Petri – Netze II

Sommersemester 2004

Prof. Dr. S. Gerber
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Gliederung

0. Einführung

1. Gefärbte Petri-Netze

2. Prädikaten/Transitions-Netze

3. Zeitbewertete Netze

4. Hierarchische Netze

5. Erweiterte Petri-Netze

Literatur

Baumgarten, B.: Petri Netze, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990

Desel, J.: Algorithmen und Werkzeuge für Petri Netze, Uni Karlsruhe,1994

Jensen, .: Coloured Petri Nets, Springer, Berlin, 1994

Oberweis, A.: Modellierung und Ausführung von Workflows mit Petri Netzen, Teubner, Stuttgart, 1996

Reisig, W.: Petri Nets, Springer, Berlin, 1985

Starke, P.H.: Analyse von Petri-Netz-Modellen, Teubner, Stuttgart, 1990

0 Einführung

Petri-Netze als Beschreibungsmittel zur Spezifikation und Analyse von Kommunikation, Synchronisation und Ressourcenvergabe in verteilten und nebenläufigen Systemen sowie der von diesen erzeugten Prozessen.

<u>Vorteile:</u> Mathematische Fundierung
Eindeutige Semantik
Graphische Darstellung
Einheitliche Beschreibung
Leicht verständliche Form
Ausdrucksstärke
Realitätsnahe Modellierung
Halbautomatische Softwareentwicklung
Tools zur Spezifikation, Darstellung und Simulation

<u>Nachteile:</u> Schnell steigende Komplexität
Eigenschaftsanalyse nur im Kleinen bzw. bei speziellen Klassen möglich
Unterschiedliche Erweiterungen
Viele Eigenschaften unentscheidbar

1. Gefärbte Petri-Netze

Verwendung verschiedener Sorten (Farben) von Platzmarken und Schaltmodi von Transitionen.

Platzfarben:

Zuordnung von endlichen Mengen (Multimengen)
von Marken verschiedener Sorten (Farben).

Schaltmodi von Transitionen:

Zuordnung von endlichen Mengen von Schaltmodi (Schaltarten).
Jedem Schaltmodus wird eine Menge von Platzfarben zugeordnet.
Verwendung farbiger Kantengewichte.

Identische Teilnetze werden zusammengefasst (Faltung), dadurch Vereinfachung der Struktur und Beschreibung.

Zur strukturellen Analyse von gefärbten Netzen werden diese entfaltet.

Anwendung: Spezifikationswerkzeug

Erweiterung: Marken als Strukturen (Algebren, Netze)

2. Prädikaten/Transitions-Netze

Stellen werden als *Prädikate* (Objektmengen) aufgefaßt.

Marken besitzen Struktur und werden durch *Relationen* (Sprachen) beschrieben.

Transitionen werden *Operationen auf Relationen* zugeordnet.

Kantenbeschriftung: Konstruktionsbeschreibung einer Funktion (Relation)

m(p) aktuelle Markierung von Platz p: Prädikat p trifft auf genau die Elemente aus m(p) zu.

Aktivierung: wenn Eingangsplätze (Prädikate) erfüllt (Tupel vorhanden) und
wenn Ausgangsplätze nicht erfüllt (Tupel nicht vorhanden).

P/T-Netze schwächer als gefärbte Netze.

Netzschemata mit Basis-Algebren als freie Variable
Stellen: Schemata (Algebren)
Transitionen: Operationen über Schemata
Kanten: Filter
Marken: Relationen über Schemata
Aktivierung : Instantiierung

Erweiterung: Nebenläufigkeit von Transitionen

3. Zeitbewertete Netze

Plätze: Verweildauer (Festkleben) von Marken

Transitionen: Schaltdauer, Schaltintervall

Typ I: Marken an Vorplätzen vor Schalten entfernen bzw. verdecken
(erfordert zusätzliche Sicherungsmaßnahmen).

Typ II: Marken an Vorplätzen bleiben während der Verzögerungsdauer erhalten
(konkurrierende Transitionen möglich).

Timer Netze: Zuordnung fester Zeitintervalle für Stellen und Transitionen mit zentraler Uhr.

Erweiterung: Zeitintervalle zufallsverteilt.

4. Hierarchische Netze

Systeme in verschiedenen Abtraktionsebenen modellieren.

Verfeinerung und Vergröberung von Netzknoten.

Vaterknoten = Vergröberung (Abstraktion) eines Unternetzes

Umgebung = Kanten zu anderen Teilnetzen

Grenzknoten = Knoten aus Unternetz mit Kanten zu anderen Teilnetzen

Rand des Unternetzes = Gesamtheit der Grenzknoten

Ränder des Unternetzes sind Transitionen (bzw. Plätze),
wenn der Vaterknoten Transition (bzw. Platz) ist.

Verfeinerung von Transitionen: Marken in oberster Ebene nicht vollständig darstellbar.

Verfeinerung von Plätzen: Markierung in allen Ebenen darstellbar.

Verallgemeinerung:
Zeitbewertung - bei Plätzen sinnvoll (Verweildauer im Unternetz)
- bei Transitionen nur für unterste Ebene sinnvoll.

5. Erweiterte Petri-Netze

Einführung von Verbotskanten (erreicht Turing-Mächtigkeit),

Einführung von Abräumkanten,

Einführung markengesteuerter Kantengewichte (Unterschiedliche Durchlaßmöglichkeit),

Einführung stochastischen Verhaltens.

Nicht-Standard Netze für spezielle Zwecke,
u.U. mit Verlust von Eigenschaften (Lebendigkeit, Sicherheit, …).

1. Gefärbte Petri-Netze

Einführung verschiedener Sorten von Marken in Plätzen und von Schaltmodi für Transitionen.

Plätze: Zuordnung von endlichen Mengen von Sorten (Platzfarben).

Transitionen: Zuordnung von endlichen Mengen von Schaltmodi (Transitionsfarben).
Jedem Schaltmodus wird eine Menge von Platzfarben zugeordnet.

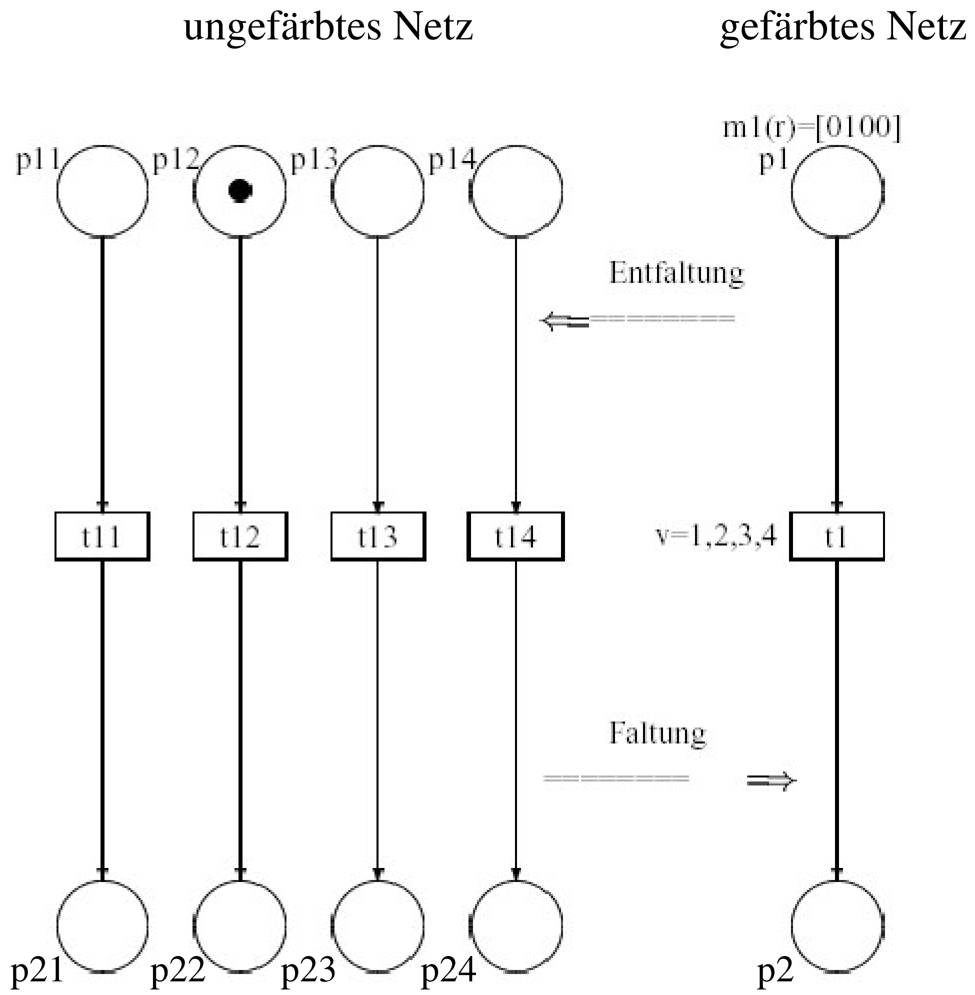
Kanten: Zuordnung von Multimengen über Platzfarben als Kantengewichte, die die Anzahl der über diese Kante transportierten Marken verschiedener Farben beschreiben.

Marken: Zuordnung von Attributen als Sorten (Markenfarben).

Faltung: Zusammenfassung mehrerer gleichartiger (strukturgleicher, isomorpher) Netze zu einem gefärbten Netz. Zerlegung der Transitions- und Platzmenge in disjunkte nichtleere Klassen, die jeweils einer Transition bzw. einem Platz des gefärbten Netzes entsprechen. Strukturinformationen gehen u.U. verloren.

Entfaltung: Herstellung eines (ungefärbten) Petri-Netzes aus einem gefärbten Netz durch Vervielfachung von Transitionen und Plätzen entsprechend der unterschiedlichen Farben. Eine Faltung des so erzeugten Petri-Netz ist isomorph zu dem gefärbten Netz. Die Entfaltung ist wichtig für die strukturelle Analyse von gefärbten Netzen.

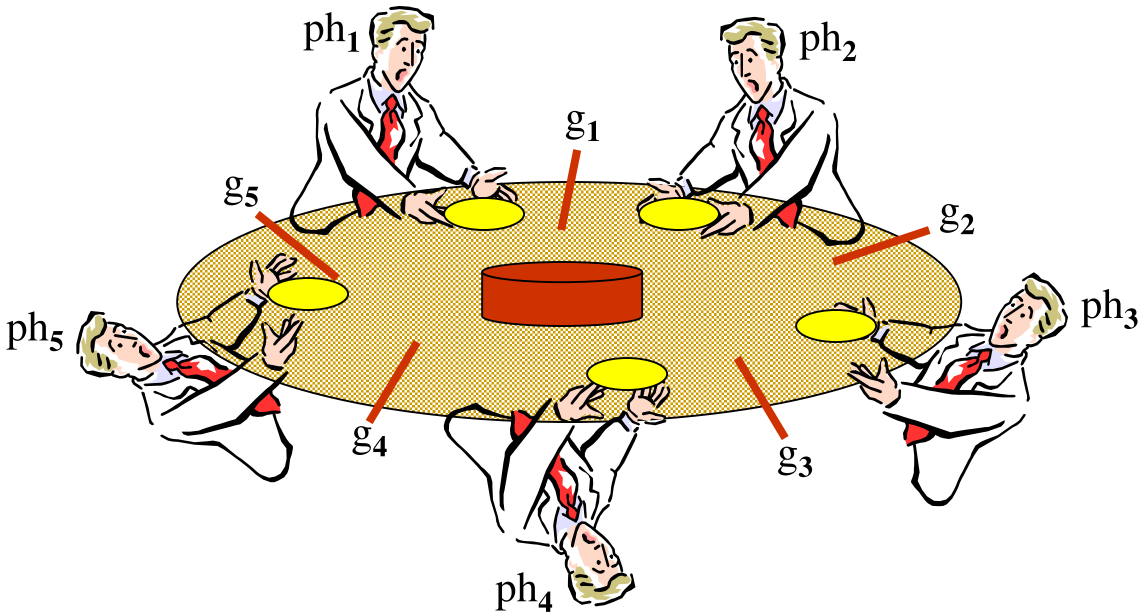
Beispiel:



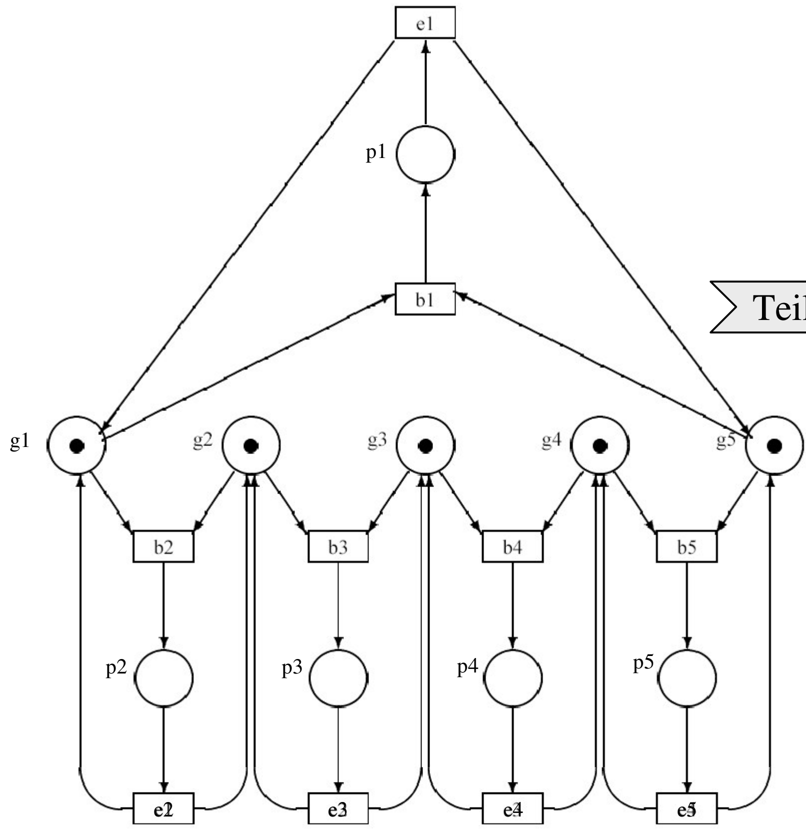
Klassen: {p11, p12, p13, p14} → p1
{p21, p22, p23, p24} → p2
{t11, t12, t13, t14} → t1

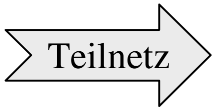
Plätze und Transitionen werden mit vier Farben gefärbt.

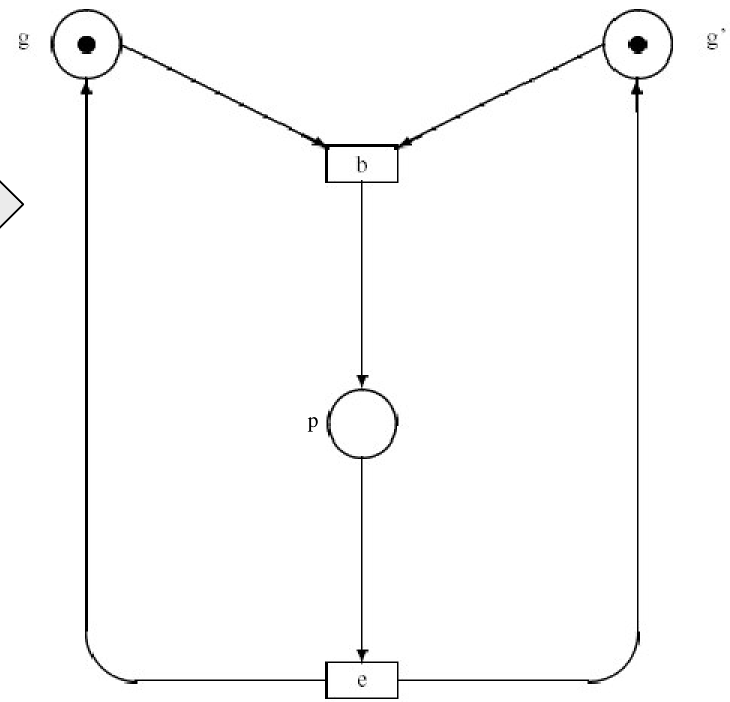
Philosophen-Problem



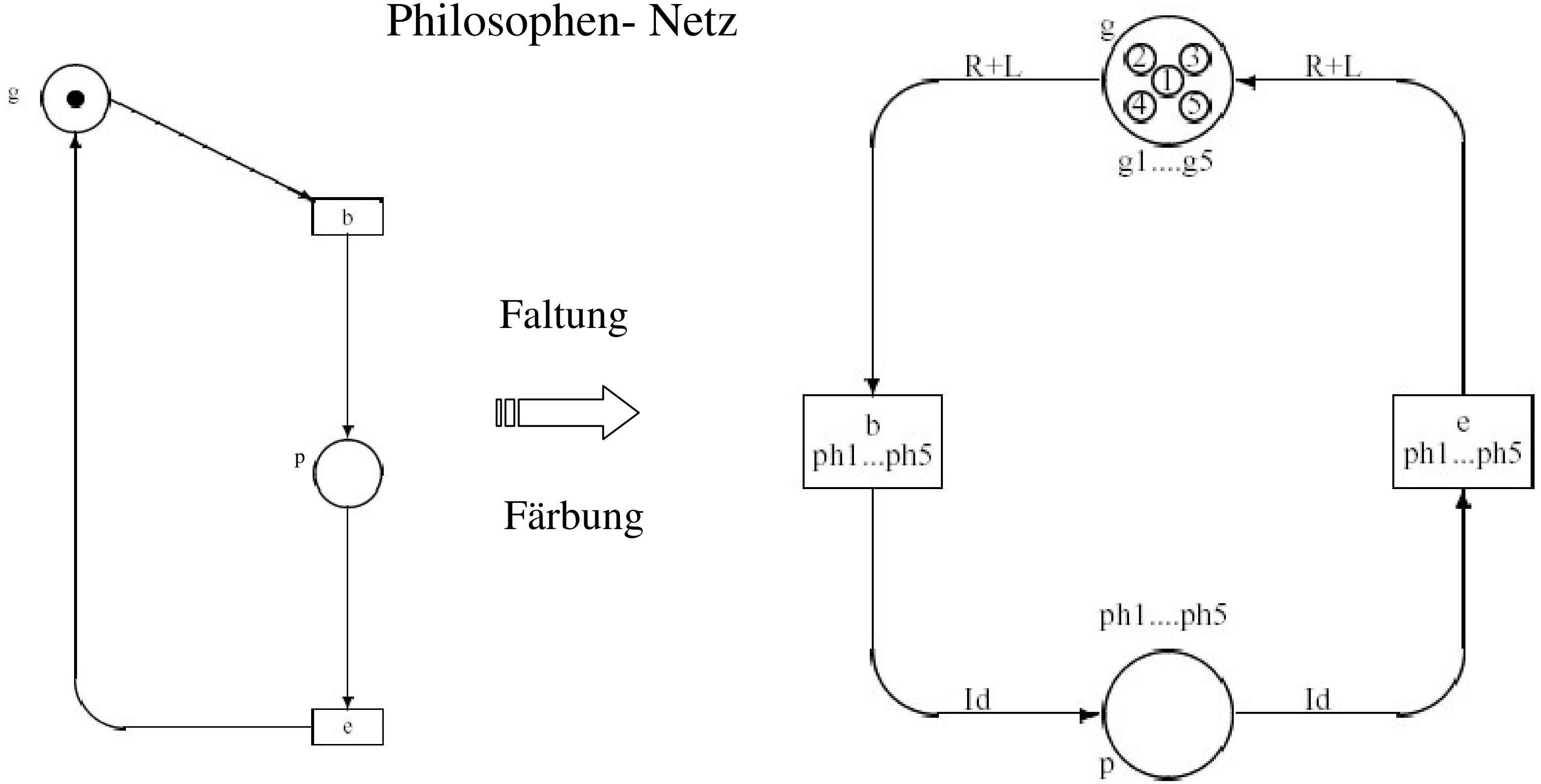
Philosophen-Netz







Philosophen- Netz



Die Markierung von g bzw. p gibt die aktuell verfügbaren Stäbchen bzw. essenden Philosophen an. Die Plätze g und p besitzen damit fünf Farben. Von jeder Farbe gibt es jeweils eine Marke, die die Verfügbarkeit des jeweiligen Stäbchens bzw. die Aktivität des entsprechenden Philosophen anzeigt. Die Transitionen b (essen) und e (diskutieren) besitzen für jeden Philosophen einen Schaltmodus. Der Philosoph pi kann essen (Transition b), wenn die Stäbchen $g_{(i-1) \bmod 5}$ und $g_{i \bmod 5}$ als Marken auf dem Platz g liegen. Mit dem Kantengewicht R+L (rechtes und linkes Stäbchen entfernen) entnimmt er die entsprechenden Marken aus Platz g und legt über die Kante mit dem Gewicht Id (Identität) die Marke pi auf den Platz p. Nach dem Schalten der Transition e im Modus des Philosophen pi werden die Stäbchen über die Kante mit dem Gewicht R+L auf den Platz g zurückgelegt.

Definition: Multimenge
Eine Multimenge über einer Menge X ist eine Abbildung $m: X \rightarrow Nz$ (Menge der nat.Z.).
$m(x)$ gibt an, wie oft $x \in X$ in der Multimenge m enthalten ist.
Durch M(X) bezeichnen wir die Menge aller Multimengen über X.

Bemerkung: Zur Notation der Multimengen verwendet man formale Summen

$$m = \sum_{x \in X} m(x) * x \quad \text{(Addition nicht direkt ausführbar).}$$

Für endliche X benutzen wir wie im Beispiel die übliche Vektorschreibweise mit natürlichen Zahlen als Komponenten und einer vorgegebenen Ordnung der Menge X.

Definition: Gefärbtes Netz
$GN = [P, T, F, C, V, m_0]$ heißt gefärbtes Netz, wenn

1. [P, T, F] ein Netz,
2. C eine Abbildung (auch Colorierung genannt), die jedem Knoten $x \in P \cup T$ eine endliche nicht leere Menge C(x) von Farben zuordnet (C(p) bzw. C(t) bezeichnet die Menge der dem Platz p bzw. der Transition t zugeordneten Farben.),
3. V eine Abbildung, die jeder Kante (Bogen) $f \in F$ zwischen dem Platz p und der Transition t eine Funktion V(f) von C(t) in die Menge aller Multimengen über C(p) zuordnet, und
4. m_0 eine Abbildung (Anfangsmarkierung) ist, die jedem Platz p eine Multimenge $m_0(p)$ über C(p) zuordnet.

Beispiel: Philosophen-Netz

(1) $P = \{g, p\}$, $T = \{b, e\}$, $F = \{(g, b), (b, p), (p, e), (e, g)\}$

(2) $C(g) = \{g_1, ..., g_5\}$ (Stäbchen als Platzfarben von g),
$C(p) = C(b) = C(e) = \{ph_1, ..., ph_5\}$ (Philosophen als Platzfarben von p bzw. Schaltmodi der Transitionen b und e)

(3) $V(g, b) = V(e, g) = R{+}L$, $V(b, p) = V(p, e) = Id$ mit
$R{+}L\ (ph_i) = 1^*\ g_1 + 1^*\ g_5$ falls $i = 1$ (Multimengen von Stäbchen)
$R{+}L\ (ph_i) = 1^*\ g_{i-1} + 1^*\ g_i$ falls $2 \le i \le 5$
$Id\ (ph_i) = 1^*\ ph_i$ (Multimengen von Philosophen)

(4) $m_0\ (g) = 1^*\ g_1 + 1^*\ g_2 + 1^*\ g_3 + 1^*\ g_4 + 1^*\ g_5$ (alle Stäbchen vorhanden)
$m_0\ (p) = 0$ (kein Philosoph ißt).

Das gefärbte Netz entsteht durch Faltung des ursprünglichen Philosophen-Netzes, wobei die Plätze g_i bzw. p_i zum Platz g bzw. p , die Transitionen b_i bzw. e_i zur Transition b bzw. e verschmelzen. Dementsprechend werden die Kanten des ungefärbten Netzes zusammengefasst und mit den angegebenen Multimengen gewichtet. Die Anfangsmarkierung m_0 beschreibt die im Bild dargestellte Ausgangssituation.
Bei der Faltung zum gefärbten Netz gehen keine Informationen des ursprünglichen Netzes verloren, kann aber mit Verlust an Übersichtlichkeit und Modelltransparenz verbunden sein.

Verhalten von gefärbten Netzen $GN = (P, T, F, C, V, m_0)$:

1. Eine Funktion m, die jedem p aus P eine Multimenge über C(p) zuordnet, heißt Markierung von P bzw. GN. $m(p) \in M(C(p))$.

2. Eine Transition t aus T hat bei der Markierung m Konzession zur Farbe d aus C(t) (d-Konzession bei m), wenn $V(p, t)[d] \le m(p)[d]$ für alle Plätze p aus ${}^\bullet t$.

3. Die Transition t aus T kann bei m in der Farbe d schalten, wenn t bei m zur Farbe d Konzession hat. Aus m entsteht bei [t,d] die Folgemarkierung m‘ mit

$$\boxed{m'(p) =} \begin{cases} m(p) - V(p,t) + V(t,p) & \text{falls } p \in {}^\bullet t \text{ und } p \in t^\bullet \\ m(p) - V(p,t) & \text{falls } p \in {}^\bullet t \text{ und } p \notin t^\bullet \\ m(p) \qquad\qquad + V(t,p) & \text{falls } p \notin {}^\bullet t \text{ und } p \in t^\bullet \\ m(p) & \text{sonst} \end{cases}$$

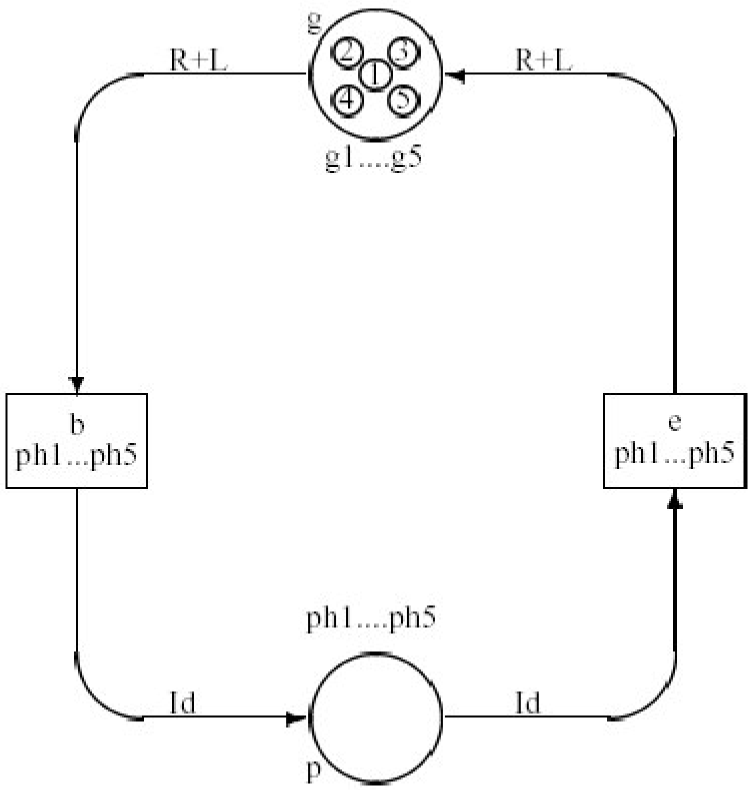
bzw. $m'(p) = m(p) + \Delta t$ mit $\Delta t = (p \in t^\bullet)V(t, p) - (p \in {}^\bullet t)V(p, t)$.
Bei endlicher Kapazität $K(p)[d]$ des Platzes $p \in t^\bullet$ in der Farbe d ist $m(p)[d] + V(t, p)[d] - V(p, t)[d] \le K(p)[d]$ zu fordern.

Beim Übergang von einem ungefärbten Petri-Netz zu einem gefärbten Netz entspricht das Schalten einer Transition im ursprünglichen Netz dem Schalten der zugeordneten Transition in der entsprechenden Farbe der Faltung.

<u>Beispiel</u>: Philosophen-Netz

Bei m_0 mit $m_0(g) = 1^* g_1 + 1^* g_2 + 1^* g_3 + 1^* g_4 + 1^* g_5 = (1,1,1,1,1)$ und $m_0(p) = 0 = (0,0,0,0,0)$ hat die Transition b in jeder Farbe g_i Konzession.

Wenn b bei m_0 in der Farbe (Schaltmodus) ph_1 schaltet, dann entsteht die Folgemarkierung $m_1(g) = (0,1,1,1,0)$, $m_1(p) = (1,0,0,0,0)$, d.h., aus dem Platz g werden die beiden dem Philosophen ph_1 benachbarten Stäbchen (Marken der Farben g_1 und g_5) entfernt und dem Platz p eine Marke der Farbe ph_1 zugefügt.



Bei m_1 hat die Transition b jetzt nur noch in den Farben ph_3 und ph_4 Konzession. Erst nach Schalten der Transition e im Modus ph_1 (Philosoph diskutiert) werden die beiden Marken der Farben g_1 und g_5 auf Platz g zurückgelegt (Stäbchen wieder auf dem Tisch) und b kann in den Farben ph_2 und/oder ph_5 schalten. Die Transition b hat gleichzeitig in den Farben $\{ph_1, ph_3\},\{ph_1, ph_4\},\{ph_2, ph_4\},\{ph_2, ph_5\},\{ph_3, ph_5\}$ Konzession. Nachdem b in beiden Farben geschaltet hat, liegt auf g nur noch eine Marke einer Farbe, d.h., es liegt nur noch ein Stäbchen auf dem Tisch. Solange beide Philosophen essen, müssen die anderen diskutieren. Bösartige Absprachen dieser beiden können dazu führen, dass die restlichen Philosophen verhungern (b kann in den entsprechenden Farben nicht schalten).

Globales Verhalten:

Folgemarkierung bei Schaltfolge $q = [t_1,d_1]\ [t_2,d_2]\ \dots\ [t_n,d_n]$ mit $d_i \in C(t_i)$

m' Folgemarkierung von m bei e gdw. m = m'
m' Folgemarkierung von m bei q gdw. $\exists$ m'' (m' Folgemarkierung von m'' bei [t,d]
$\wedge$ m'' Folgemarkierung von m)

Die Markierung m' heißt von der Markierung m aus erreichbar (m-erreichbar) gdw.
es existiert eine Schaltfolge q mit m' Folgemarkierung von m bei q .

Lebendigkeit in gefärbten Netzen:

a) Die Transition t heißt im Schaltmodus d m-lebendig gdw.
$\forall$m' $\exists$m'' : (m' ist m-erreichbar $\rightarrow$ m'' ist m'-erreichbar $\wedge$ t hat d-Konzession bei m'') .

b) Die Transition t heißt schwach m-lebendig gdw. $\exists d \in C(t)$: t ist in d m-lebendig.

c) Die Transition t heißt m-lebendig gdw. $\forall d \in C(t)$: t ist in d m-lebendig.

d) Die Transition t heißt kollektiv m-lebendig gdw.
$\forall$m' $\exists$d $\exists$m'' : (m' ist m-erreichbar $\wedge$ $d \in C(t)$ $\wedge$ m'' ist m'-erreichbar
$\rightarrow$ t hat d-Konzession bei m'').

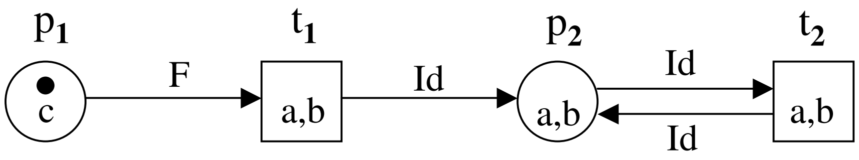
Eigenschaften:

1. Wenn t (schwach)-lebendig bei m, dann ist t auch (kollektiv) schwach-lebendig bei m.

2. Wenn es eine bei m_0 kollektiv lebendige Transition gibt, dann ist das gefärbte Netz verklemmungsfrei (keine tote Markierung erreichbar).

Die umgekehrten Eigenschaften gelten nicht.

Beispiel:



$F(a) = F(b) = 1 * c$, $Id(a) = 1 * a$, $Id(b) = 1 * b$

$m_0\,(p_1) = 1 * c$, $m_0\,(p_2) = 0$

Bei der Anfangsmarkierung m_0 kann die Transition t_1 genau einmal in der Farbe a oder b schalten. Dabei wird die Marke vom Platz p_1 abgezogen und eine Marke in der jeweiligen Farbe auf Platz p_2 abgelegt. Die Transition t_2 ist kollektiv lebendig bei m_0, da bei jeder erreichbaren Markierung eine ihrer Farben nicht tot ist.

Die Transition t_2 ist aber bei m_0 nur schwach lebendig, da sie in der Farbe a (bzw. b) tot ist, wenn die Transition t_1 in der Farbe b (bzw. a) geschaltet hat.

Die Umkehrung der Eigenschaft 2) gilt nicht, da bei trivialer Transitionsfärbung (jede Transition hat genau eine Farbe) die kollektive Lebendigkeit mit der schwachen Lebendigkeit übereinstimmt, und damit jedes verklemmungsfreie Netz eine lebendige Transition besitzen müßte.

Wie am Beispiel des Philosophen-Netz gezeigt, können strukturgleiche Teile eines Netzes zusammengefasst (übereinander gelegt, gefaltet) werden, wodurch ein gefärbtes Netz entsteht. Dabei ist anzugeben, welche Plätze und welche Transitionen zusammengefasst werden sollen. Dies kann durch Zerlegungen der Transitions- und Platzmenge in disjunkte nichtleere Klassen geschehen, die dann jeweils einer Transition bzw. einem Platz des gefärbten Netzes entsprechen. Bei diesem als Faltung bezeichneten Vorgang gehen u.U. Strukturinformationen verloren.

Definition: Faltung

$N = [P, T, F, V, m_0]$ sei ein Petri-Netz, $\pi = \{q_1, ..., q_k\}$ eine Zerlegung von P und $\tau = \{u_1, ..., u_n\}$ eine Zerlegung von T.

Das gefärbte Netz $GN(\pi, \tau) = [P', T', F', C', V', m'_0]$ mit
den (gefärbten) Plätzen $P' = \{p'_1, ..., p'_k\}$, den (gefärbten) Transitionen $T' = \{t'_1, ..., t'_n\}$,
den Platzfarben $C(p'_i) = p_i$ $(1 \leq i \leq k)$, den Transitionsschaltmodi $C(t'_j) = t_j$ $(1 \leq j \leq n)$,
der Kantenmenge $F' = \{(p',t') \mid (C'(p') \times C'(t')) \cap F \neq \emptyset\} \cup \{(t',p') \mid (C'(t') \times C'(p')) \cap F \neq \emptyset\}$,
den Kantengewichten $V'(p',t')[t] = \Sigma_{p \in C'(p')} t^-(p) * p$ bzw. $V'(t',p')[t] = \Sigma_{p \in C'(p')} t^+(p) * p$
und der Anfangsmarkierung $m'_0(p') = \Sigma_{p \in C'(p')} m_0(p) * p$ für $t \in C'(t')$, $p' \in P'$ und $t' \in T'$
heißt **Faltung** von N.

(Die Plätze bzw. Transitionen von N sind die Platzfarben bzw. Transitionsschaltmodi von $GN(\pi, \tau)$. Ein Platz von $GN(\pi, \tau)$ ist mit einer Transition genau dann verbunden, wenn eine seiner Farben (Plätze) im Petri-Netz N mit einem Schaltmodus(Transition) dieser Transition verbunden ist.)

Bemerkung: Zu jedem Zerlegungspaar (π, τ) gehört genau eine Faltung von N zu einem gefärbten Netz $GN(\pi, \tau)$.

Bei der Faltung eines Petrinetzes sind zwei Extremfälle möglich.

Fall a: Die Klassen der Zerlegungen π und τ sind Einermengen, d.h., jeder Knoten von GN hat nur eine Farbe und GN ist isomorph zu N.

Fall b: Die Zerlegungen π und τ besitzen nur eine Klasse, d.h., das gefärbte Netz GN hat nur einen Platz und eine Transition, also praktisch keine Struktur mehr.

Durch das Falten von Netzen können die entsprechenden Graphen beliebig verkleinert werden, was aber im allgemeinen mit einem Verlust an Übersichtlichkeit und Modelltransparenz verbunden ist .

Beim Falten werden Struktureigenschaften des ursprünglichen Netzes u.U. in der Beschriftung des gefärbten Netzes codiert. Um Aussagen über diese codierten Eigenschaften wieder zu gewinnen, wird das Netz entfärbt, also eine Umkehrung des Faltens durchgeführt. Dabei wird einem gefärbten Netz ein normales (ungefärbtes) Petri-Netz so zugeordnet, dass eine der möglichen Faltungen des Petri-Netzes zum ursprünglich gefärbten Netz isomorph ist.
Diese Operation nennt man Entfaltung oder Entfärbung.

<u>Definition</u>: Entfaltung

$GN = [P, T, F, C, V, m_0]$ sei ein gefärbtes Netz.

Das Petri-Netz $GN^* = [P^*, T^*, F^*, V^*, m_0^*]$ mit
der Platzmenge $P^* = \{(p, c) \mid p \in P \wedge c \in C(p)\}$,
der Transitionsmenge $T^* = \{(t, d) \mid t \in T \wedge d \in C(t)\}$, der Kantenmenge
$F^* = \{[(p,c),(t,d)] \mid (p,t) \in F \wedge V(p,t)[d](c) > 0\} \cup \{[(t,d),(p,c)] \mid (t,p) \in F \wedge V(t,p)[d](c) > 0\}$,
den Kantengewichten $V^*([(p,c),(t,d)]) = V(p,t)[d](c)$, $V^*([(t,d),(p,c)]) = V(t,p)[d](c)$ und
der Anfangsmarkierung $m_0^*(p,c) = m_0(p)(c)$ für $p \in P$, $c \in C(p)$, $t \in T$ und $d \in C(t)$
heißt **Entfaltung** von GN.

<u>Eigenschaften</u>:

1. Eine Transition t hat in der Farbe d bei der Markierung m im gefärbten Netz GN genau dann Konzession, wenn die Transition [t, d] in der Entfaltung GN* von GN bei der zugeordneten Markierung m* Konzession hat.

2. Ist N ein Petri-Netz und sind π bzw. τ Zerlegungen der Platz- (bzw. Transitions-) menge von N, dann ist die Entfaltung $GN(\pi, \tau)^*$ des gefärbten Netzes $GN(\pi, \tau)$ von N isomorph zu N.

3. Ist $GN = [P, T, F, C, V, m_0]$ ein gefärbtes Netz und GN* seine Entfaltung, dann ist die Faltung $GN^* (\pi, \tau)$ mit $\pi = \{ p \times C(p) \mid p \in P)$, $\tau = \{ t \times C(t) \mid t \in T)$ isomorph zu GN.

4.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, shift right, "\text{falten}"'] & \text{isomorph} & GN(\pi, \tau)^* \arrow[d, shift right, "\text{falten}"'] \\ GN(\pi, \tau) \arrow[u, shift right, "\text{entfalten}"'] \arrow[rr, leftrightarrow] & & GN(\pi, \tau) \arrow[u, shift right, "\text{entfalten}"'] \end{tikzcd}$$

GN hat die Eigenschaft E gdw. GN* die Eigenschaft E hat.

Analyse von gefärbten Netzen:
- Entfalten des Netzes und Anwendung der Verfahren für normale Netze (Ausnutzen von Symmetrien bei Färbung)
- Übertragung der Verfahren auf gefärbte Netze ohne Entfaltung (nur bedingt möglich, teilweise hohe Komplexität, offene Probleme)

2. Prädikaten-Transitions-Netze

Bei Prädikat/Transitions-Netzen werden nicht wie bei gefärbten Netzen nur Marken verschiedener Sorten sondern verschiedener Strukturen verwendet. Diese werden durch *Relationen* (Sprachen oder allgemeiner Algebren) beschrieben. Stellen werden als *Prädikate* (Objektmengen) aufgefaßt. Transitionen werden *Operationen auf Relationen* zugeordnet. Die Kanten werden durch Kon -struktionsbeschreibungen von Funktionen (Relationen) beschriftet. Dazu muß ein Formalismus zur Verfügung gestellt werden, mit dem die Konstruktion der verwendeten Marken beschreibbar ist. Wir verwenden dazu Termsprachen mit eindeutig definierter algebraischer und sprachlicher Basis sowie eine dazu passende Interpretation.

Algebraische Basis

Sei $\Sigma = (S, \Phi)$ eine Signatur mit der nichtleeren (endlichen) Sortenmenge S und der Familie $\Phi = \{O^{(i)}_{\mathbf{w,s}} \mid i \in I\}$, wo I ein (endlicher) Indexbereich bezeichnet. Das i-te Operationszeichen $O^{(i)}_{\mathbf{w,s}}$ mit $w = s_{\mathbf{1}} \dots s_{\mathbf{n}} \in W(S)$ legt eine Operation fest, die jedem Objektetupel $[a_{\mathbf{1}} \dots a_{\mathbf{n}}]$ ein Objekt der Sorte s zuordnet. Bei w = e heißt die Operation nullstellig (Konstante der Sorte S) und $O^{(i)}_{\mathbf{w,s}}$ selbst Konstantenzeichen.

Als Beispiel betrachten wir das Paar $\Sigma_{\mathbf{0}} = [S_{\mathbf{0}}, \Phi_{\mathbf{0}}]$ mit $S_{\mathbf{0}} = [ph, g]$ und $\Phi_{\mathbf{0}} = \{O^{(1)}_{\mathbf{ph,g}}, O^{(2)}_{\mathbf{ph,g}}\}$ mit den beiden Sorten ph, g und den beiden Zeichen $O^{(1)}$, $O^{(2)}$ für einstellige Operationen von Objekten der Sorte ph in Objekte der Sorte g.

Die Struktur $A = [D, F]$ heißt eine Algebra mit der Signatur Σ (Σ-Algebra), wenn $D = \{D_s \mid s \in S\}$ eine Familie nichtleerer Mengen von Sorten und $F = \{f^{(i)} \mid i \in I\}$ eine Familie von Abbildungen mit $f^{(i)}: D_{s1} \times ... \times D_{sn} \Rightarrow D_s$ falls $O^{(i)}_{w,s} = O^{(i)}_{s1...sn,\,,s}$.
(Dem Konstantenzeichen $O^{(i)}_{e,s}$ entspricht eine Konstante $f^{(i)} \in D_s$).

Beispiel: $A_0 = [D_0, F_0]$ mit $D_0 = \{D_{ph}, D_g\}$ wo $D_{ph} = \{ph_1, ..., ph_5\}$ und $D_g = \{g_1, ..., g_5\}$ sowie $F_0 = \{f^{(1)}, f^{(2)}\}$ mit $f^{(1)}(ph_j) = g_j$, $f^{(2)}(ph_j) = g_{1+(j+3) \bmod 5}$ (j = 1, ..., 5).

Sprachliche Basis

Für eine Sprache (Termsprache), in der die Konstruktion der verwendeten Marken beschrieben werden kann, zeichen wir zu jeder Sorte s der gegebenen Signatur Σ eine Menge X_s von Variablen des Typs s aus. Diese Mengen seien paarweise disjunkt und disjunkt zur Menge aller Operationszeichen. Das Mengensystem aller Variablen wird durch $X = \{X_s \mid s \in S\}$ notiert.
Weiter führen wir die Hilfszeichen ",", "(", ")" ein.

Für alle $s \in S$ definieren wir die Menge $Term_s(\Phi)$ aller **Terme vom Typ s** induktiv durch:

1. Alle Konstantenzeichen $O_{e,s}$ der Sorte s und alle Variablen aus X_s vom Typ s sind Terme vom Typ s.

2. Wenn $O^{(i)}_{s1...sn,\,s,} \in \Phi$ ein Operationszeichen der Sorte s und t_j (j = 1, ..., n) Terme vom Typ s_j sind, dann ist $O^{(i)}_{s1...sn,\,,s}(t_1, ..., t_n)$ ein Term vom Typ s.

(Die Menge aller Terme bzw. variablenfreier Terme wird durch $Term(\Phi)$ bzw $Term_0(\Phi)$ notiert.)

Interpretation

Jeder Term $t \in Term(\Phi)$ vom Typ s bestimmt bei gegebener Σ-Algebra A eine Abbildung, die jeder Belegung β der in t vorkommenden Variablen mit Elementen der entsprechenden Sorten ein Element $Int(t,\beta)$ (Interpretation oder Wert von t zur Belegung β) der Sorte s zuordnet.

Sei $\beta : \cup X \Rightarrow \cup D$ eine Belegung mit $\beta(x) \in D_s$ für $x \in X_s$ und t ein Term über Φ.
$Int(t,\beta)$ ist induktiv wie folgt definiert:

a) $Int(t,\beta) = f^{(i)}$ falls $t = O^{(i)}_{e,\,s}$ ein Konstantenzeichen
$\beta(x)$ falls $t = x$ eine Variable

b) $Int(O^{(i)}_{s1...sn,\,,s}(t_1, ..., t_n), \beta) = f^{(i)}\,(Int(t_1,\beta), ..., Int(t_n,\beta))$

Der Wert von $Int(t,\beta)$ hängt nur von der Belegung der Variablen ab, die im Term t vorkommen. Unter Vorgabe einer Ordnung der Variablen $x_1, ..., x_n$ bestimmt damit t eine n-stellige Funktion $f_t: D_{s1} \times ... \times D_{sn} \Rightarrow D_s$ (s_j sind die Typen der Variablen x_j und s ist der Typ des Terms t), so daß $f_t\,(d_1,..., d_n) = Int(t,\beta)$ für jede Belegung β mit $\beta(x_j) = d_j$ ist.

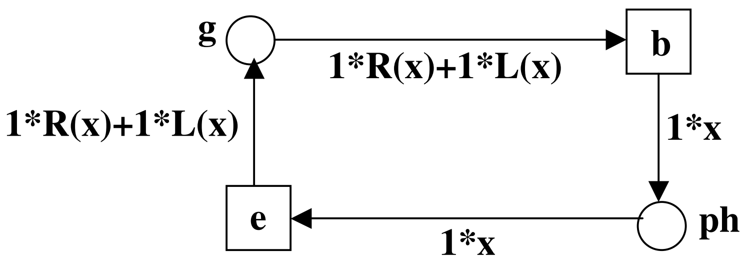
Einem variablenfreien Term vom Typ s wird dabei ein festes Element aus D_s zugeordnet.

Netz-Schema

Als Netz-Schema über einer Signatur $\Sigma = [S, \Phi]$ bezeichnen wir ein Tupel $NS = [P, T, F, \sigma, V]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. [P, T, F] ist ein Netz,
2. $\sigma : P \Rightarrow S$ ordnet jedem Platz $p \in P$ eine Sorte $\sigma(p) \in S$ zu,
3. V ist eine Abbildung, die jeder Kante (p, t) bzw (t, p) $\in F$ eine nichtleere Multimenge V(p, t) bzw. V(t,p) von Termen des Typs $\sigma(p)$ zuordnet.

Beispiel: Wir betrachten die Signatur Σ_0 und das Netzschema
$NS_0 = [\{g,p\},\{b,e\},\{[g,b],[b,p],[p,e],[e,g]\},\sigma_0,V_0]$, wo $\sigma_0(g) = g$ und $\sigma_0(p) = ph$,
$V_0(b,p) = V_0(p,e) = 1^* \, x$ und $V_0(g,b) = V_0(e,g) = 1^* \, O^{(1)}_{ph,\,g}(x) + 1 \, ^* \, O^{(2)}_{ph,\,g}(x)$.
Dabei ist x eine Variable der Sorte ph , $O^{(1)}_{ph,\,g}$ wird durch R und $O^{(2)}_{ph,\,g}$ durch L abgekürzt. Das Netz-Schema NS_0 kann durch folgenden Graphen dargestellt werden.



Aus einem Netz-Schema über Σ gewinnt man ein Prädikaten/Transitions-Netz, indem man eine interpretierende Σ-Algebra wählt und eine Anfangsmarkierung festsetzt.

Prädikaten/Transitions-Netz

Es sei N = [P, T, F, σ, V] ein Netz-Schema über der Signatur Σ und *A* eine Σ-Algebra.

a) Jede auf P definierte Abbildung $m : P \to M(D_{\sigma(p)})$, die jedem Platz $p \in P$ eine Multimenge $m(p) \in M(D_{\sigma(p)})$ von Elementen der Menge $D_{\sigma(p)}$ zuordnet, heißt eine Markierung von P .

b) $N=[P, T, F, \sigma, V, A, m_0]$ heißt ein Prädikaten/Transitions-Netz mit der Signatur Σ, wenn [P, T, F, σ, V] ein Netz-Schema über Σ, *A* eine Σ-Algebra und m_0 eine Markierung von P ist.

(Die Plätze p von N können als Prädikate über den Multimengen über $D_{\sigma(p)}$ aufgefaßt werden. Bei der Markierung m trifft das Prädikat p auf genau die Elemente von m(p) zu.)

Beispiel: Für das Philosophennetz wählen wir die Σ_0 –Algebra A_0 und die Anfangsmarkierung $m_0 (g) = 1^* g_1+ 1^* g_2 + 1^* g_3 + 1^* g_4+ 1^* g_5$, $m_0 (p) = 0$. Das Prädikat g (Stäbchen liegen auf dem Tisch) trifft anfangs demnach auf alle Stäbchen zu, während das Prädikat p (Philosoph ißt) anfangs auf keinen Philosophen zutrifft.

Bemerkung: Häufig werden als Kantenbeschriftungen nur Multimengen von Variablen zugelassen.
Die Termsprachen können zu vollen elementaren Sprachen mit Relationszeichen erweitert werden. Die so entstehenden Formeln mit Variablen können auch als sogenannte Wächter für Transitionen benutzt werden, so daß eine Transition nur dann schalten darf, wenn ihr Wächter die aktuelle Belegung der Variablen erfüllt.

Zuordnung eines Prädikaten/Transitions-Netzes zu einem gefärbten Netz

Jedem Prädikaten/Transitions-Netz $N = [P, T, F, \sigma, V, \mathcal{A}, m_0]$ kann ein gefärbtes Netz $GN = (P, T, F, C^*, V^*, m_0)$ wie folgt zugeordnet werden:

$C^*(p) = D_{\sigma(p)} \quad (p \in P)$,

$C^*(t) = D_{s1} \times \ldots \times D_{sn} \quad (t \in T, \{x_1, \ldots, x_n\} = Var(V(p,t) \cup V(t,p)) = X(t)$ und $x_j \in X_{sj})$,

$V^*(b) = \Sigma_{1 \leq i \leq k} V(b)[t_j] \cdot f_{tj}$ mit $t_j \in T$ und $V(b)[t_j]$ = Anzahl des Vorkommens von t_j in $V(b) \geq 1$.

Bemerkung:

- $x_1, \ldots, x_n$ sind alle Variablen in Multimengen von Termen, die durch V den zu t hinführenden bzw. von t ausgehenden Kanten zugeordnet sind und den Typ s_j besitzen.
- $t_1, \ldots, t_k$ sind alle Terme, die in der Multimenge V(b) mit positiven Koeffizienten vorkommen.

Beispiel: Für das oben behandelte Beispiel entsteht mit

$C^*(g) = Dg = \{g1, \ldots, g5\}$, $C^*(p) = C^*(b) = C^*(e) = \{ph1, \ldots, ph5\}$,

$V^*(g,b)[ph_j] = 1 \cdot f_{R(x)}(ph_j) + 1 \cdot f_{L(x)}(ph_j) = 1 \cdot g_j + 1 \cdot g_{1+(j+3) \bmod 5}$, $V^*(p,e)[ph_j] = 1 \cdot ph_j$

das gefärbte Philosophennetz.

Durch die eindeutige Zuordnung eines gefärbten Netzes zu jedem Prädikaten/Transitions-Netz ist die Semantik der Prädikaten/Transitions-Netze vollständig bestimmt.

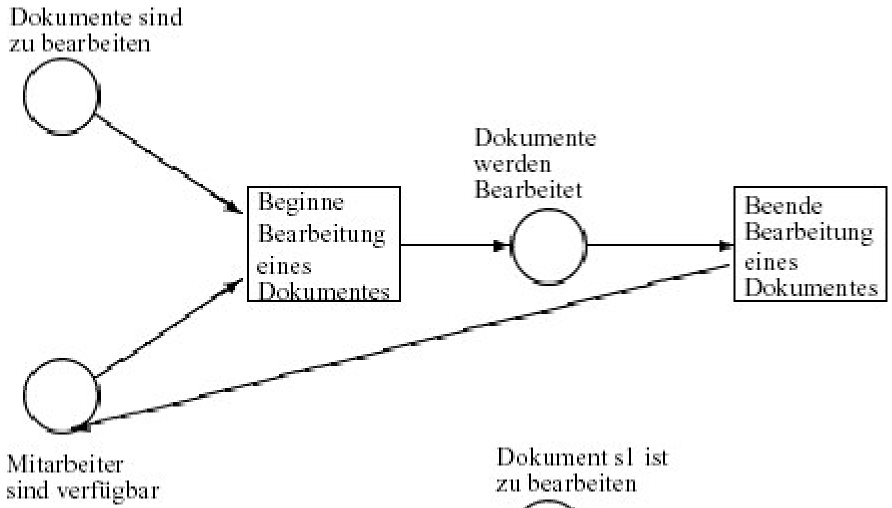
Eine Transition mit den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ hat *Konzession* mit der Belegung $\beta = [d_1, \ldots, d_n]$ in N bei der Markierung m, wenn t in der Farbe $\beta(X_t) = [d_1, \ldots, d_n]$ bei m in dem gefärbten Netz GN Konzession hat.

In analoger Weise lassen sich alle weiteren für ungefärbte und gefärbte Netze eingeführten Begriffe auf Prädikaten/Transitions-Netze übertragen. Wenn die Kantengewichte von dem Schaltmodi der Transition abhängig sind, ist eine Erweiterung der Signatur erforderlich.

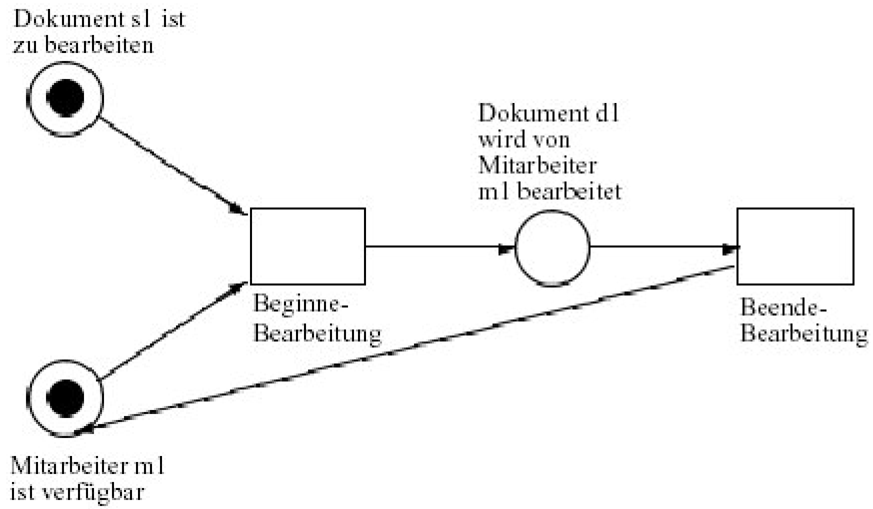
Modellierungsbeispiel

Petri-Netze ermöglichen eine schrittweise Formalisierung von Ablaufschemata.
Von informal beschrifteten Netz (siehe nachfolgendes Beispiel für die Beschreibung eines Bearbeitungsvorgangs von Dokumenten) kann durch formale Beschriftung der Netzelemente schrittweise zu einer präzisen Netzdarstellung übergangen werden.

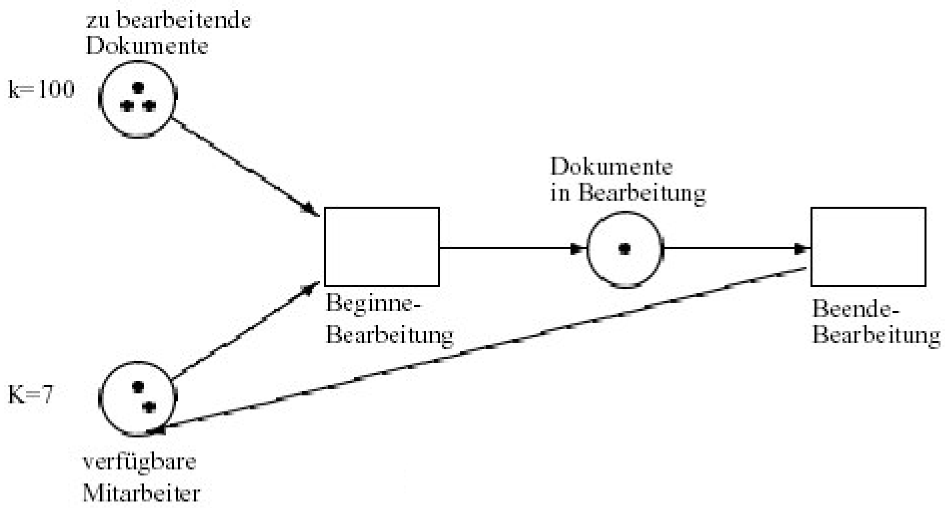
Beispiel: Informale Beschreibung eines Bearbeitungsvorgangs für Dokumente:



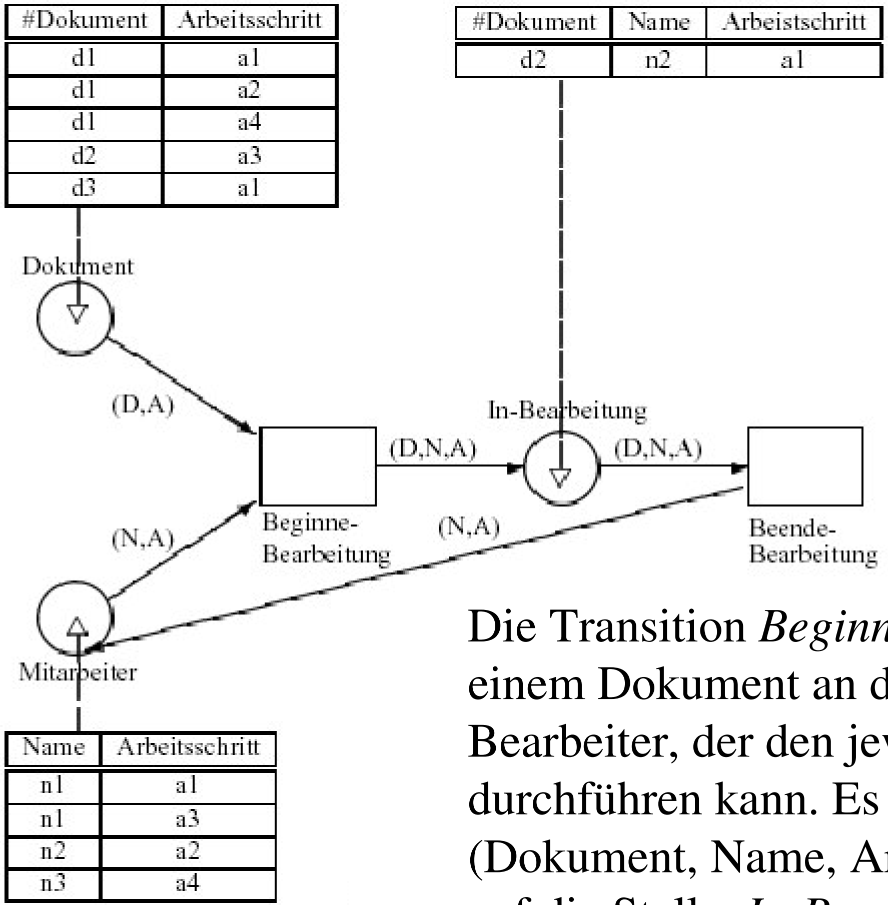
Netzbeschreibung nach Konkretisierung des aktuellen Zustandes:
Das Dokument d1 ist zu bearbeiten und der Mitarbeiter m1 ist verfügbar.



Im nachfolgenden Zustand sind die drei Dokumente zu bearbeiten und 2 Mitarbeiter Verfügbar. Ein Dokument ist gerade in Bearbeitung. Daher kann das Ereignis *Beginne-Bearbeitung* zweimal stattfinden. Dabei werden 2 Marken aus den Eingangsstellen entfernt und in die Ausgangsstelle der Transition *Beginne-Bearbeitung* eingefügt.
Die Kapazität der Stellen *verfügbare Mitarbeiter* und *Dokumente in Bearbeitung* wird mit k = 7 und k = 100 begrenzt.



Zur Beschreibung der Platz-Prädikate benutzen wir im nachfolgenden Beispiel Relationen über Dokumentnamen D, Arbeitsschrittbezeichnungen A und Mitarbeiternamen N. Im Bild ist zunächst die Anfangsmarkierung für die Plätze *Dokument* und *Mitarbeiter* angegeben.
An den Kanten sind als Tupel die zugeordneten Auswahlfunktionen vermerkt, die steuern welche Marken die Transitionen aus den Vorstellen entnehmen und auf die Nachstellen übertragen.



#Dokument	Arbeitsschritt
d1	a1
d1	a2
d1	a4
d2	a3
d3	a1

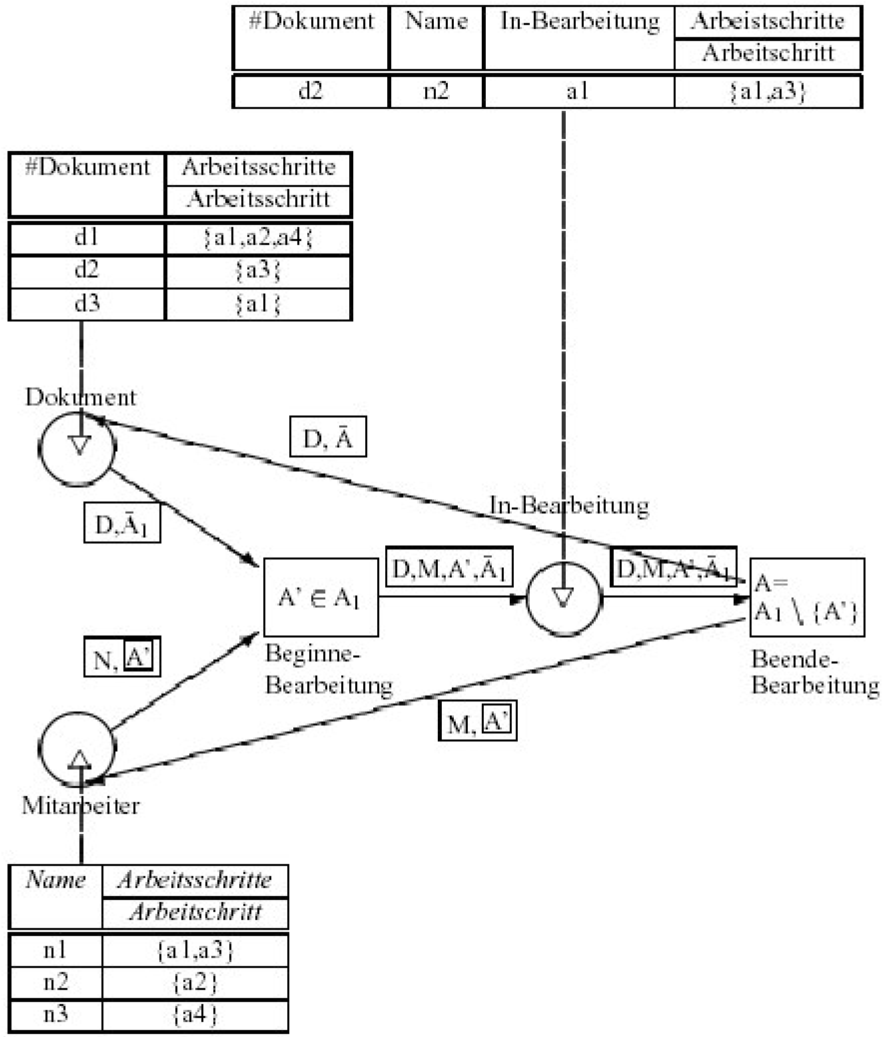
#Dokument	Name	Arbeistschritt
d2	n2	a1

Name	Arbeitsschritt
n1	a1
n1	a3
n2	a2
n3	a4

Die Transition *Beginne-Bearbeitung* sucht zu einem Dokument an der Stelle *Dokument* einen Bearbeiter, der den jeweiligen Arbeitsschritt durchführen kann. Es wird dann ein Tupel (Dokument, Name, Arbeitsschritt) erzeugt und auf die Stelle *In-Bearbeitung* abgelegt.

Die Transition *Beende-Bearbeitung* entfernt dieses Tupel wieder von der Stelle *In-Bearbeitung* und legt das Tupel (Name, Arbeitschritt) zurück auf die Stelle *Mitarbeiter*.

Das nachfolgende Netz zeigt die Situation, dass auf Dokumente nur exklusiv zugegriffen werden darf, während ein einzelner Mitarbeiter gleichzeitig mehrere Dokumente bearbeiten darf. Neben der Struktur des Netzes hat sich das Prädikat der Stelle *In-Bearbeitung* verändert.



#Dokument	Name	In-Bearbeitung	Arbeistschritte / Arbeitschritt
d2	n2	a1	{a1,a3}

#Dokument	Arbeitsschritte / Arbeitsschritt
d1	{a1,a2,a4}
d2	{a3}
d3	{a1}

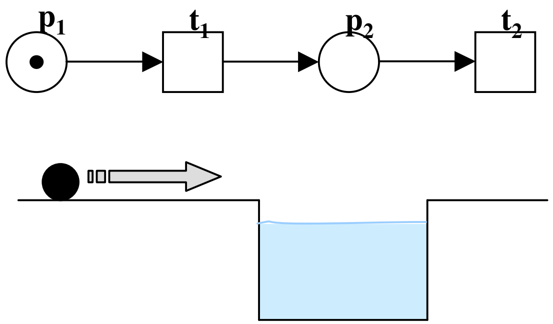
Name	*Arbeitsschritte / Arbeitschritt*
n1	{a1,a3}
n2	{a2}
n3	{a4}

Prädikaten/Transitions-Netze sind z.B. geeignet zur Beschreibung von Arbeitsabläufen auf relationalen Datenbanken bzw. in Verbindung mit dem Entity/Relationship-Modell.

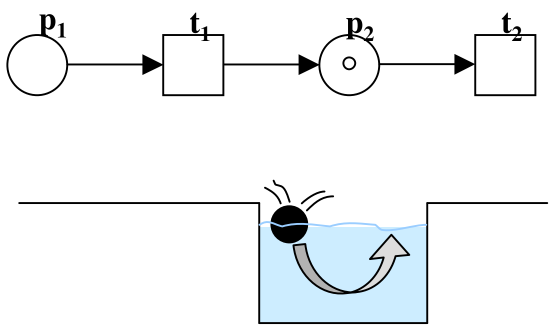
3. Zeitbewertete Netze

Berücksichtigung von Zeitbedingungen in Netzmodellen und deren Verhalten (Modellierung von Kommunikationsprotokollen) zur Beschreibung von Wartezeiten, unterschiedlichen Bearbeitungszeiten, Verzögerungen etc.
Einführung von Zeitbewertungen der Netzelemente und Analyse solcher Netze hinsichtlich von Eigenschaften wie z.B. Lebendigkeit, Sicherheit, Beschränktheit.

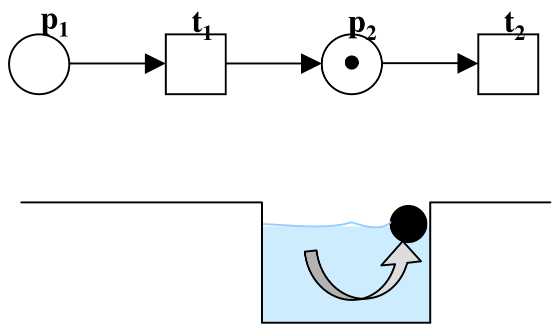
<u>Zeitbewertete Marken</u>: Verweildauer oder Verfügbarkeit von Marken unter verschiedenen Zeitregimen (deterministisch und stochastisch)



Marke in p_1 verfügbar,
t_1 schaltbereit



Marke in p_2 nicht verfügbar,
t_2 nicht schaltbereit

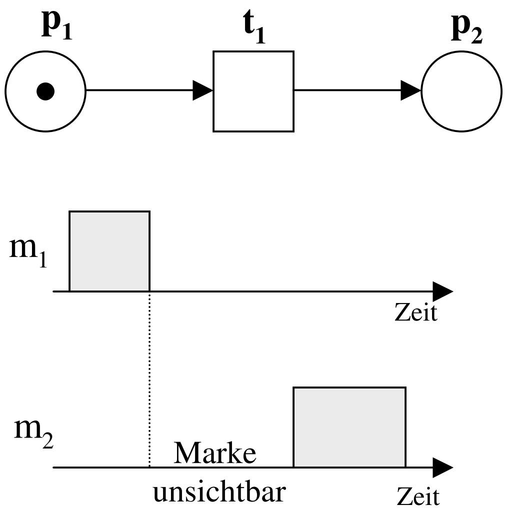


Marke in p_2 verfügbar,
t_2 schaltbereit

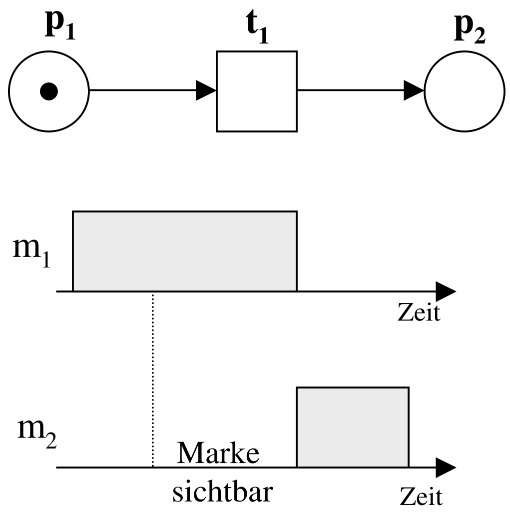
Zeitbewertete Transitionen: Schaltdauer.

Typ I :
Marken an Vorplätzen vor dem Schalten entfernen bzw. verdecken
(erfordert zusätzliche Sicherungsmaßnahmen).

Typ II :
Marken an Vorplätzen bleiben während der Verzögerungsdauer erhalten
(konkurrierende Transitionen möglich).



Verzögerte Transition Typ I



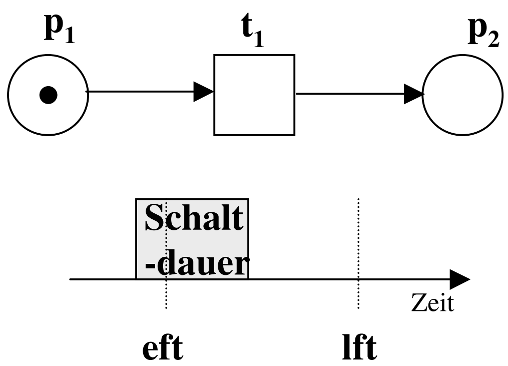
Verzögerte Transition Typ II

Keine Einschränkung gegenüber zeitbewerteten Marken, da nach Einfügen zusätzlicher Transitionen und Plätze angenommen werden kann, dass alle von einer Transition erzeugten Marken dieselbe Verweildauer besitzen.

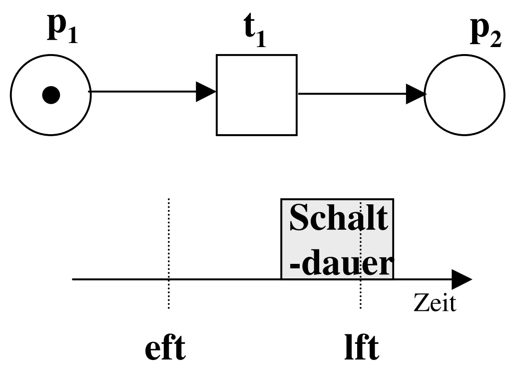
Zeitbewertete Transitionen: Schaltintervall.

eft – frühester Schaltzeitpunkt (earliest firing time)
lft – spätester Schaltzeitpunkt (latest firing time)

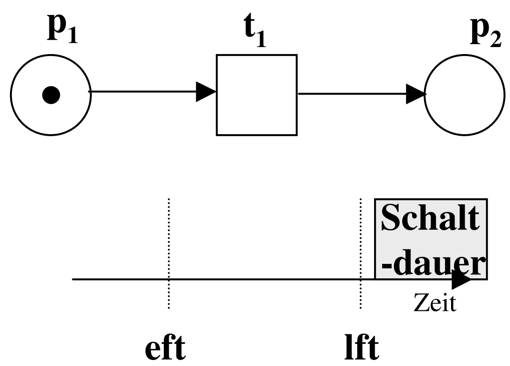
$$eft \leq lft$$



Transition kann noch nicht schalten



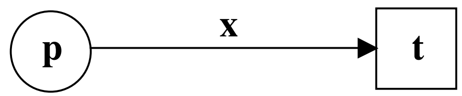
Transition kann schalten



Transition kann nicht mehr schalten

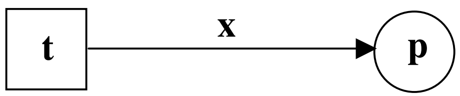
Zeitbewertete Kanten: Markendurchlässigkeit, Markenflußverzögerung in Kanten

Markendurchlässigkeit von Kanten zur Transition, denen eine nichtnegative Zahl eft oder lft zugeordnet wird. Bei mehreren Kanten zu einer Transition kann Schalten verhindert werden.
eft – frühester Schaltzeitpunkt (earliest firing time)
lft – spätester Schaltzeitpunkt (latest firing time)

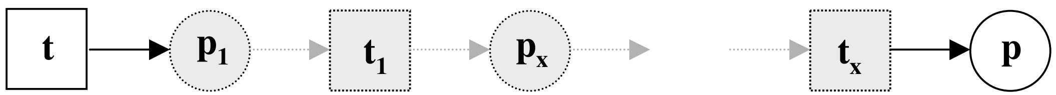


Markendurchlässigkeit
t zum Zeitpunkt τ konzessioniert
x = eft $\Rightarrow$ t schaltet frühestens ab $\tau + x$
x = lft $\Rightarrow$ t schaltet höchstens bis $\tau + x$

Markenverzögerung in Kanten zum Platz, denen eine nichtnegative Zahl x als Verzögerungszeit zugeordnet wird. Nach dem Schalten der Transition zum Zeitpunkt τ erscheint die Marke auf dem Nachplatz zum Zeitpunkt τ + x. Kann auch durch Hilfstransitionen modelliert werden.



Markenflußverzögerung
t schaltet zum Zeitpunkt τ
Marke erscheint auf den Platz p
zum Zeitpunkt $\tau + x$



Markenflußverzögerung
mit Hilfstransitionen t_i und Hilfsplätzen p_i (x ganzzahlig)

Netze mit Schaltdauer für zeitbewertete Transitionen:

Aktionen der Transitionen nicht mehr momentan (ohne Zeitverzögerung).
Ausführungszeiten sind positive rationale Zahlen, fest vorgegeben.
Transitionen mit Schaltdauer 0 sind nicht zugelassen, da sonst Markenlokalisierung unklar.

Definition: D-Netz

Es sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz mit den üblichen Netzelementen und $D: T \rightarrow Z^+$ eine Abbildung, die jeder Transition $t \in T$ eine positive rationale Zahl $D(t) \in Z^+$ zuordnet. Dann heißt $[N, D]$ ein D-Netz (Netz mit Schaltdauer) und $D(t)$ die Ausführungszeit von t.

Bemerkung: Es wird immer eine maximale Menge nebenläufiger Transitionen geschaltet, die gemeinsam Konzession besitzen. Dabei dürfen Transitionen nicht nebenläufig zu sich selbst schalten. Eine Transition kann erst dann einen neuen Schaltvorgang beginnen, wenn der vorhergehende abgeschlossen ist. Die Ausführungszeiten D(t) können ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ganzzahlig angenommen werden (Diskrete Zeitskale, Zeitstreckung durch Multiplikation mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen).

Definition: Netzzustand

Ein Paar $[m, u]$ wird Zustand von $[N, D]$ genannt, wenn m eine Markierung von N und $u: T \rightarrow N$ eine Abbildung (Uhr) ist, die jeder Transition t eine natürliche Zahl $u(t) < D(t)$ zuordnet. Für den Anfangszustand $[m_0, 0]$ gilt $0(t) = 0$ für alle t aus T.

Bemerkung: Bei $u(t) = 0$ ist t nicht aktiv. Bei $u(t) > 0$ ist t aktiv und hat im Vorzustand zum Zeitpunkt τ den Schaltvorgang zum Zeitpunkt $\tau - u(t)$ begonnen. Da dieser Schaltvorgang nach $D(t)$ Zeiteinheiten abgeschlossen ist, muß $u(t) < D(t)$ sein.

Schaltverhalten von D-Netzen:

Definition: Schritte in D-Netzen

Eine Menge U von Transitionen eines D-Netzes [N, D] heißt <u>Schritt</u> beim Zustand [m, u], wenn

a) $u(t) = 0$ für alle $t \in U$ (t nicht aktiv bei [m, u], Transition nicht nebenläufig zu sich selbst),

b) $u \neq 0$ wenn $U = \emptyset$ (es existieren Transitionen, die sich im Schaltvorgang befinden),

c) $u^- = \Sigma_{t \in U} t^- \leq m$ (alle Transitionen aus U haben Konzession) und

d) U ist maximale Teilmenge von T mit den vorgenannten Eigenschaften.

Bemerkung: Schritte bei [m, u] sind maximale Mengen von bei m nebenläufig konzessionierten Transitionen, die sich im Zustand [m, u] nicht im Schaltvorgang befinden.

Definition: Folgezustand von [m, u] nach Schritt U

Das Schalten (Ausführen) von Schritt U im Zustand [m, u] zum Zeitpunkt τ führt zu dem <u>Folgezustand</u> [m', u'] im Zeitpunkt $(\tau + 1)$, wofür gilt:

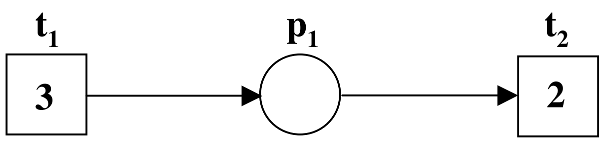
$m' = m - U^- + \Sigma_{t \in U, u(t) = 1} t^+ + \Sigma_{u(t) = D(t) - 1} t^+$ (1. Summe: t wird aktiv und schaltet
2. Summe: t war aktiv und schaltet jetzt),

$$u'(t) = \begin{cases} 1 & t \in U \text{ und } D(t) < 1 & \text{(Schaltvorgang startet)} \\ u(t) + 1 \quad \text{falls} & t \notin U \text{ und } 0 < u(t) < (D(t) - 1) & \text{(Schaltvorgang wird fortgesetzt)} \\ 0 & \text{sonst} & \text{(Schaltvorgang anhalten)} \end{cases}$$

Bezeichnung: Für den direkten Übergang vom Zustand [m, u] in den Folgezustand [m', u'] beim Schritt U schreiben wir $[m, u] \mid\!\rightarrow_U [m', u']$. $\mid\!\rightarrow^*$ bezeichnet die entsprechende Erreichbarkeits-relation. Für einen Zustand z beschreibt $R_{[N, D]}(z) = \{z' \mid z \mid\!\rightarrow^* z'\}$ die Menge aller in [N, D] von z aus erreichbaren Zustände.

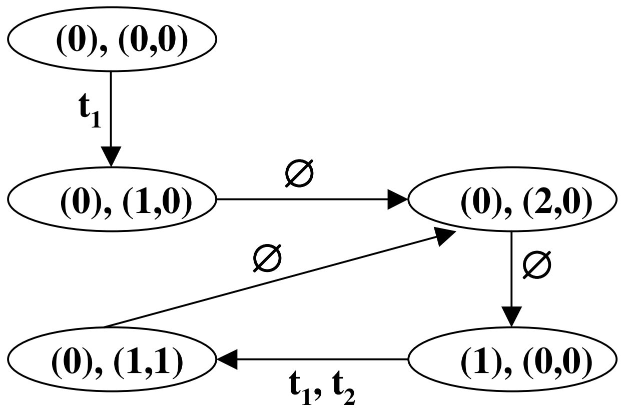
Beispiel:

Dem nachfolgend dargestellten D-Netz liegt zunächst ein unbeschränktes Petri-Netz zugrunde. Bei der vorgegebenen Zeitbewertung D der Transitionen entsteht dennoch ein endlicher Erreichbarkeitsgraph, da die Transition t_2 aus dem Platz p_1 schneller Marken abzieht als t_1 dort ablegen kann.



D-Netz mit $D(t_1) = 3$, $D(t_2) = 2$

Dies kommt im zugehörigen Erreichbarkeitsgraph zum Anfangszustand [(0), (0,0)] dadurch zum Ausdruck, dass bei der vorgegebenen Zeitbewertung nach erstmaligem Schalten von t_1 bis auf den Übergang von [(1), (0,0)] nach [(0), (1,1)] mit dem Schritt $\{t_1, t_2\}$ nur leere Schritte möglich sind.



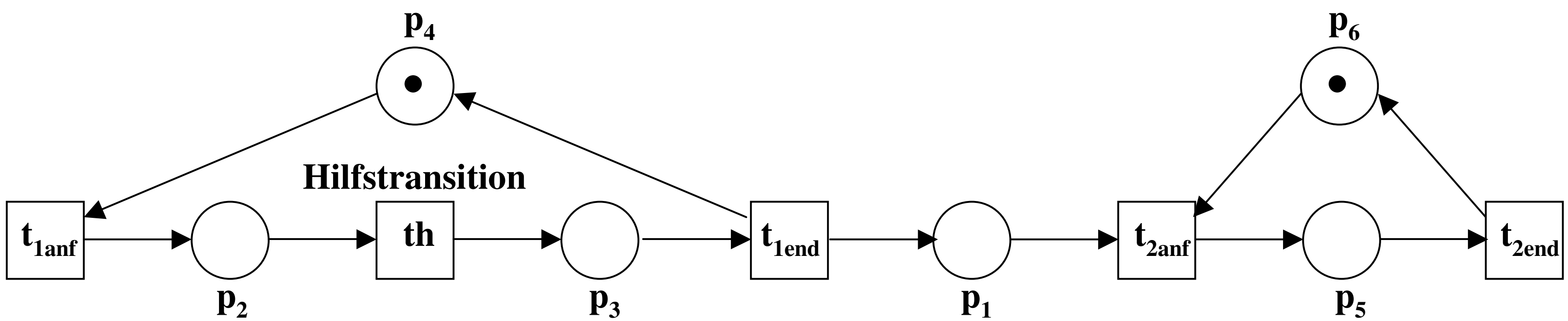
Erreichbarkeitsgraph zum Anfangszustand $z_0 = [m_0, u_0] = [(0), (0,0)]$

Eigenschaften von D-Netzen:

1. Wenn jede Transition die gleiche Schaltdauer besitzt, dann sind in [N, D] nur Zustände [m, u] mit u = 0 erreichbar (d.h., keine Transition befindet sich im Schaltvorgang, Zustände sind durch die Markierung m eindeutig bestimmt).

2. Jedes D-Netz [N, D] mit D = 1 hat denselben Erreichbarkeitsgraphen wie das Petri-Netz N unter der Maximum-Schaltregel, d.h., maximale Mengen nebenläufiger Transitionen schalten.

Bemerkung:
Bei D = 1 kann die leere Menge niemals Schritt sein und die Transitionen speichern keine Marken. Falls D(t) > 1 wird die Transition t aufgespaltet in t_{anf}, t_{end} und eine dazwischenliegende Kette von D(t) - 1 Plätzen und D(t) - 2 Hilfstransitionen. Zu vorbeschriebenen Netz entsteht auf diese Weise:



Die markierten Plätze verhindern neue Schaltvorgänge der Transitionen t_1 und t_2 vor Beendigung des vorhergehenden Schaltvorgangs dieser Transitionen.

Definition: Beschränktheit, Lebendigkeit, Erreichbarkeit

1. Ein D-Netz [N, D] heißt <u>beschränkt</u>, wenn vom Anfangszustand $z_{\mathbf{0}}$ aus nur endlich viele Zustände erreichbar sind, d.h., $R_{[N, D]}(z_{\mathbf{0}})$ endlich ist.

2. Eine Transition t von [N, D] heißt <u>lebendig</u> beim Zustand z, wenn von jedem von z aus erreichbaren Zustand z‘ ein Zustand z‘‘ erreichbar ist, wo t Konzession hat, d.h., für alle $z' \in R_{[N, D]}(z)$ existiert $z'' = [m'', u''] \in R_{[N, D]}(z')$ mit $t^- \leq m''$.

3. Eine Markierung m heißt <u>z-erreichbar</u> in [N, D], wenn ein Zustand [m, u] in [N, D] von z aus erreichbar ist

4. Ein D-Netz [N, D] mit $N = (P, T, F, V, m_0)$ heißt <u>lebendig</u>, wenn jede Transition von [N, D] lebendig bei $z_{\mathbf{0}} = [m_{\mathbf{0}}, 0]$ ist.

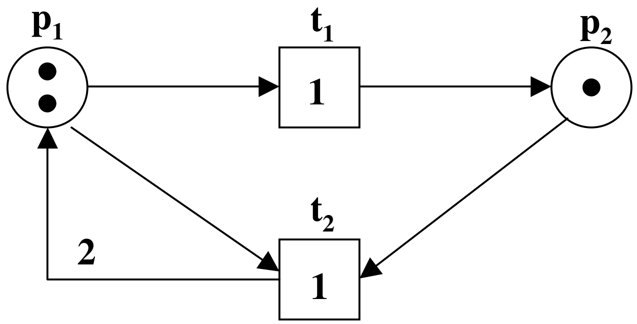
<u>Eigenschaften</u>:

a. Beschränktheit, Lebendigkeit, Erreichbarkeit sind unentscheidbar für D-Netze.

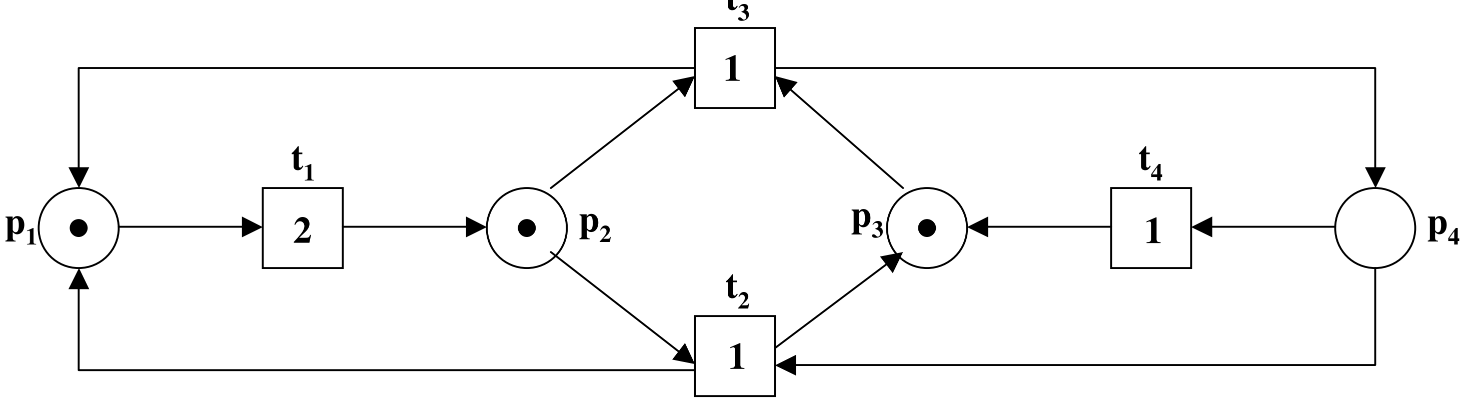
b. Jede in [N, D] vom Anfangszustand aus erreichbare Markierung ist in N überdeckbar.

c. Wenn N beschränkt ist, dann ist für alle Zeitbewertungen D das D-Netz [N, D] ebenfalls beschränkt.

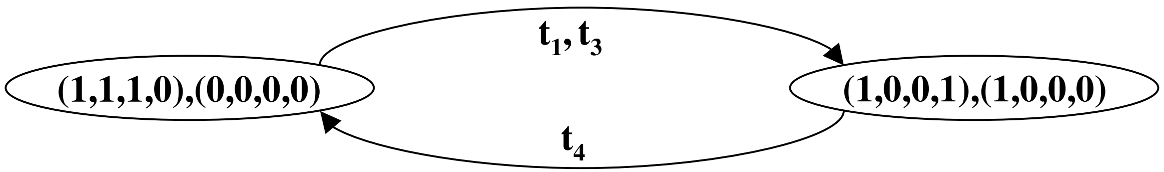
Bemerkung:
Wie die nachfolgenden Beispielnetze zeigen, kann man weder aus der Lebendigkeit noch aus der Nicht-Lebendigkeit eines Petri-Netzes N auf die Lebendigkeit bzw. Nicht-Lebendigkeit des D-Netzes [N, D] schließen.



Lebendiges D-Netz zu nicht-lebendigem Petri-Netz mit Anfangszustand [(2,1),(0,0)]



Nicht lebendiges D-Netz (t_2 ist tot) zu lebendigem Petri-Netz



Definition: Zeitunabhängige Lebendigkeit

Ein Petri-Netz N heißt zeitunabhängig lebendig, wenn für jede Zeitbewertung D das D-Netz [N, D] lebendig ist.

Bemerkung:
Das erste Netz im vorigen Beispiel ist zeitunabhängig lebendig.
Zu Beginn können beide Transitionen t_1 und t_2 gleichzeitig den Schaltvorgang beginnen, wodurch beide Plätze gesäubert werden.
Bei $D(t_1) < D(t_2)$ trifft die Marke auf p_2 zuerst ein, t_2 kann aber erst dann wieder aktiviert werden, wenn die Transition t_2 den vorhergehenden Schaltvorgang beendet hat und auf p_1 wieder zwei Marken liegen (Anfangszustand wieder hergestellt).
Bei $D(t_1) \geq D(t_2)$ treffen beide Marken auf p_1 nicht später als die Marke auf p_2 ein. Solange p_2 nicht markiert ist kann auch t_1 nicht schalten, da diese Transition noch aktiv ist. Danach stellt sich wieder der Anfangszustand ein.
Ein zeitunhabhängig lebendiges Netz muß demnach nicht notwendig lebendig sein.

Definition: Nebenläufigkeitsfrei

$N = [P, T, F, V, m_0]$ heißt nebenläufigkeitsfrei, wenn bei jeder von m_0 aus erreichbaren Markierung m alle paarweise verschiedenen konzessionierten Transitionen nicht nebenläufig sind, d.h., für alle $m \in R_N(m_0)$ und alle $t_1 \neq t_2$ mit $t_1^- + t_2^- \leq m$ gilt:
t_1 und t_2 sind nicht nebenläufig (m.a.W.: t_1 und t_2 stehen im Konflikt).

Bemerkungen:

- Jede Zustandsmaschine mit höchstens einer Marke ist nebenläufigkeitsfrei.

- Jedes Petri-Netz kann in ein nebenläufigkeitsfreies Netz mit isomorphen Erreichbarkeitsgraphen umgeformt werden. (Nach Einführung eines neuen, mit einer Marke markierten Platzes, der mit jeder Transition in beiden Richtungen durch eine Kante verbunden ist.)

Eigenschaften:

1. Jedes lebendige und nebenläufigkeitsfreies Petri-Netz ist zeitunabhängig lebendig.

2. Jedes lebendige einfache Netz, wo zu jedem Platz alle ausgehenden Kanten die gleichen Gewichte besitzen, sind zeitunabhängig lebendig.

Netze mit Schaltintervall für zeitbewertete Transitionen:

Für jede Transition wird eine früheste Schaltzeit α und eine späteste Schaltzeit β (α und β nicht negative rationale Zahlen $\alpha \leq \beta$) nach der Konzessionierung festgelegt. Vor α kann die Transition noch nicht und nach β kann sie nicht mehr schalten. Der Schaltvorgang selbst wird nicht unter brochen. Bei $\alpha = \beta = 0$ muß die Transition sofort schalten. Wenn dabei Nebenläufigkeit zu sich selbst nicht zugelassen wird, kann jede Transition mit einer Uhr ausgerüstet werden, die die Zeit (Takte) anzeigt, die seit der Konzessionierung vergangen ist. Solange die Transition keine Konzession hat, ist die Uhr abgestellt. Die Uhren aller Transitionen sind synchronisiert, d.h., laufen gleich schnell (globale Zeitskala). Die Uhrenstellungen der Transitionen werden im Netz-Zustand erfaßt.

Definition:

> Es sei $N = [P, T, F, V, m_0]$ ein Petri-Netz und $\alpha, \beta: T \to Z^+$ Abbildungen von T in die Menge der nicht negativen rationalen Zahlen mit $\alpha(t) \leq \beta(t)$ für alle $t \in T$, dann heißt $ZN = [N, \alpha, \beta]$ ein Zeit-Netz.

Bemerkung:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Werte von α und β als natürliche Zahlen angenommen werden (d.h., $\alpha, \beta: T \to$ Nat. nach entsprechender Streckung der Zeitskala).
Die Zustandsänderungen müssen aber nicht notwendig nur zu ganzzahligen Zeitpunkten stattfinden.

Definition: Uhr, Zustand

1. Eine Abbildung $u : T \to Z^+ \cup \{\#\}$ heißt Uhrenstellung des Zeit-Netzes $ZN = [N, \alpha, \beta]$ bei der Markierung m, wenn für alle $t \in T$ gilt:
   $u(t) = \#$ gdw. $t^- > m$ (d.h., t ist bei m in N nicht konzessioniert, Uhr ist abgestellt) und wenn $u(t) \neq \#$, dann ist $0 \leq u(t) \leq \beta(t)$ (d.h., Uhr läuft).

2. Ein Paar $z = [m, u]$, wo m eine Markierung und u eine Uhrenstellung von $ZN = [N, \alpha, \beta]$ bei m ist, heißt Zustand von ZN. Das Paar $z_0 = [m, u]$ wo für alle $t \in T$ gilt:
   $u_0(t) = 0$ falls $t^- \leq m_0$ sonst # heißt Anfangszustand von $ZN = [N, \alpha, \beta]$.

Bemerkung:
Der Zustand eines Zeitnetzes kann durch weiterzählen der Uhren und durch Schalten von Transitionen verändert werden.

Definition: schaltbare Transition, Folgezustand

1. Die Transition t heißt schaltbar im Zustand $z = [m, u]$ (bzw. kurz z-schaltbar), wenn $t^- \leq m$ und $u(t) \geq \alpha(t)$ ist.
2. Der Zustand $z = [m,u]$ geht durch den Zeitverlauf τ in den Zustand $z' = [m',u']$ über ($z \to_\tau z'$), wenn $m = m'$ und für alle $t \in T$ gilt: $u'(t) = \begin{cases} u(t)+\tau & \text{falls } u(t) \neq \# \text{ und } u(t)+\tau \leq \beta(t) \\ \# & \text{sonst} \end{cases}$
3. Der Zustand $z = [m,u]$ geht durch Schalten der Transition t^* in den Zustand $z' = [m',u']$ über ($z \to_{t^*} z'$), wenn t^* z-schaltbar, $m' = m + \Delta t^*$ und für alle $t \in T$ gilt:

$$u'(t) = \begin{cases} u(t) & t^- \leq m' \wedge t^- \leq m \wedge t \neq t^* \wedge (Ft \cap Ft^*) = \emptyset \\ \# \quad \text{falls} & t^- > m' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung:

Eine Transition kann schalten, wenn an den Vorplätzen die erforderlichen Marken vorhanden sind (Transition konzessioniert) und ihre Uhr bereits $\alpha(t)$ Zeiteinheiten gelaufen ist .
Eine konzessionierte Transition muß spätestens dann schalten, wenn ihre Uhr $\beta(t)$ Zeiteinheiten gelaufen ist.

Für den Übergang zum Zustand z' = [m',u'] beim Schalten der Transition t* gilt:

$$u'(t) = \begin{cases} u(t) & t \neq t^* \text{ behält Konzession und } t \text{ hat mit } t^* \text{ keine gemeinsamen Vorplätze} \\ \# & \text{falls } t \text{ hat bei } m' \text{ keine Konzession} \\ 0 & t \text{ bekommt bei } m' \text{ Konzession und } t = t^* \text{ oder } t \text{ hatte bei } m \text{ keine Konzession} \\ & \text{oder } t \text{ hat mit } t^* \text{ gemeinsame Vorplätze} \end{cases}$$

Bei Konfliktsituationen wird die Uhr der Transition t schon dann auf 0 gestellt, wenn t und t* gemeinsame Vorplätze haben (statischer Konflikt), d.h., für die Konzessionierung von Transitionen werden immer nur ganze Plätze reserviert. (Es sind auch andere Festlegungen möglich.)

Ein Zustand z ist im Zeit-Netz vom Anfangszustand z_0 aus genau dann erreichbar, wenn Zahlen $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_n$ aus Z, Transitionen $t_1, ..., t_n$ und Zustände $z'_0, ..., z'_n$, $z_1, ..., z_n$ gibt, so daß $z_0 \rightarrow_{\tau 0} z'_0 \rightarrow_{t1} z_1 \rightarrow_{\tau 1} z'_1 \rightarrow_{t2} \dots \rightarrow_{tn} z_n \rightarrow_{\tau n} z'_n = z$ (in Zeichen: $z_0 \xrightarrow[\tau 0 \dots \tau n]{t1 \dots tn} z$).

Im Spezialfall von $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ für alle $t \in T$ ist die Uhrenstellung durch die Markierung eindeutig bestimmt. Damit sind im Zeit-Netz ZN ebenso viele Zustände erreichbar wie Markierungen im Petri-Netz N. Petri-Netze können demnach als Spezialfälle von Zeit-Netzen aufgefaßt werden.

Definition: beschränkt, lebendig

a) Das Zeit-Netz ZN = [N, α, β] heißt beschränkt, wenn die Menge seiner erreichbaren Zustände nur endlich viele Markierungen enthält, d.h., die Menge $R_{ZN}(z_0)\,|_1$ ist endlich.

b) Die Transition t heißt tot beim Zustand z (z-tot), wenn von z aus kein Zustand erreichbar ist, bei dem t schalten kann, d.h., $(m, u) \in R_{ZN}(z) \rightarrow t^- > m$.

c) Die Transition t heißt lebendig bei z (z-lebendig), wenn von z aus kein Zustand erreicht werden kann, bei dem t tot ist, d.h., $z' \in R_{ZN}(z) \rightarrow t^- \leq m$.

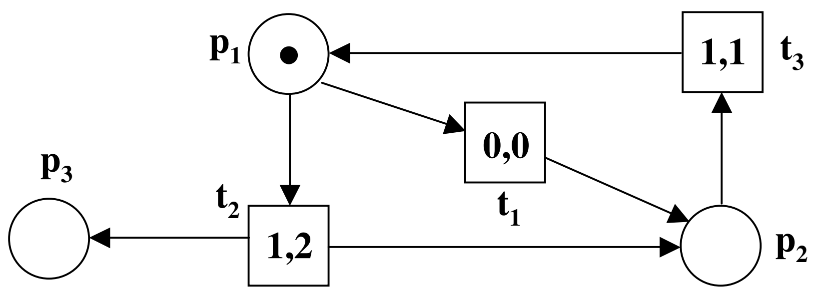
d) Das Zeit-Netz ZN heißt lebendig, wenn alle seine Transitionen z_0-lebendig sind.

Eigenschaften:

1. Wenn der Zustand z = [m, u] in ZN = [N, α, β] erreichbar, dann ist die Markierung m in N erreichbar.

2. Wenn N beschränkt, dann ist das Zeit-Netz ZN beschränkt.

Bemerkung: Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, gilt die Umkehrung von 2. nicht. Das dem Zeit-Netz ZN zugrunde liegende Petri-Netz N ist lebendig und unbeschränkt. Im Zeit-Netz ist die Transition t_2 beim Anfangszustand tot. ZN ist demnach beschränkt.



t_1 vor t_2 , da $\alpha(t_2) = 1 > 0 = \alpha(t_1)$

Da es auch lebendige Zeit-Netze gibt, deren Petri-Netze keine lebendige Markierung besitzen, kann aus der Lebendigkeit des Petri-Netzes nicht die Lebendigkeit des zugeordneten Zeit-Netzes geschlossen werden und umgekehrt.

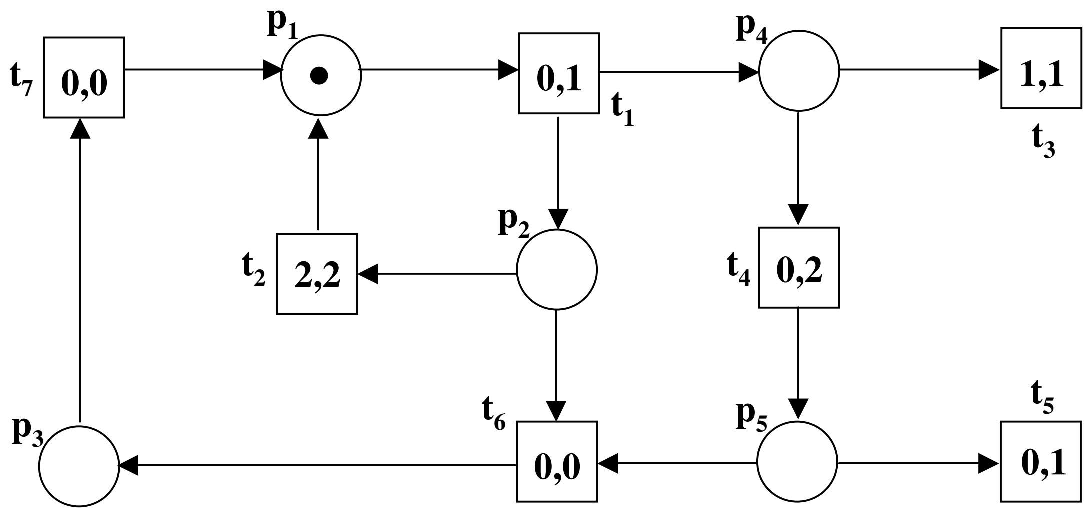
Da sich bei Zeit-Netzen mit Hilfe des frühesten Schaltzeitpunktes Prioritäten der Transitionen nachbilden lassen, sind für diese Netze die Eigenschaften Lebendigkeit und Beschränktheit unentscheidbar. Wir können diese Eigenschaften deshalb nur für beschränkte Zeit-Netze analysieren und lassen für die Zustände [m, u] auch nur ganzzahlige Werte von u zu.

<u>Eigenschaft</u>:

Jeder in einem Zeit-Netz ZN erreichbare Zustand [m, u] mit ganzzahligen Werten von u ist durch einen ganzzahligen Zeitverlauf erreichbar, d.h., wenn $z_0 \xrightarrow[\tau 0 \ldots \tau n]{t1 \ldots tn} z$ mit rationalen τ_i, dann existieren natürliche Zahlen τ'_i mit $z_0 \xrightarrow[\tau' 0 \ldots \tau' n]{t1 \ldots tn} z$.

<u>Beispiel</u>: Im nachfolgend beschriebenen Zeit-Netz kann der Ablauf $z_0 \xrightarrow[0{,}8|0{,}6|0|1{,}4|0]{t1|t4|t5|t2} z_0$

in $z_0 \xrightarrow[0|1|0|1|0]{t1|t4|t5|t2} z_0$ mit ganzzahligem Zeitverlauf transformiert werden.



Eigenschaften:

a) Ein Zeit-Netz ZN ist genau dann beschränkt, wenn darin vom Anfangszustand z_0 nur endlich viele ganzzahlige Zustände erreichbar sind, d.h., die Menge $R_{ZN}^{ganz}(z_0)$ der ganzzahligen z_0-erreichbaren Zustände von ZN ist endlich.

b) Die Erreichbarkeit ganzzahliger Zustände ist für beschränkte Zeit-Netze entscheidbar.

Bemerkung:

Für die Zustände $z = [m, u]$ des beschränkten Zeit-Netzes $ZN = [N, \alpha, \beta]$ mit $u(t)$ rational für alle $t \in T$ mit $t^- \leq m$ können ganzzahlige Zustände $z^* = [m, u^*]$ des Zeit-Netzes $ZN^* = [N, k \bullet \alpha, k \bullet \beta]$ mit $u^*(t) = k \bullet u(t)$ für $t^- \leq m$ und $u^*(t) = \#$ sonst angegeben werden, wo k das kleinste gemeinsame Vielfache der gekürzten Brüche $u(t) \neq 0$ bezeichnet.

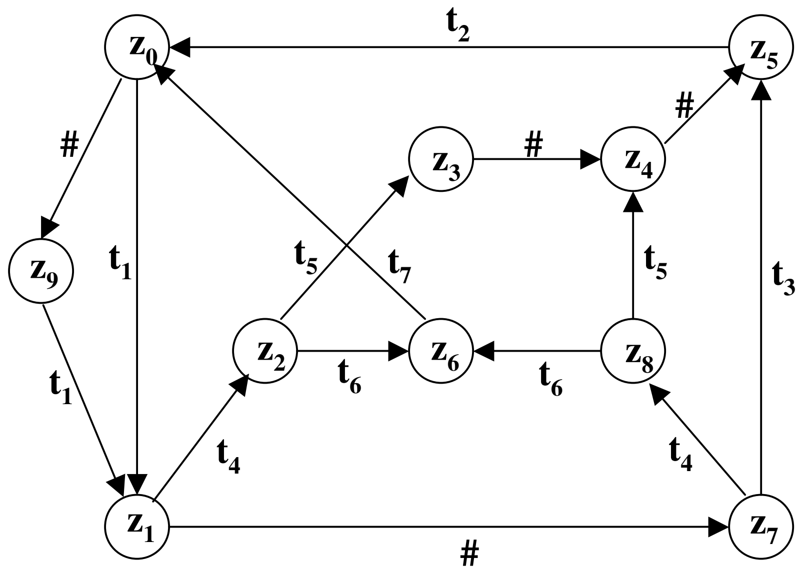
Behauptung:

z^* ist genau dann in ZN^* erreichbar, wenn z in ZN erreichbar ist.

Definition: Erreichbarkeitsgraph

Der Graph $Err_{ZN} = [R_{ZN}^{ganz}(z_0), K_{ZN}]$ mit der Kantenmenge $K_{ZN} \subseteq Z \times T \cup \# \times Z$ wo
$(z, t, z') \in K_{ZN}$ gdw. $z \xrightarrow{t} z'$ bzw. $(z, \#, z') \in K_{ZN}$ gdw. $z \xrightarrow[1]{} z'$
heißt Erreichbarkeitsgraph des Zeit-Netzes $ZN = [N, \alpha, \beta]$.

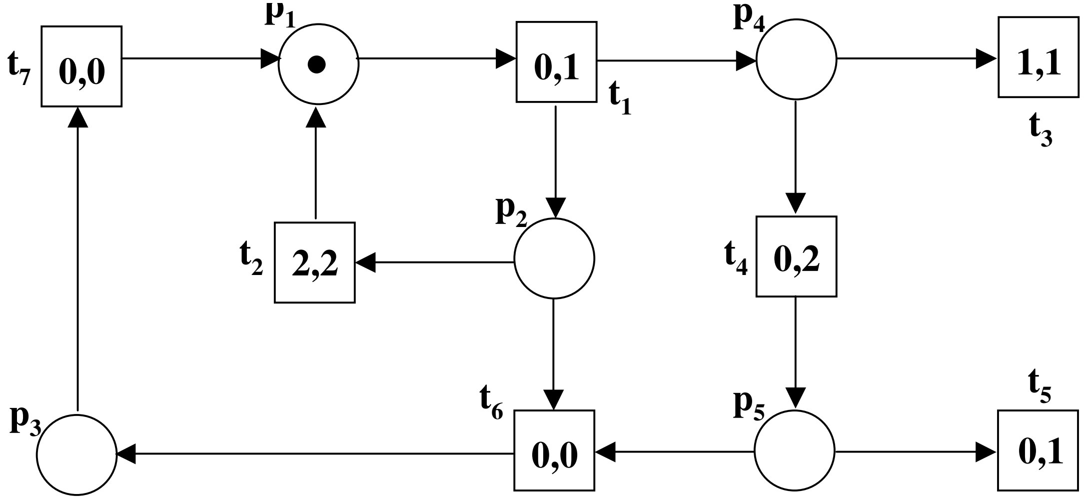
Beispiel: Als Erreichbarkeitsgraph des vorhergehenden Beispielnetzes entsteht



mit
$z_0 = [(1,0,0,0,0),(0,\#,\#,\#,\#,\#,\#)]$, $z_1 = [(0,1,0,1,0),(\#,0,0,0,\#,\#,\#)]$, $z_2 = [(0,1,0,0,1),(\#,0,\#,\#,0,0,\#)]$,
$z_3 = [(0,1,0,0,0),(\#,0,\#,\#,\#,\#,\#)]$, $z_4 = [(0,1,0,0,0),(\#,1,\#,\#,\#,\#,\#)]$, $z_5 = [(0,1,0,0,0),(\#,2,\#,\#,\#,\#,\#)]$,
$z_6 = [(0,0,1,0,0),(\#,\#,\#,\#,\#,0,\#)]$, $z_7 = [(0,1,0,1,0),(\#,1,1,1,\#,\#,\#)]$, $z_8 = [(0,1,0,0,1),(\#,1,\#,\#,0,0,\#)]$,
$z_9 = [(1,0,0,0,0),(1,\#,\#,\#,\#,\#,\#)]$.

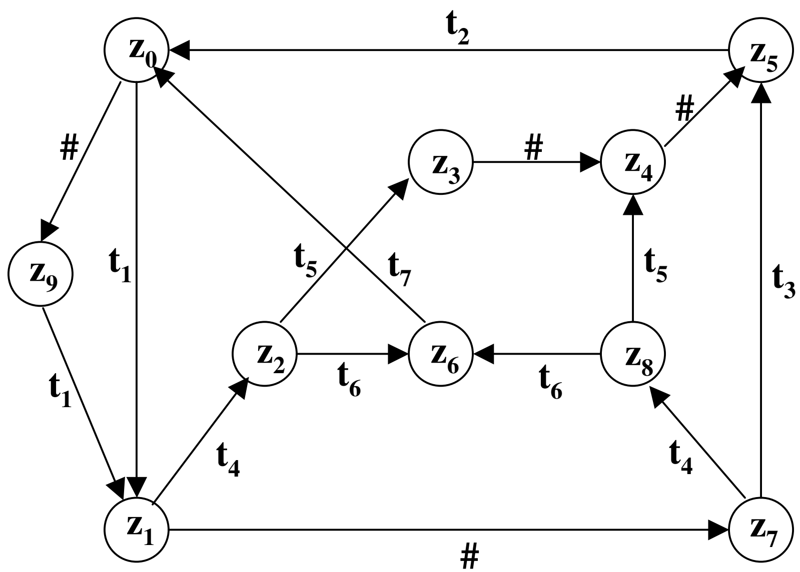
Der Erreichbarkeitsgraph ist stark-zusammenhängend und jede Transition kommt als Kanten-beschriftung vor, woraus mit nachfolgendem Satz die Lebendigkeit des Beispielnetzes folgt.

Zeit-Netz



$z_0 = [(1,0,0,0,0),(0,\#,\#,\#,\#,\#,\#)]$, $z_1 = [(0,1,0,1,0),(\#,0,0,0,\#,\#,\#)]$, $z_2 = [(0,1,0,0,1),(\#,0,\#,\#,0,0,\#)]$,
$z_3 = [(0,1,0,0,0),(\#,0,\#,\#,\#,\#,\#)]$, $z_4 = [(0,1,0,0,0),(\#,1,\#,\#,\#,\#,\#)]$, $z_5 = [(0,1,0,0,0),(\#,2,\#,\#,\#,\#,\#)]$,
$z_6 = [(0,0,1,0,0),(\#,\#,\#,\#,\#,0,\#)]$, $z_7 = [(0,1,0,1,0),(\#,1,1,1,\#,\#,\#)]$, $z_8 = [(0,1,0,0,1),(\#,1,\#,\#,0,0,\#)]$,
$z_9 = [(1,0,0,0,0),(1,\#,\#,\#,\#,\#,\#)]$.

Erreichbarkeitsgraph



Satz:
Eine Transition t des Zeit-Netzes ZN ist genau dann lebendig in ZN, wenn von jedem Knoten des Erreichbarkeitsgraphen Err_{ZN} eine Kante zu einem Zustand existiert, bei dem t schaltbar ist, d.h., für alle $z \in R_{ZN}^{ganz}(z_0)$ existiert ein $z' \in R_{ZN}^{ganz}(z_0)$ mit $z \rightarrow^{\#} z'$ und t ist z'-schaltbar in ZN.

Folgerung:
Die Lebendigkeit ist für beschränkte Zeit-Netze entscheidbar.

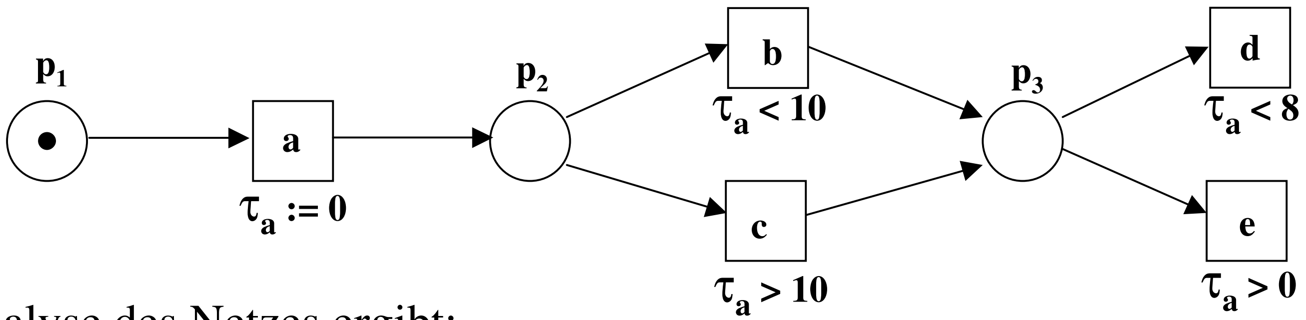
Satz:
Das Zeit-Netz ZN = $[N, \alpha, \beta]$ mit einem lebendigen free-choice Netz N, wo Nachtransitionen geteilter Plätze dieselben Vorplätze besitzen und für alle Transitionen t mit gemeinsamen Vorplätzen $\alpha(t) = \beta(t)$ gilt, ist lebendig.

Timer-Netze :

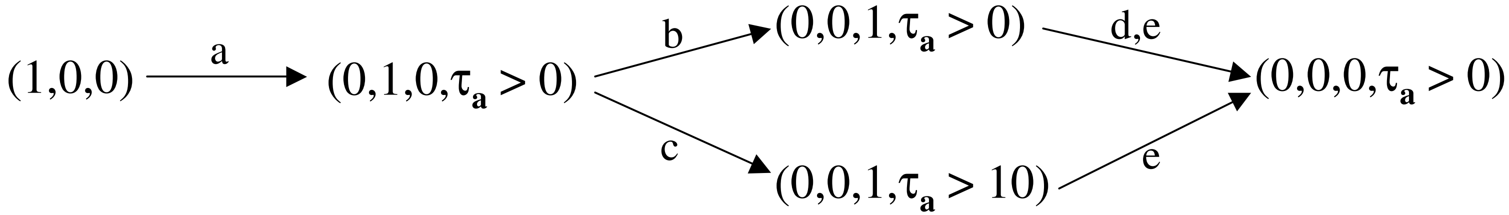
Zeitmodellierung in den Transitionen als nicht-atomare Ereignisse mit Hilfe von Timern. Dabei wird jeder Transition eine Timeranweisung bzw. Timerabfrage zugeordnet, die von anderen Transitionen abgefragt werden kann bzw. auf diese einwirkt.

Timer-Start in Transition t: $\tau_t := x$ (bzw. für jeweils neue Timer $\tau_t^{(i)} := x$; $i := i+1$).
Timer-Abfragen in Transition t: $\tau_t < x$ (bzw. $\tau_t < x$) wo x rationale (nat.) Zahl als Zeitpunkt.
Timer-Zwangsfristen in Transition t: $\tau_t^{(i)}\,! < x$ (aktivierte Transition muß vor $\tau_t^{(i)}$ schalten).

Eine konzessionierte Transition kann nur dann aktiviert werden, wenn ihre Timerbedingung erfüllt ist. Damit können bestimmte Schaltfolgen verhindert werden. So ist z.B. im nachfolgenden Timer-Netz die Schaltfolge acd zeitlich inkonsistent, d.h., bei den zugeordneten Timern nicht möglich.



Die Zeitanalyse des Netzes ergibt:

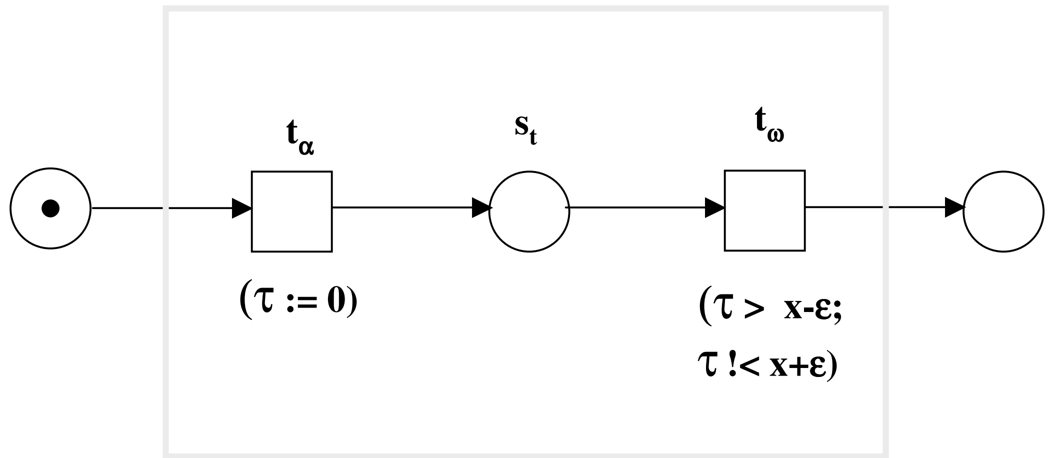


Unscharfe Zeitbedingungen beim Starten bzw. Abfragen der Timer können durch erweiterte Markierungen bestehend aus Stellenmarkierung und Timeranweisungen beschrieben werden.

Beispiele:

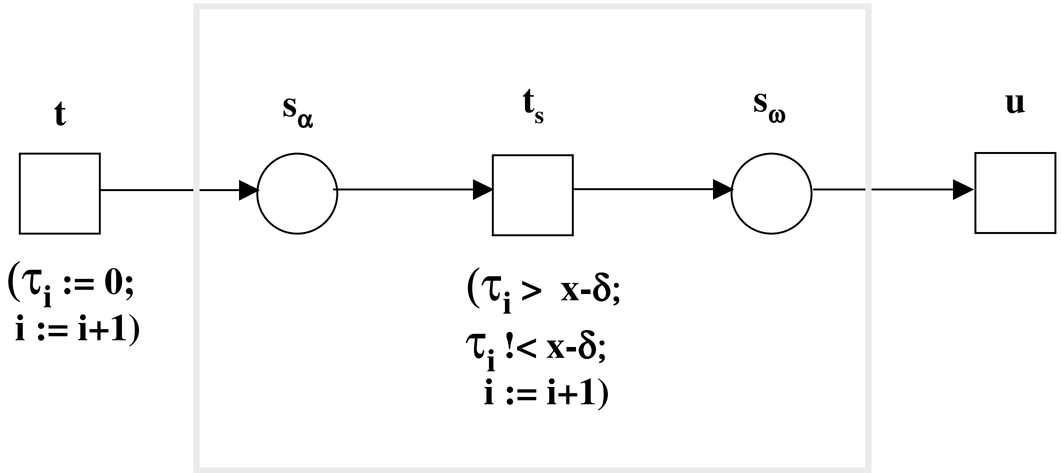
- $M = (\{(s_t,1)\}; \tau \in (x/2, x))$ für bei der Anfangsmarkierung bereits aktivierte Transition.

- Beschreibung der Unschärfe beim Starten eines Timers durch Unschärfe bei den Zeitbedingungen in Hilfstransitionen.



Simulation der Schaltdauer x +/- ε

- $M = (\{(s_\alpha,1), (s_\omega,0)\}; \tau_i \in (x/2, x)\ ; i = 2)$ wo auf Stelle s seit x/2 Zeiteinheiten eine Marke liegt.



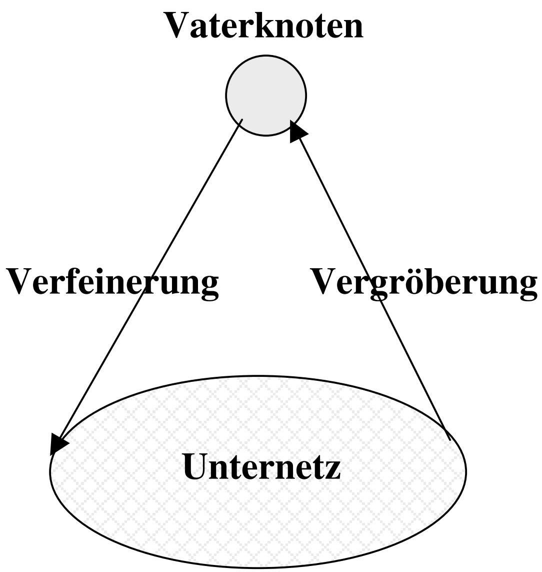
Simulation der Latenzzeit x +/- δ

Timer-Netze dienen der Modellierung von Systemen, bei denen zeitabhängige Entscheidungen oder Zeitgarantien eine Rolle spielen, z.B., Kommunikationsprotokolle, Durchsatzanalysen oder Realzeitanwendungen. Eine weitere Möglichkeit wäre die Einführung von statitischem Zeitverhalten.

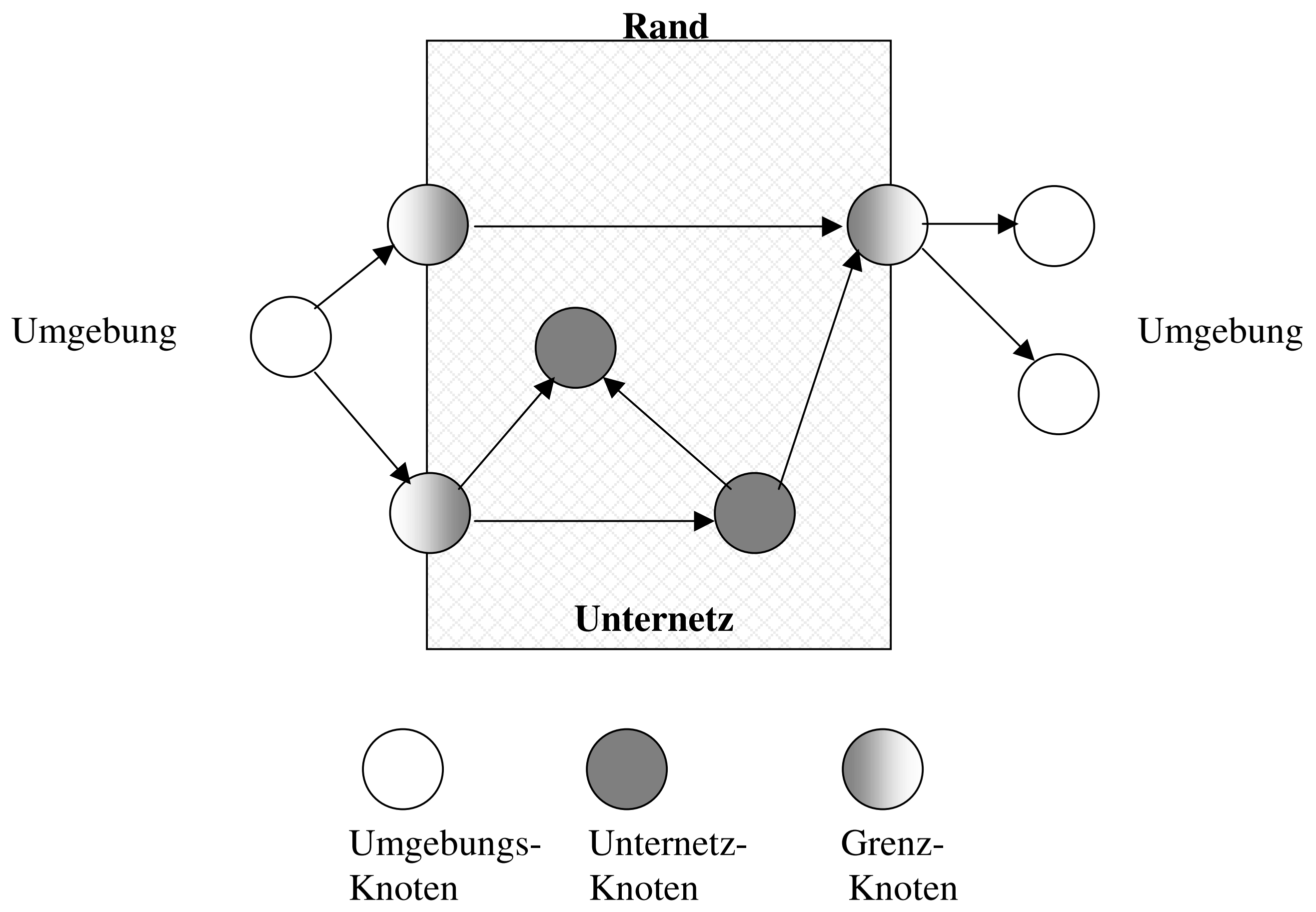
4. Hierarchische Petri-Netze

Modellierung von Systemen als Petri-Netze auf verschiedenen Abtraktionseben.
Gleiche Beschreibungssprache auf allen Abstraktionsebenen.
System kann auf beliebiger Detaillierungsebene mit denselben Methoden bearbeitet werden.
Verbesserung der Übersichtlichkeit des Gesamtsystems.

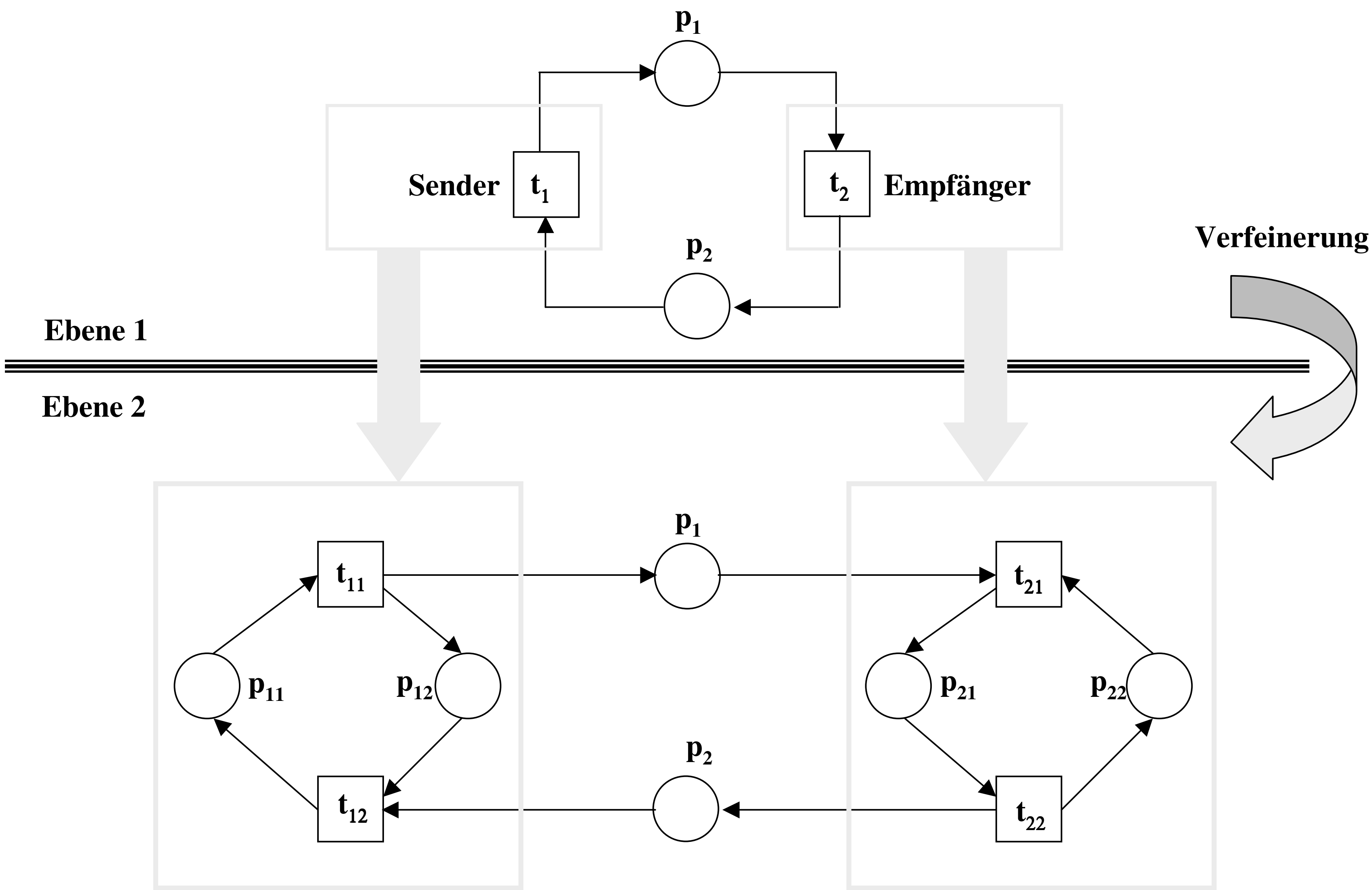
Verfeinerung bzw. Vergröberung von Netzknoten (Transitionen oder Plätze) als Petri-Netz.
Vaterknoten = Vergröberung (Abstraktion) eines Unternetzes.
Unternetz = Verfeinerung (Konkretisierung) eines Vaterknotens.



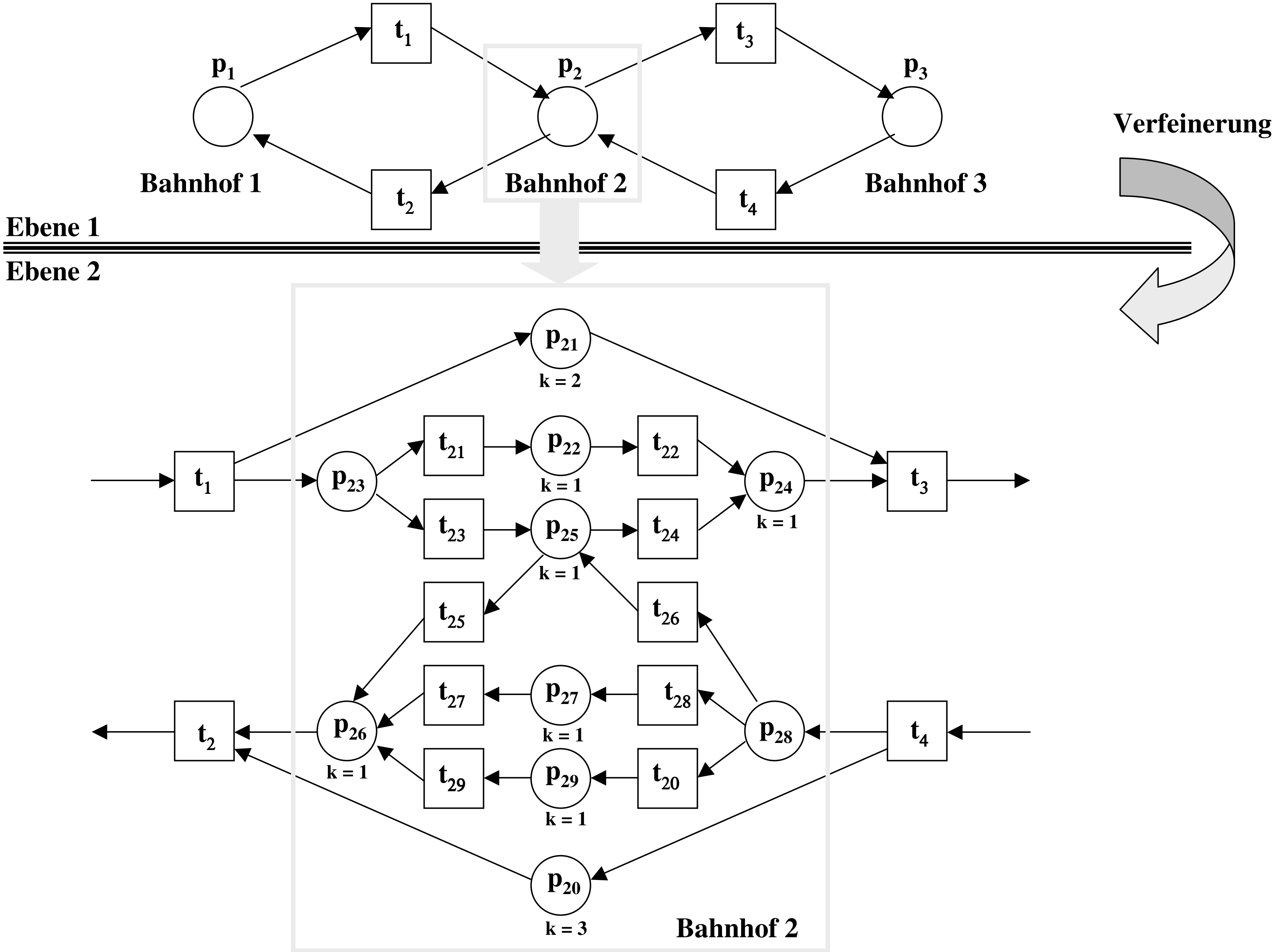
Umgebung = Kanten zu anderen Teilnetzen (werden vom Rand des Unternetzes übernommen).
Grenzknoten = Knoten aus Unternetz mit Kanten zu anderen Teilnetzen.
Rand des Unternetzes = Gesamtheit der Grenzknoten (identisch mit Vaterknoten).
Rändknoten des Unternetzes sind Transitionen (bzw. Plätze),
wenn der Vaterknoten Transition (bzw. Platz) ist.



Verfeinerung von Transitionen: Marken in oberster Ebene nicht vollständig darstellbar.



Verfeinerung von Plätzen: Markierung in allen Ebenen darstellbar

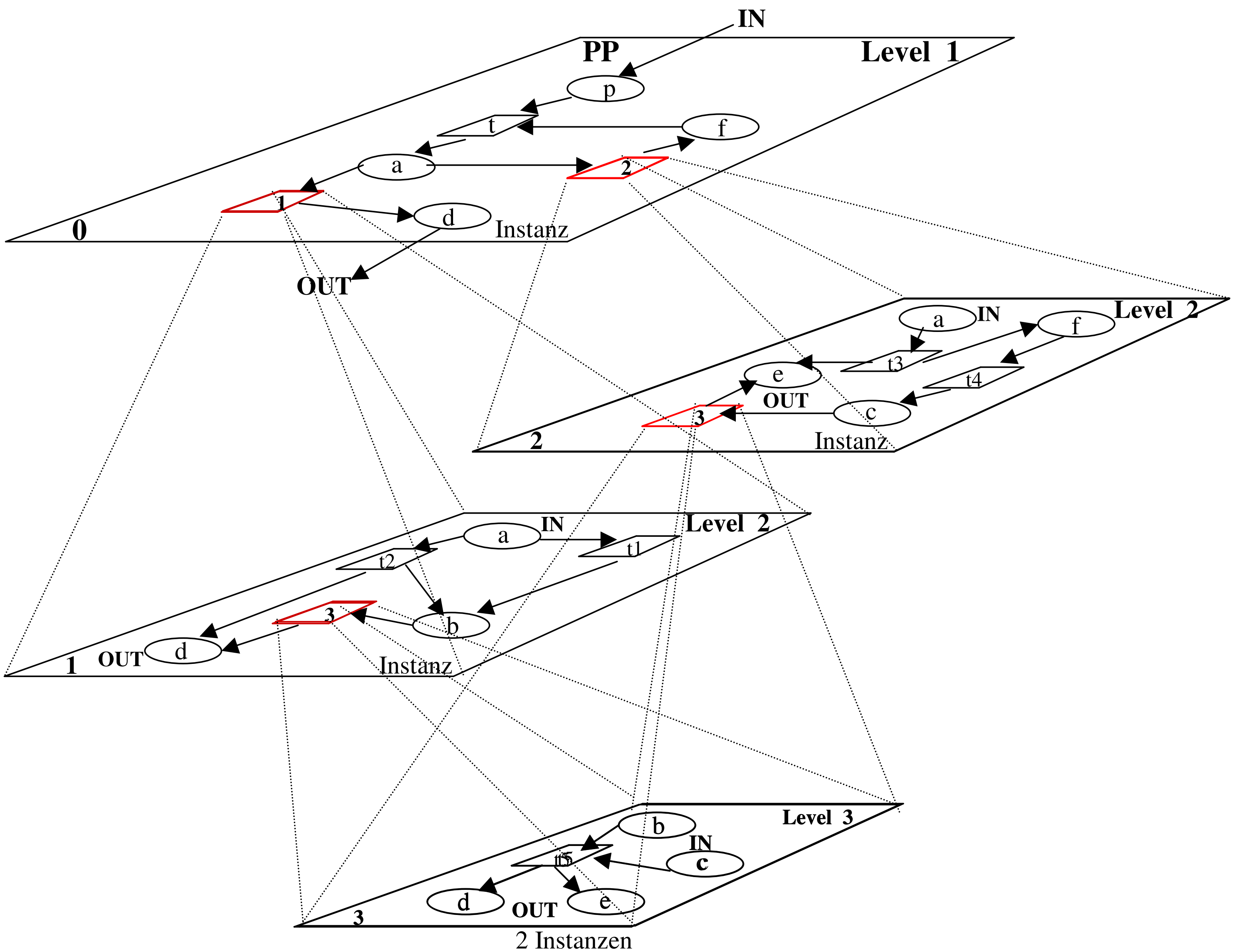


Die einzelnen Netze der Hierarchie heißen ***Seiten***. Diese Seiten werden verbunden, indem einzelnen Transitionen oder Plätzen jeweils eine Seite als ***Substitution*** zugeordnet wird. Transitionen können statisch auf dieselbe Seite substituiert werden. Für jede Substitution existiert dynamisch eine eigene ***Instanz*** der Seite. Direkte oder indirekte (über andere Seiten) Rekursion ist nicht zulässig. Die Hierarchie besteht aus ***Haupt-Seiteninstanzen*** und ***untergeordneten Seiteninstanzen***. Die Haupt-Seiteninstanzen bilden den Anfang der Hierarchie. Transitionen bzw. Plätze auf den Hauptseiten können untergeordnete Seiteninstanzen besitzen, die durch Substitution zugeordnet werden. In analoger Weise setzt sich dies auf den untergeordneten Seiten der Hierarchie fort.

Im Folgenden betrachten wir nur Substitutionen von Transitionen. Dabei werden den Stellen auf der jeweils höheren Ebene (***Socket-Knoten***) Stellen der untergeordneten Seite (***Port-Knoten***) gleichen Typs (ein- oder ausgehende Kanten) zugeordnet. Die mit einer substituierten Transition durch Kanten verbundenen Stellen bilden die Socket-Knoten dieser Transition. Eine Funktion ST legt den ***Socket-Typ*** (in, out, i/o) dieser Stellen fest. Die frei wählbaren Port-Knoten auf den untergeordneten Seiten haben ebenso einen ***Port-Typ*** (in, out, i/o, general). Bis auf den Typ general, kann ein Socket-Knoten nur mit einem Port-Knoten vom gleichen Typ verbunden verbunden werden. Transitionen und Socket-Stellen werden entsprechend der ***Port-Stellen-Zuordnung*** substituiert.

Fusions-Stellen, die zu einer oder mehreren Seiten gehören können, werden bei graphischer Mehrfachdarstellung als identische Stellen betrachtet. Man unterscheidet zwischen ***globalen Fusions-Stellen*** (Zugriff über Instanzen und Seiten hinweg), ***Seiten-Fusions-Stellen*** (Zugriff nur über Instanzen derselben Seite) und ***Instanzen-Fusions-Stellen*** (Zugriff nur innerhalb der Seiten-Instanz). (Globale Fusions-Stellen können als globale Variable aufgefasst werden [Seiteneffekte !]).

Beispiel: Netz (0) mit Unternetzen (1,2,3) auf drei Ebenen



Definition: **Hierarchisches Petri-Netz** HPN = (S, SK, SA, PK, PT, PA, FS, FT, PP) mit

- $S = \{ (P_S, T_S, F_S, m_{0_S}) \mid s \in S \text{ endlich}\}$ **Seitenmenge**

  mit $P = \cup_{s \in S} P_S$, $T = \cup_{s \in S} T_S$, $F = \cup_{s \in S} F_S$

  und $s_1 \neq s_2 \in S : (P_{S_1} \cup T_{S_1} \cup F_{S_1}) \cap (P_{S_2} \cup T_{S_2} \cup F_{S_2}) = \emptyset$ **(Disjunktheit)**

- $SK \subseteq T$ **Substitutionsknoten** $SK_S \subseteq SK \cap T_S$
- $SA : SK \rightarrow S$ **Seitenzuordnung** $\{s_0\, s_1 \ldots s_n \in S^* \mid s_k \in SA(SK_{s_{k-1}}) \text{ für } 1 \leq k \leq n \;\; s_0 = s_n \} = \emptyset$ **(keine Rekursion erlaubt)**
- $PK \subseteq P$ **Portknoten** $PK_S \subseteq PK \cap P_S$
- $PT : PK \rightarrow \{\text{in, out, i/o, general}\}$ **Porttyp**
- $PA : SK \rightarrow 2^{P \times P}$ **Portzuordnung**

  $t \in SK : PA(t) \subseteq X(t) \times PK_{SA(t)}$ mit $X(t) = {}^\circ t \cup t^\circ$ **(Mehrere Sockets zum gleichen Port möglich.)**

  (Sockelknoten, Portknoten) **(Sockelkn. zu Subst.kn. t)**

  $t \in SK, (p_1, p_2) \in PA(t) : PT(p_2) \neq \text{general} \rightarrow ST(p_1, t) = PT(p_2)$

  $$\text{mit } ST(p_1, t) = \begin{cases} \text{in} & \\ \text{out} & \text{falls } p_1 \in \\ \text{i/o} & \end{cases} \begin{matrix} {}^\circ t \setminus t^\circ \\ t^\circ \setminus {}^\circ t \\ t^\circ \cap {}^\circ t \end{matrix}$$ **Sockeltyp**

- $FS \subseteq 2^P$ **Fusionsmengen** **(In vielen Anwendungen leer. Müssen nicht disjunkt sein.)**
- $FT: FS \rightarrow \{\text{global, page, instance}\}$ **Fusionstyp**

  mit $f \in FS : FT(f) \neq \text{global} \rightarrow \text{exist. } s \in S \text{ mit } f$

- $PP \in M(S)$ **Hauptseiten** **(Multimengen über S mit u.U. verschiedenen Instanzen.)**

Definition: **Seiteninstanzen** SI_s der Seite $s \in S$

$SI_s = \{(s^*, n^*, q^*) \mid s^* \in PP \wedge 1 \leq n^*$ nat.Zahl $\wedge\ q^* = t_1 \ldots t_m \in SK^m$ mit
$(t_1 \in SK_{s^*} \wedge t_k \in SK_{SA(t_{k-1})}\ [1 < k \leq m] \wedge SA(t_m) = s)$ für $m > 0$
$\wedge\ s^* = s$ für $m = 0\}$

Dabei bezeichnet
s^* Hauptseite, n^* Unterscheidungsindex, $t_1 \ldots t_m$ Substitutionssequenz mit
t_1 Substitutionsknoten von s^*, t_k Substitutionsknoten von $SA(t_{k-1})$ und
s Verfeinerung (Unternetz) von t_m .
Seiteninstanzen mit $q^* = e$ heißen **primäre** Seiteninstanzen
alle anderen heißen **sekundäre** Seiteninstanzen.

Definition:
Platz(Stellen)instanzen PI_s , **Transitionsinstanzen** TI_s , **Kanteninstanzen** FI_s der Seite $s \in S$

$PI_s = \{(p, i_s) \mid p \in P_s$ Platz von Seite $s \wedge i_s \in SI_s$ Instanz von Seite $s\}$

$TI_s = \{(t, i_s) \mid p \in T_s \setminus SK_s$ Nichtsubstitutionstransition von Seite $s \wedge i_s \in SI_s$ Instanz von Seite $s\}$

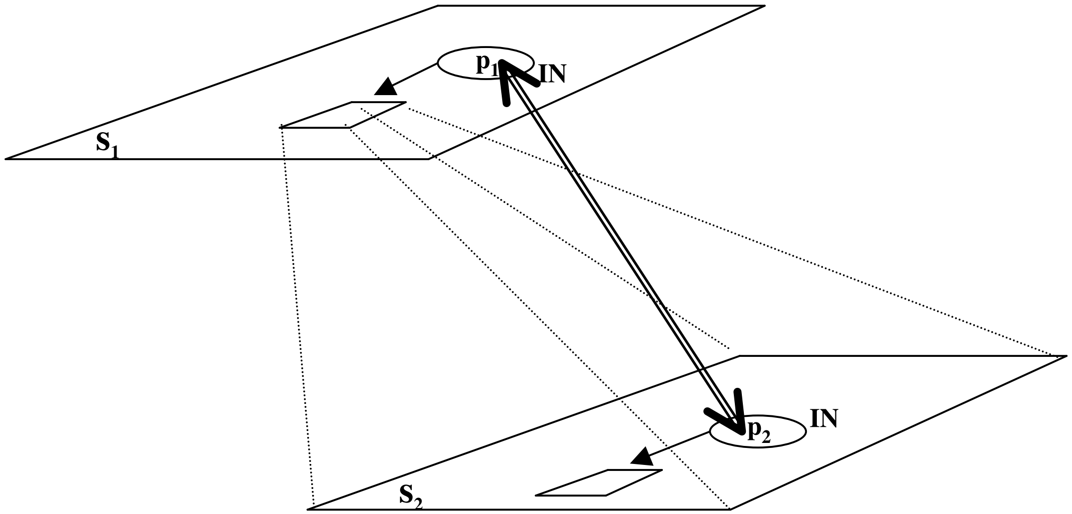
$FI_s = \{(f, i_s) \mid p \in F_s \setminus F(SK_s)$ Kanten zu Nichtsubstitutionstransitionen von Seite s

$\wedge\ i_s \in SI_s$ Instanz von Seite $s\}$

Bemerkung: Jede Platz- PI / Transitions- TI / Kanteninstanz KI gehört zu einer Seiteninstanz i_s .

Definition: **Platz-Instanz-Relation**
Menge aller Paare $((p_1, (s_1, n_1, \tau_1)), (p_2, (s_2, n_2, \tau_2))) \in PI \times PI$ wofür
existiert ein t aus SK mit $(p_1, p_2) \in PA(t) \wedge (s_1, n_1) = (s_2, n_2) \wedge \tau_1 t = \tau_2$ oder
existiert ein fs aus FS mit $p_1, p_2 \in fs \wedge$ wenn FT(fs) = instance , dann ist $(s_1, n_1, \tau_1) = (s_2, n_2, \tau_2)$.

Anmerkung: Dabei sind jeweils p_1 Sockelknoten, p_2 Portknoten, τ_i Substitutionssequenzen.
$(s_1, n_1) = (s_2, n_2)$ bedeutet gleiche Hauptseiteninstanz.



Bezeichnung: Äquivalenzklassen der Platz-Instanz-Relation werden als **Platz-Instanz-Gruppen** bezeichnet und deren Gesamtheit durch **PIG** notiert.

Definition: **Markierung**
Eine Abbildung M, die den Platzinstanzen p‘ = (p, id) aus PI natürliche Zahlen incl. 0 zuordnet, wobei alle Platzinstanzen aus einer Platzinstanzgruppe p‘‘ = [p, id] aus **PIG** die gleiche Markenzahl erhält, d.h., M(p‘) = M(p‘‘) für alle p‘ $\in$ p‘‘, heißt eine **Markierung** der Plätze des hierarchischen Netzes HPN.

Platzinstanzen aus verschiedenen Platzinstanzgruppen können unterschiedliche Markenzahlen erhalten. Für die **Anfangsmarkierung** M_0 gilt ebenfalls M_0(p‘) = M_0(p‘‘).

Definition: **Verhalten hierarchischer Netze**
Eine Menge G von gebundenen Transitionen heißt ein bei einer Markierung M möglicher **Schritt**, wenn für alle p‘‘ aus **PIG** gilt: $G^- \leq$ M(p‘‘) ,

$$\text{wobei } G^- = \sum_{t' \in G,\, p' \in p''} t'^- \text{ und } G^+ = \sum_{t' \in G,\, p' \in p''} t'^+ .$$

Bei **Anwendung** des Schrittes G wird die Markierung M_1 in die Markierung M_2 mit M_2(p‘‘) = M_1(p‘‘) + ΔG und $\Delta G = G^+ - G^-$ überführt (in Zeichen: $M_1 \rightarrow_G M_2$).

Eigenschaften wie Erreichbarkeit, Lebendigkeit etc. werden entsprechend wie bei normalen nicht-hierarchischen Netzen definiert.

Äquivalente nicht-hierarchische Netze:

Zu jedem hierarchischen Netz kann ein nicht-hierarchisches Netz konstruiert werden, was dasselbe Verhalten und die entsprechenden Eigenschaften des hierarchischen Netzes besitzt.

Konstruktion:

- Es werden von jeder Seite soviel Kopien erzeugt, wieviel Instanzen diese Seite im hierarchischen Netz hat.

- Entfernen aller Substitutionstransitionen zusammen mit ihren Umgebungskanten.
  (Das damit entstehende nicht zusammenhängende Netz enthält einen Platz für jede Platzinstanz, eine Transition für jede Transitionsinstanz und eine Kante für jede Kanteninstanz.)

- Zusammenfassen aller Elemente jeder Platzinstanzgruppe zu einem einzelnen Platz mit allen Kanten der ursprünglichen Platzinstanz.

Das so konstruierte nicht-hierarchische Netz verfügt über je einen Platz für jede Platzinstanz-gruppe, je eine Transition für jede Transitionsinstanz und je eine Kante für jede Kanteninstanz des hierarchischen Netzes.

Dieses Netz heißt das zu dem hierarchischen Netz **äquivalente** nicht-hierarchische Netz und es hat analoges Verhalten und ähnliche Eigenschaften wie das hierarchische Netz.

Definition: **Äquivalentes nicht-hierarchisches Netz**

HPN = (S, SK, SA, PK, PT, PA, FS, FT, PP) sei ein hierarchisches Petri-Netz.
Das Netz PN* = (P*, T*, F*) heißt das zu HPN **äquivalente nicht-hierarchische Petri-Netz**, wenn P* = **PIG** (Platzinstanzgruppe von HPN), T* = TI (Transitionsinstanzmenge von HPN, F* = FI (Kanteninstanzmenge von HPN) und für alle (p, id) $\in$ PI (Platzinstanzmenge von HPN) und alle (p, t) $\in P\times T$, (t, p) $\in T\times P$ gilt:

$(p, t) \in F \to ([p, id], [t, id]) \in F^*$ und $(t, p) \in F \to ([t, id], [p, id]) \in F^*$.

(Bem.: [p, id] $\in$ **PIG** bezeichnet die Äquivalenzklasse der Platzinstanzen (p, id) $\in$ PI .)

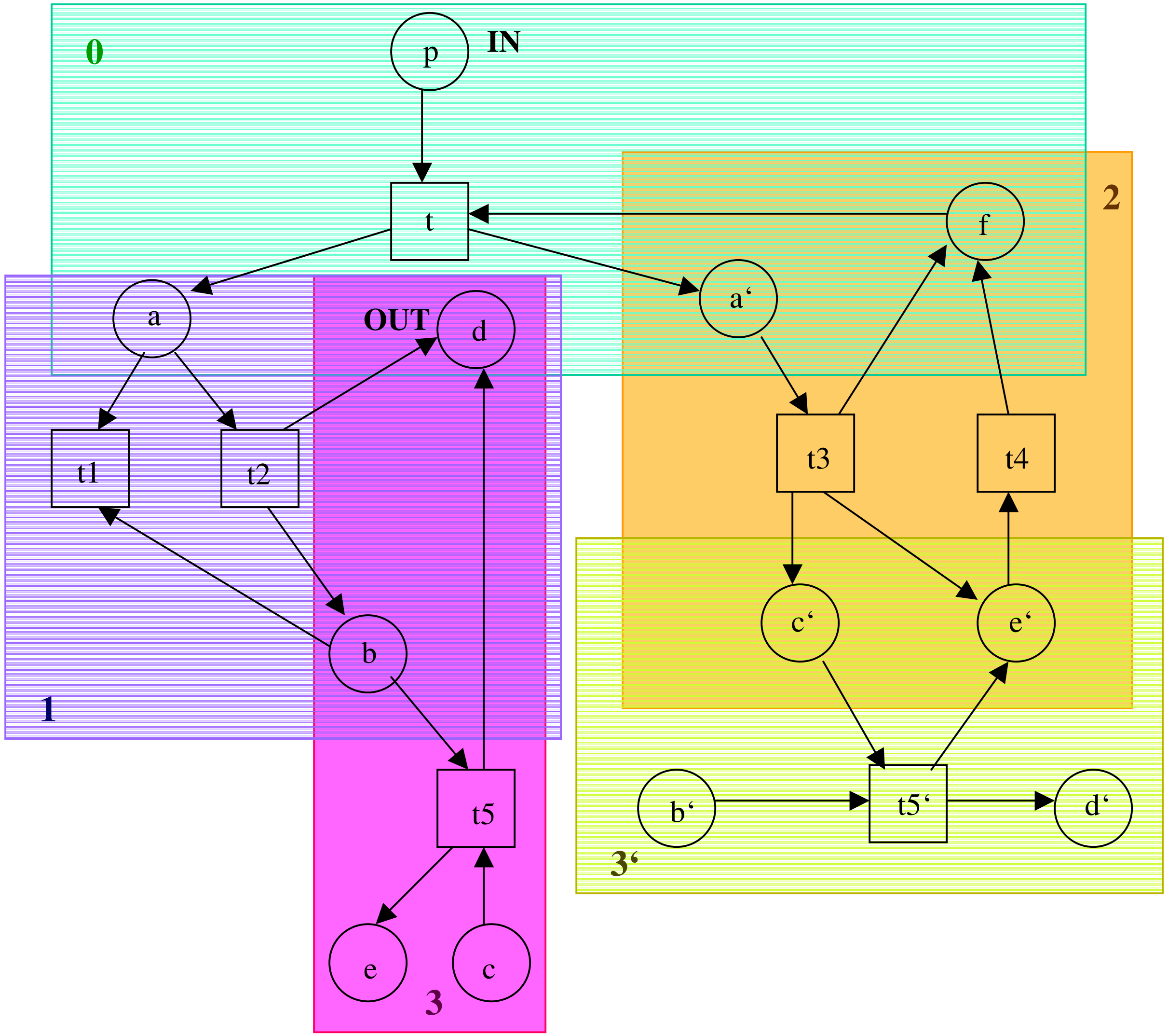
Satz:
Wenn HPN ein hierarchisches Petri-Netz und PN* ein dazu äquivalentes nicht-hierarchisches Petri-Netz, dann gilt für alle Markierungen M_i bzw. Schritte G von HPN und die entsprechenden Markierungen M_i^* mit $M_i^*([p, id]) = M_i(p, id)$ wo $(p, id) \in PI$ bzw. Schritte G* von PN*:

$$M_1 \to_G M_2 \text{ in HPN} \quad \text{gdw.} \quad M_1^* \to_{G^*} M_2^* \text{ in PN}^* .$$

Das hierarchische Netz HPN hat demnach dieselbe Menge von Markierungen, Schritten und schaltbaren Transitionsfolgen wie das nicht-hierarchische Netz PN*.
Nach vorstehenden Satz sind demnach beide Netze verhaltensäquivalent.

Umgekehrt kann natürlich zu jedem nicht-hierarchischen Netz ein äquivalentes hierarchisches Netz angegeben werden. Trivialerweise kann dazu das nicht-hierarchische Netz als einziges Element der Hauptseitenmenge PP des hierarchischen Netzes und SN, PN, FS als leere Mengen gewählt werden.

Beispiel:
Zu dem hierarchischen Beispielnetz entsteht das folgende äquivalente nicht-hierarchische Netz



Die Plätze a, b, c, d, e liegen jeweils in zwei verschiedenen Platzinstanzgruppen und treten deshalb zweifach auf (ohne Strich in Instanz 1und 3, mit Strich in Instanz 2 und 3‘ .

5. Erweiterte Petri-Netze

Neben den bereits eingeführten Erweiterungen von Petri-Netzen hinsichtlich Marken- und Transitionseigenschaften oder Zeitverhalten betrachten wir jetzt Erweiterungen der Netzstruktur, die die Ausdrucksfähigkeit von Petri-Netzen bzgl. der beschriebenen Sprachen erhöhen, bzw. bestimmte reale Systeme überhaupt erst modellierbar machen.

Diese Erweiterungen betreffen insbesondere die Art der Kanten im Netz bzw. die Variabilität der Kantengewichte. Neben den bisher verwendeten (normalen) Kanten von Plätzen zu Transitionen werden jetzt Kanten (**Verbotskanten**) zugelassen, die bei markiertem Platz das Schalten der Transition verhindern, also ein Schaltverbot für die anhängende Transition bewirken. Mit diesen Kanten wird gewissermaßen eine Nullabfrage (im Platz) ermöglicht, was die Ausdrucksfähigkeit der Netzsprachen auf das Niveau der Turing-Berechenbarkeit anhebt.

Eine andere Art von Kanten (**Abräumkanten**) soll der Beschreibung des Entzugs der Schaltmöglichkeit dienen (z.B. Entzug von Betriebsmitteln, Liquidation von Prozessen, Unterbrechung der Bearbeitung, etc.). Durch diese Kanten werden beim Schalten der anhängenden Transition alle Marken aus dem Vorplatz entfernt, unabhängig davon wie viel Marken vorher vorhanden waren. Das Zulassen solcher Abräumkanten führt dazu, dass die Erreichbarkeit von Markierungen nicht mehr entscheidbar ist.

Verbotskanten und Abräumkanten lassen sich auch als Spezialfälle von **variablen Kantengewichten** auffassen, die von der jeweils vorliegenden Markierung abhängig sind. Damit kann das Verhalten der beiden vorher beschriebenen Kantenarten in einfacher Weise gleichwertig modelliert werden. Komplexe Systeme sind so relativ einfach und übersichtlich zu beschreiben.

Netze mit Verbotskanten

Zu den üblichen Kanten im Netz werden jetzt Kanten zugelassen, die von Stellen zu Transitionen verlaufen und das Schalten der entsprechenden Transition verhindern, wenn die Markierung der Stelle das Kantengewicht übersteigt. Diese als Inhibitor- oder Verbotskanten bezeichneten Kanten werden graphisch durch —● statt → dargestellt. (In der Literatur wird oft auch –//→ verwendet.)

<u>Definition</u>:

1. $N = (S, T, F, I)$ heißt ein ***Netz mit Verbotskanten***, wenn (S, T, F) ein übliches Petri-Netz, $I \subseteq S \times T$ und $F \cap I = \emptyset$ ist.

2. Eine Transition t heißt in N bei einer Markierung m ***aktiviert*** (m-aktiviert), wenn für alle $s \in S$ gilt: $(s, t) \in F \rightarrow m(s) > 0$ und $(s, t) \in I \rightarrow m(s) = 0$.

(Bemerkung: In bestimmten Fällen kann es auch sinnvoll sein, zwischen Stellen und Transitionen sowohl normale als auch Verbotskanten zuzulassen (d.h. auf die Disjunktheit von F und I zu verzichten), so dass die anliegende Transition dann tot ist.)

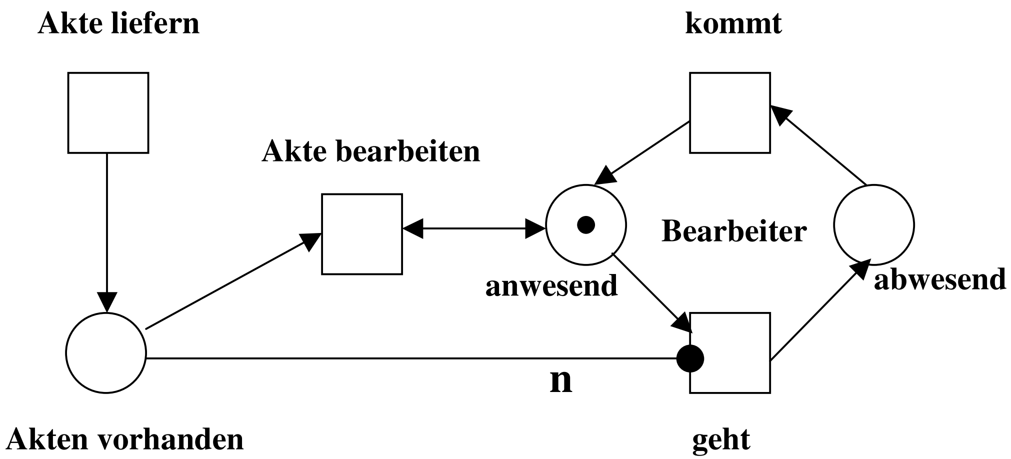
Bei Netzen mit Kantengewichten W_F für normale Kanten und W_I für Verbotskanten ist eine Transition t bei einer Markierung m aktiviert, wenn für alle $s \in S$ gilt:

$$(s, t) \in F \rightarrow m(s) > W_F(s, t) \text{ und } (s, t) \in I \rightarrow m(s) < W_I(s, t) ,$$

d.h., das Schalten der an einer Verbotskante anliegenden Transition wird nur dann verhindert, wenn die Markierung der Vorstelle das Kantengewicht erreicht oder übersteigt.

Bemerkung:
Die Begriffsbildungen und Analyseverfahren für die Erreichbarkeit in Netzen mit Verbotskanten sind analog zu den üblichen Netzen einzuführen.
Auch Netze mit Verbotskanten können zu gefärbten Netzen, hierarchischen Netzen oder Netzen mit Zeitbegriffen erweitert werden.
Die diesbezüglichen Definitionen und Eigenschaften sind analog übertragbar.

Beispiel: Modellierung einer Aktenbearbeitung mit Pausen
Ein Bearbeiter darf nur dann eine Pause einlegen (gehen) wenn keine Akten mehr vorhanden sind.

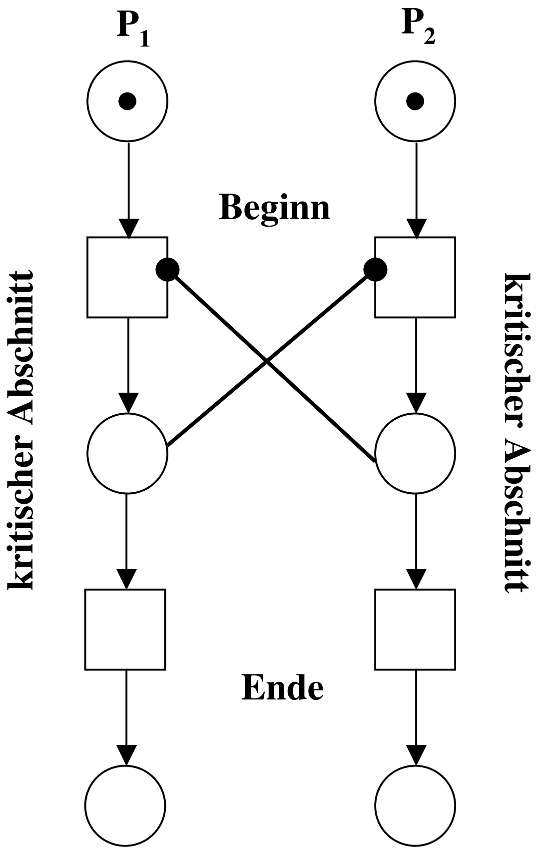


Für den Fall, dass der Bearbeiter nur dann gehen darf, wenn weniger als n Akten vorhanden sind, gewichten wir die Verbotskante mit n.

Solange die Stelle „Akten vorhanden“ unbegrenzte Kapazität besitzt, ist es unmöglich diesen Vorgang durch ein übliches (endliches) Netz zu beschreiben.

Beispiel:

Das nachfolgende Netz modelliert den wechselseitigen Ausschluss zweier Prozesse in ihren kritischen Abschnitten durch Verbotskanten.



Natürlich können die üblichen Netze trivialerweise als Spezialfälle von Netzen mit Verbotskanten aufgefasst werden. Netze mit Verbotskanten leisten also mindestens soviel wie Netze ohne Verbotskanten. Es erhebt sich aber nun die Frage, ob und in welchem Sinne Netze mit Verbotskanten mehr leisten als Netze ohne Verbotskanten.

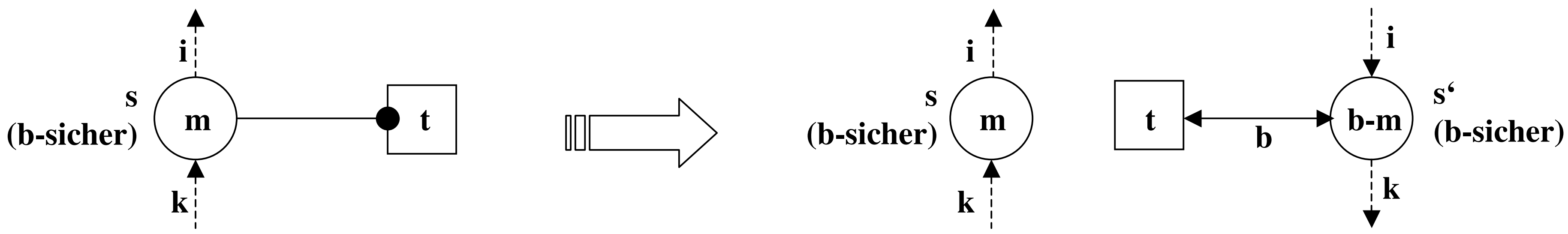
Satz: Beschränktheit von Netzen mit Verbotskanten
Für Netze mit (existierenden) Verbotskanten ist die Beschränktheit (bzgl. Anzahl der Marken in den Stellen) **nicht** entscheidbar.

Begründung:
Jede Maschine mit endlich vielen Registern und endlichen Programmen aus Inkrementieren, Dekrementieren, Umspeichern, Sprüngen und Verzweigungen mit Nullabfrage (saubere Stelle) kann so in ein Netz mit Verbotskanten übersetzt werden, dass jedem Schritt in der Maschine dem Schalten einer Transition entspricht.
Führt man jetzt eine zusätzliche Schrittzählstelle s mit einfach gewichteten Kanten (t, s) von allen Transitionen zu s ein, dann wäre mit der Entscheidbarkeit der Beschränktheit dieses Netzes auch entscheidbar, ob in s nur endlich viele Marken auftreten können, d.h., die Maschine nur endlich viele Schritte ausführt.
Da das gewählte Maschinenmodell den Turingautomaten gleichmächtig ist, wäre damit das Halteproblem lösbar. Da dies aber nach Berechenbarkeitstheorie nicht sein kann, folgt die Aussage des Satzes.

Folgerung:
Da andererseits die Beschränktheit von (üblichen) Netzen ohne Verbotskanten mit den früher angegebenen abbrechenden Verfahren sehr wohl entscheidbar ist, leisten demnach Netze mit Verbotskanten mehr als solche ohne Verbotskanten (echt größerer Zustandsraum).

Satz:
Jede von einer b-sicheren Stelle ausgehende Verbotskante kann durch ein Teilnetz ohne Verbotskanten so ersetzt werden, dass das Gesamtnetz nach dieser Ersetzung das gleiche Verhalten wie das ursprüngliche Netz mit Verbotskanten hat.

Konstruktionsverfahren:
Zu jeder b-sicheren Stelle s, von der eine Verbotskante zu einer Transition t ausgeht, wird eine neue b-sichere Stelle s‘ mit der Markierung b-m(s) eingeführt und die Verbotskante selbst durch eine Hin- und Rückkante zwischen der Stelle s‘ und der Transition t mit dem Gewicht b ersetzt. Die anderen an der Stelle s anliegenden Kanten werden mit gleichem Gewicht in umgekehrter Richtung auf die Stelle s‘ übertragen, wie folgt dargestellt. Die Gesamtmarkenzahl von s und s‘ bleibt damit konstant b, so dass die Transition t nur dann schalten kann, wenn s sauber ist. Ansonsten ändert sich das Verhalten des Gesamtnetzes nicht.



Ersatz für Verbotskante bei b-Sicherheit

Netze mit Prioritäten

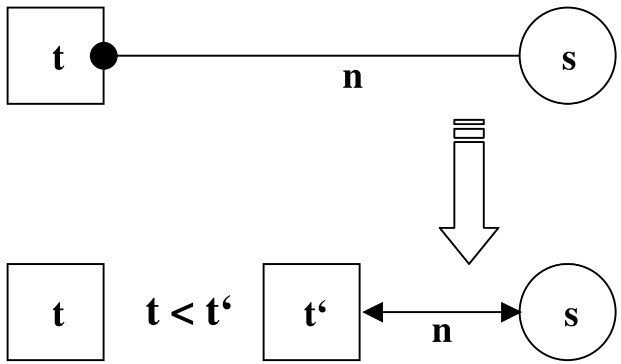
Verbotskanten können auch durch Einführung von Prioritäten für die Transitionen beschrieben werden. Dazu wird eine irreflexive Halbordnung < auf der Menge der Transitionen als Prioritätsrelation eingeführt. Bei einer gegebenen Markierung m ist eine Transition t dann m-aktiviert, wenn sie die üblichen Aktivierungsbedingungen erfüllt und keine Transition t‘ mit höherer Priorität (t < t‘) m-aktiviert ist.

Definition: Netz mit Prioritäten

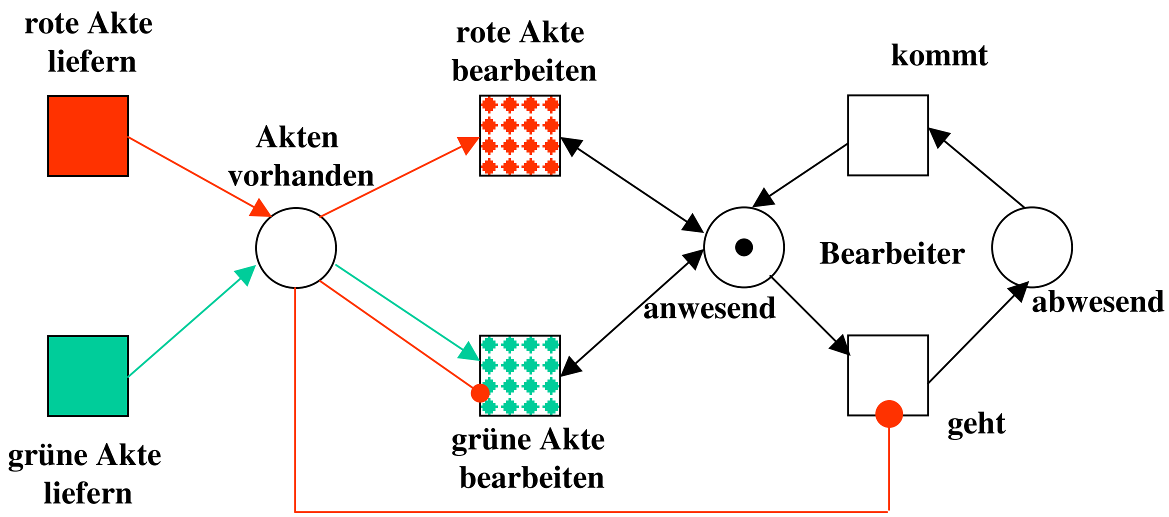
N = (S, T, F, <, m_0) heißt **Netz mit Prioritäten**, falls (S, T, F, m_0) ein Petri-Netz mit der Stellen-Menge S, der Transitionsmenge T, der Kantenmenge F, der Anfangsmarkierung m_0 und < eine irreflexive Halbordnung (transitiv, asymmetrisch) auf T ist.

Schaltverhalten und Erreichbarkeit sind bei Netzen mit Prioritäten analog wie bei üblichen Petri-Netzen erklärt unter Beachtung der Aktivierungsregel: $t \in T$ ist m-aktiviert gdw.
für alle $s \in {}^{\bullet}t$ gilt $m(s) > 0$ und existiert kein $t' \in T$ mit $t < t'$ und t‘ ist m-aktiviert.
(Bei Vorgabe von Stellenkapazitäten bzw. Kantengewichten ist dies wie üblich einzuschränken.)

Verbotskanten können durch Hin- und Rück-Kanten zu allen Transitionen höherer Priorität (gleichgewichtig) ersetzt werden (bei unendlicher Kapazität von s).



Umgekehrt können Prioritäten durch Verbotskanten beschrieben werden, wie das nachfolgende Beispiel einer Vorgangsbearbeitung mit den Dringlichkeitsstufen rot und grün zeigt, wobei rote Akten vor grünen Akten zu bearbeiten sind (rot hat höhere Priorität).

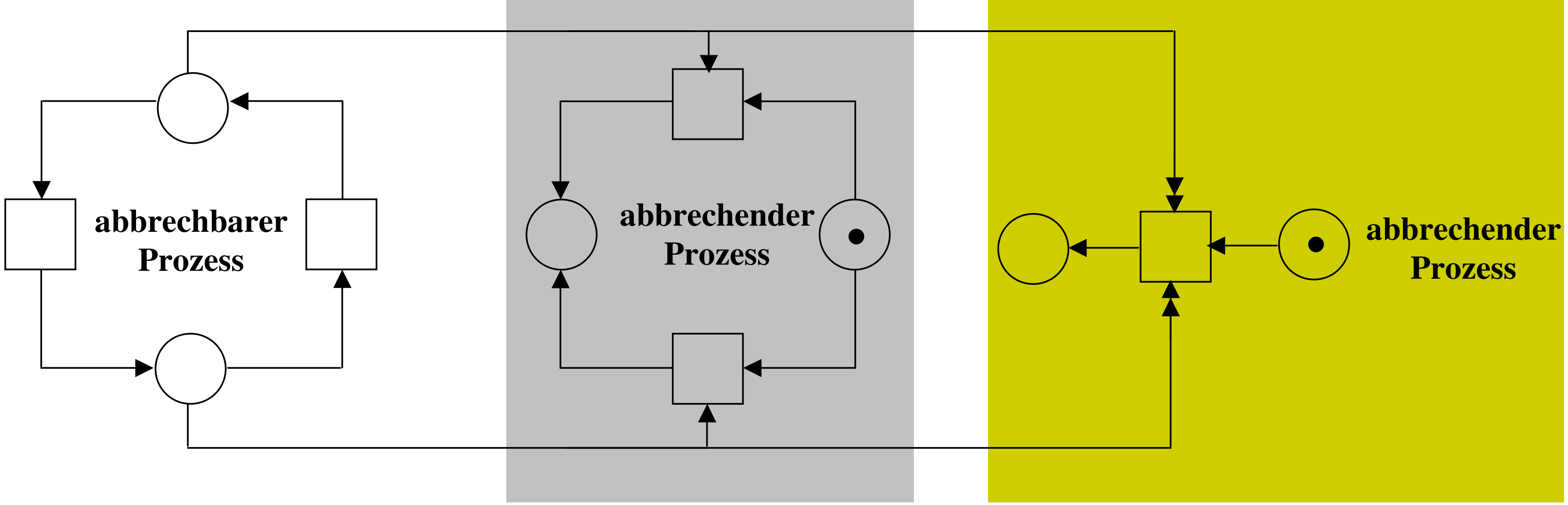


Vorgangsbearbeitung mit Dringlichkeitsstufen

Netze mit Abräumkanten

Bei der Beschreibung von Prozessen müssen häufig Abbrüche unabhängig vom aktuellen Prozesszustand ausgeführt werden. Wenn dazu für jeden möglichen Prozesszustand ein eigener Stornierungsvorgang eingeführt wird, führt das bei höherer Zustandszahl zu sehr unübersichtlichen Netzen. Da dies in vielen Fällen für die Prozessbeschreibung aber nicht von Interesse ist, werden spezielle Kanten von Stellen zu Transitionen zugelassen, die eine Transition veranlassen, aus der entsprechenden Vorstelle alle Marken abzuziehen, womit allen anderen Nachtransitionen dieser Stelle die Konzession entzogen wird. Diese als ***Abräumkanten*** bezeichneten Kanten werden durch Doppelpfeile $\twoheadrightarrow$ gekennzeichnet.

Beispiel: Prozessabbruch ohne und mit Abräumkanten

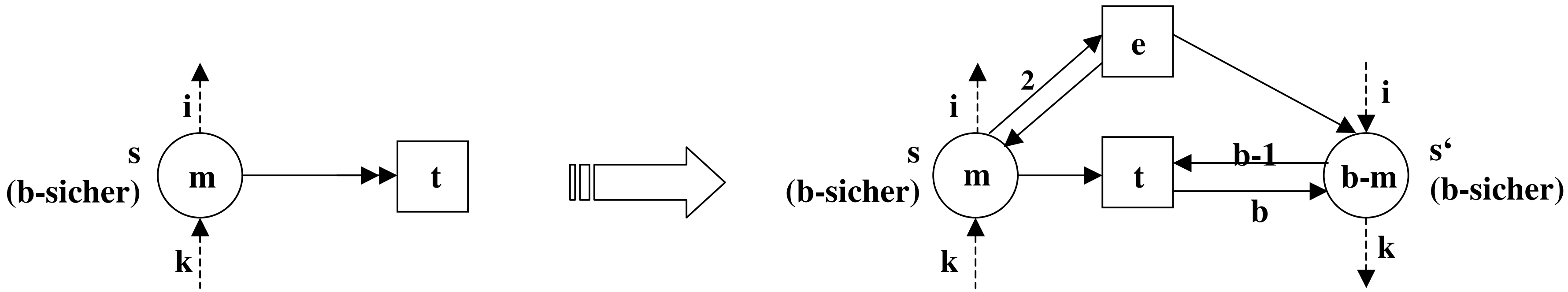


Definition: Netz mit Abräumkanten
$N = (S, T, F, R)$ heißt Netz mit Abräumkanten, wenn (S, T, F) ein Petri-Netz und $R \subseteq S \times T$ eine Menge von Abräumkanten.
Falls eine Transition t im Netz N m-aktiviert ist und $(s, t) \in R$, dann gilt für die Folgemarkierung $f(m, t)(s) = 0$.

Abräumkanten verlaufen von Stellen zu Transitionen und besitzen kein Kantengewicht. Von Stellen zu Transitionen können sowohl Abräumkanten als auch normale Kanten verlaufen, d.h., F und R müssen nicht disjunkt sein.

Die Erreichbarkeit von Markierungen in Netzen mit Abräumkanten ist wie bei üblichen Petri-Netzen definiert und zu analysieren.

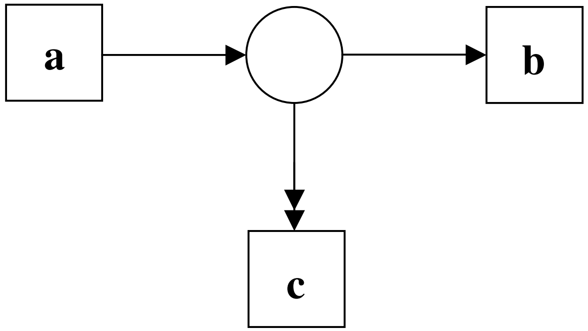
Abräumkanten von b-sicheren Stellen sind wieder durch übliche Petri-Netze zu modellieren.



Ersatz für Abräumkante bei b-Sicherheit

Das nachfolgende Netz beschreibt für die angegebene Markierung als Anfangs- und End-markierung eine Sprache über {a, b, c}, die neben dem leeren Wort, alle Wörter $a^n b^m c$ ($m \leq n \geq 1$) oder $a^n b^n$ ($n \geq 1$) bzw. Folgen davon enthalten.

Netz mit Abräumsprache

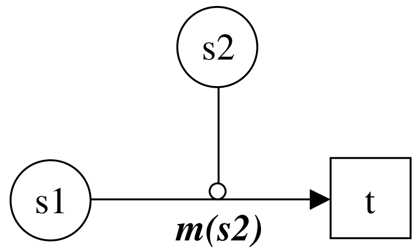


Das Beispiel lässt vermuten, dass Netze mit Abräumkanten im allgemeinen Fall ausdrucks-stärker sind als übliche Petri-Netze.
In diesem Fall ist auch das Erreichbarkeitsproblem für Netze mit Abräumkanten nicht entscheidbar.

Netze können neben Abräumkanten auch Verbotskanten enthalten.
Ihre Beschreibung und ihr Verhalten lässt sich entsprechend der vorhergehenden Definitionen einführen.

Netze mit markengesteuerten Kantengewichten

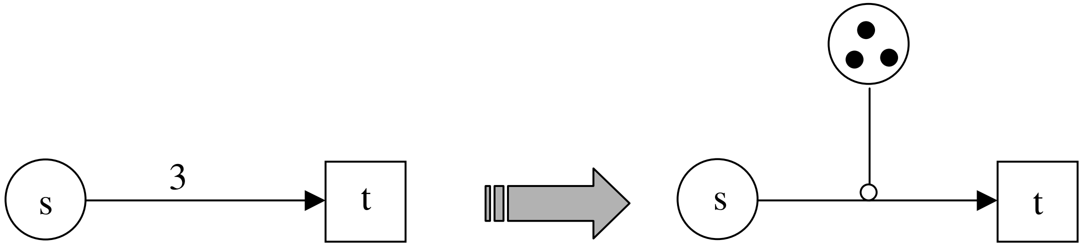
Bisher hatten wir nur Netze mit konstanten Kantengewichten betrachtet. Wir wollen jetzt Kantengewichte in Abhängigkeit von der Stellenmarkierung einführen. Im nachfolgenden Beispiel hat die Transition t Konzession, wenn auf dem Platz s_1 mindestens so viele Marken liegen, wie die jeweilige Markierung von s_2 angibt.



Markierung von s2 als Gewicht der Kante (s1,t)

> <u>Definition</u> :
> N = (S, T, F) heißt Netz mit (einfach) markengesteuerten Kantengewichten, falls S (Stellenmenge), T (Transitionsmenge), F (Kantenmenge) endliche paarweise disjunkte Mengen und F: $(S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow S$.

Bemerkung: Die Kante (x, y) ist mit der Markierung der Stelle F(x, y) gewichtet, d.h., bei der Markierung m entspricht eine Kante $((s_1, t), s_2)$ der Kante (s_1, t) eines üblichen Petri-Netzes mit dem Kantengewicht $m(s_2)$.
Petri-Netze sind als Spezialfälle von Netzen mit markengesteuerten Kanten-gewichten aufzufassen, da konstante Kantengewichte durch Einführung konstant markierter Gewichtungsstellen nachgebildet werden können.



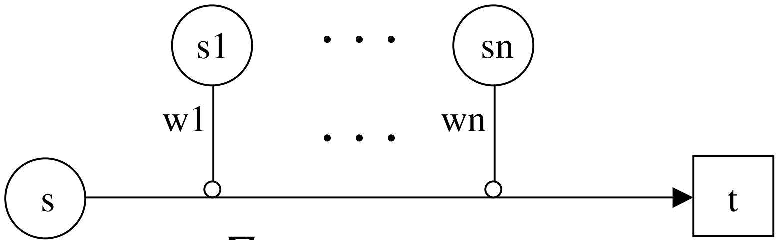
Modellierung konstanter Kantengewichte

<u>Verallgemeinerung</u>: Mehrfach markengesteuerte Kantengewichte

Die Funktion F wird zur Relation $F \subseteq (S \times T \times S) \cup (T \times S \times S)$ erweitert, d.h., es werden mehrere Gewichtungsstellen s mit $(x, y, s) \in F$ zugelassen, so dass das Gewicht der Kante (x, y) bei der Markierung m die Markensumme $\Sigma_{(x, y, s) \in F}\, m(s)$ aller dieser Gewichtungsstellen bildet.

Außerdem können die Gewichtungskanten aus F selbst wieder mit konstanten Gewichten versehen werden, was durch sogenannte Schattenstellen (wie oben dargestellt) beschreibbar ist.

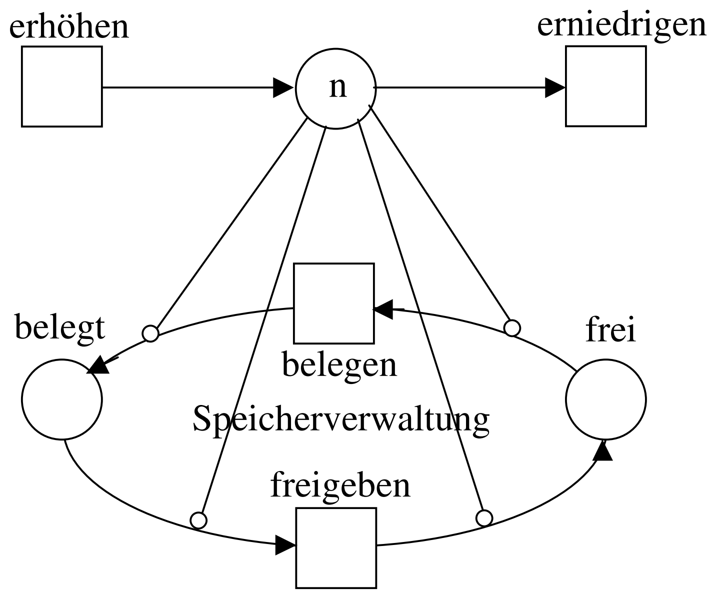
Insgesamt können wir damit Kanten durch Linearkombinationen von Stellenmarkierungen gewichten.



$$\Sigma_{1 \leq i \leq n} (wi \cdot m\,(si))$$

Beispiel:

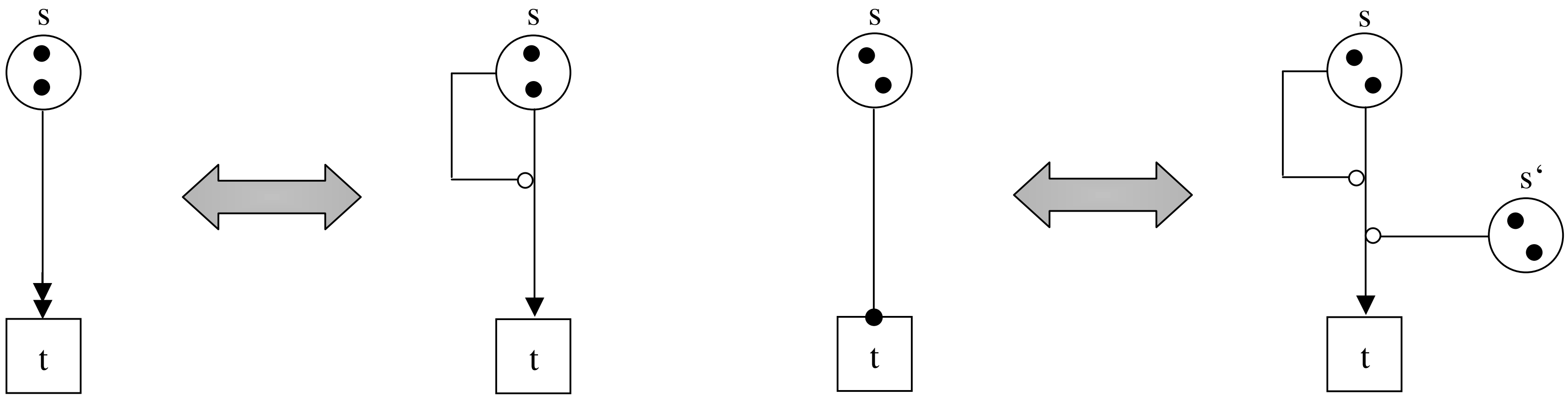
Ein Speicherverwaltungssystem stellt für unterschiedliche Benutzerprozesse gleich große Speicherbereiche zur Verfügung und nimmt diese auch wieder zurück.
Benutzerprozesse können auch mehrere Speicherbereiche gemeinsam zurückgeben und das Verwaltungssystem nimmt diese ohne Unterbrechung durch andere Aktionen an.
Die Speicherbereiche selbst sollen durch andere Benutzerprozesse wiederverwendbar sein.
Durch das nachfolgende Netz wird die Anzahl n von Speicherbereichen als Markierung einer Stelle festgelegt, die das Kantengewicht für die Speicherverwaltung mit den Transitionen „belegen“ und „freigeben“ bestimmt. Die Transitionen „erhöhen“ und „erniedrigen“ können die Anzahl n der verfügbaren Speicherbereiche verändern.



Kantengewichtung durch Stelleninhalt

<u>Satz</u>:

> Netze mit Abräumkanten und Verbotskanten können durch Netze mit markengesteuerten Kantengewichten nachgebildet werden.
> Abräumkanten können durch Netze mit einfach markengesteuerten Kantengewichten und Verbotskanten durch Netze mit mehrfach markengesteuerten Kantengewichten ersetzt werden.



Abräumkante | einfach gewichtete Kante | Verbotskante | doppelt gewichtete Kante

Durch das Schalten von t werden der Stelle s so viele Marken entzogen, wie vorher vorhanden waren. Die Stelle s ist danach sauber.

Die Transition t kann nur dann schalten, wenn die Markierung von s nicht kleiner als die Markierung von s und s’ zusammen, also s sauber ist.

<u>Bemerkung</u>:
Netze mit mehrfach markengesteuerten Kantengewichten sind wie Netze mit Verbotskanten Turing-mächtig. Verfahren für die Erreichbarkeitsanalyse können analog wie für Petri-Netze durchgeführt werden.