(1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)
$S_2 \subset S_1$, S_1 nicht axiomatisierbar (Ag_Σ nicht entscheidbar).

b) Reelle Arithmetik
Semiotische Basis $B = (\{0,1\}, \{\leq\}, \{+, *, ...\})$, Semantische Basis $\Sigma = (\Re, f)$ mit $\Re$ Menge der reellen Zahlen und f Standardinterpretation.
Semantisch definierte Satzmenge $S_1 = Ag_\Sigma$ axiomatisierbar (Tarski, 1951) durch Axiomensystem $X = X_G \cup X_R \cup X_K \cup X_S$ mit
Gruppenaxiome:
$X_G = \{\forall x((0 + x) = x), \forall x \exists y((x + y) = 0), \forall xy((x + y) = (y + x)),$
$\forall xyz(((x + y) + z) = (x + (y + z)))\}.$
Ringaxiome:
$X_R = \{\forall xyz((x * y) * z = x * (y * z)), \forall xyz(x * (y + z) = (x * y) + (x * z)),$
$\forall xyz((y + z) * x = (y * x) + (z * x))\}.$
Körperaxiome:
$X_K = \{\forall x(x \leq x), (0 \neq 1), \forall xyz((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow (x \leq z))), \forall x((x * 1) = x),$
$\forall xy((x \leq y) \vee (y \leq x)), \forall xy((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y), \forall xy((x * y) = (y * x)),$
$\forall xyz(x \leq y \rightarrow ((x + z) \leq (y + z))), \forall x((x \neq 0) \rightarrow \exists y((x * y) = 1)),$
$\forall xyz((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow ((x * z) \leq (y * z)))\}.$
Schnittaxiomschema (Dedekind):
$X_S = \{\forall x(H_1(x) \vee H_2(x)) \wedge \forall xy((H_1(x) \wedge H_2(y)) \rightarrow (x < y)) \wedge \exists x H_1(x) \wedge \exists x H_2(x) \rightarrow \exists z \forall xy((H_1(x) \wedge H_2(y) \rightarrow ((x \leq z) \wedge (z \leq y)))$ wo $H_i(x) \in \underline{Aus}_B$ und x vollfrei in H_i. (Es existiert genau eine relle Zahl z, die die Zahlbereiche von x bzw. y , die $H_1(x)$ bzw. $H_2(y)$ erfüllen, trennt.)

c) Einfache Mengenlehre
Für die einfache Mengen haben wir früher das Axiomsystem ZF von Zermelo-Fränkel mit Mengenbildungsaxiom, Extensionalitätsaxiom, Auswahlaxiom, usw. kennengelernt. Die nach ZF gültigen Sätze der Mengenlehre bilden aber selbst keine Menge, so daß Abl (ZF) nicht vollständig ist.
Es existierenAusdrücke H, für die weder $ZF \models H$ noch $ZF \models^{\sim} H$ zutrifft (Kontinuumshypothese).
Die Vollständigkeit der Mengentheorie kann auch durch Hinzunahme neuer Axiome nicht erreicht werden.
d) Erweiterung der Logik zur Logik schwacher zweiter Stufe:
Nach Erweiterung der zugrunde liegenden Logik um Variable $\underline{y}$ für endliche Individuenmengen und eine zweistellige Elementbeziehung $\in$ kann das Axiom

$\forall x \exists \underline{y}(x \in \underline{y} \wedge \forall z(z+1 \in \underline{y} \to z \in \underline{y}))$ (Verbot überabzählbarer Zahlen) eingeführt werden, wonach die elementare Arithemetik axiomatisierbar wird, aber die Ableitungsmenge nicht mehr rekursiv aufzählbar ist.
Das Induktionsaxiom kann in der Logik zweiter Stufe durch
$\forall \underline{y}(0 \in \underline{y} \wedge \forall x(x \in \underline{y} \to (x+1) \in \underline{y}) \to \forall z z \in \underline{y})$ beschrieben werden.
Damit sind endliche Folgen von Individuen zur Erfassung u.a. von Programmeigenschaften definierbar. Kompaktheit oder rekursive Aufzählbarkeit der entsprechenden Ableitungsmengen ist natürlich dennoch nicht erreichbar.

2.8 Logik-Programme

Mengen X von prädikatenlogischen Ausdrücken (Axiome) können zur Spezifikation von Wissen und Annahmen über Wirklichkeitsbereichen herangezogen werden. Es soll herausgefunden werden, ob ein vorgegebener Ausdruck (Anfrage) aus der Menge X folgt, d.h. $X \models H$?
Wie bei dem Semi-entscheidbarkeitsverfahren bilden wir Instanzen von $X_1 = X \cup \{{}^\sim H\}$ und verknüpfen diese Instanzen-Terme nach einer vorgegebenen Ordnung konjunktiv bis Unerfüllbarkeit festgestellt wird. Dann folgt daraus $X \models H$.
Die Effizienz des Verfahrens wird erhöht, wenn man die logischen Ausdrücke auf sogenannte *Hornklausen* beschränkt:
$X : \forall(\bigwedge_{1 \leq i} A_i^{s_i} T_{i1} ... T_{is_i} \longrightarrow A^s T_1 ... T_s)$ (alle Variablen generalisiert) und
$H : \exists(\bigwedge_{1 \leq i} B_i^{t_i} T_{i1} ... T_{it_i})$ (alle Variablen partikularisiert).
Bei Konstruktion der Instanzen entstehen Terme, die als Ergebnisse des Logik-Programms angesehen werden können.
Logik-Programme werden als Menge von *Programmklausen*
$A^s T_1 ... T_s \quad \vee \quad \bigvee_{0 \leq i} {}^\sim A_i^{s_i} T_{i1} ... T_{is_i}$ (i = 0 Fakt) und die Anfragen als *Zielklausen*
$\bigvee_{0 \leq i} {}^\sim B_i^{t_i} T_{i1} ... T_{it_i}$ (i = 0 leere Klausel) beschrieben.
Umsetzung in Programmiersprachen wie PROLOG mit Anwendung u.a. bei Wissensrepräsentation, Expertensystemen, Mensch-Maschine-Kommunikation.

Literaturverzeichnis

[1] Asser,G.: *Einführung in die mathematische Logik*; Teubner, Leipzig, 1982

[2] Clocksin, W.F.; Mellish,C.S.: *Programming in Prolog*; Springer, Berlin, 1994

[3] Ebbinghaus, H.D.u.a.: *Einführung in die mathematische Logik*; BI, Mannheim, 1992

[4] Goltz,H.J.; Herre,H.: *Grundlagen der logischen Programmierung*; Akademie, Berlin, 1990

[5] Schöning, U.: *Logik für Informatiker*; Spektrum, Heidelberg, 1995