Universität Leipzig
Institut für Informatik

Prof. Dr. Manfred Droste
Erik Paul

Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung

Automatentheorie

Serie 3

Hausaufgabe 3.1 (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 2.4 aus der Vorlesung, d.h.:

(a) Das Monoid A^* ist frei über der Menge A: für jedes Monoid $(M, \circ, 1)$ und jede Abbildung $f\colon A \to M$ existiert genau ein Homomorphismus $g\colon A^* \to M$ mit $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.

(b) Für jedes Monoid M gibt es eine Menge A mit einem Epimorphismus $g\colon A^* \to M$.

Hausaufgabe 3.2 (8 Punkte)

Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge von G. Weiter sei die Relation $\sim_U$ definiert durch

$$g \sim_U h \Leftrightarrow gh^{-1} \in U.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sim_U$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn U eine Untergruppe von G ist.

(b) $\sim_U$ ist genau dann eine Kongruenz, wenn U ein Normalteiler von G ist.

(c) $[g] = Ug$ gilt für alle $g \in G$ falls $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation ist, wobei $Ug = \{ug \mid u \in U\}$.

Hierbei heißt U *Normalteiler* von G, wenn U eine Untergruppe von G ist und für alle $u \in U$ und alle $g \in G$ gilt, dass $gug^{-1} \in U$.

Zusatzaufgabe 3.1 (+2 Punkte)

Sei $(G, \cdot, e)$ eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G.
Zeigen Sie:

(a) $|U| = |Ug|$ gilt für alle $g \in G$.

(b) $|G| = |G/\sim_U| \cdot |U|$

Hierbei bezeichnet $|X|$ die Kardinalität einer Menge X.

Seminaraufgabe 3.1
Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind. Hierbei ist $U^c = G \setminus U$.

(a) $\forall g \in U\ \forall h \in U\colon gh^{-1} \in U$

(b) $\forall g \in U\ \forall h \in U\colon (gh \in U \wedge g^{-1} \in U)$

(c) $\forall g \in U\ \forall h \in U^c\colon gh \in U^c$

Erfüllt U eine dieser äquivalenten Eigenschaften, nennen wir U eine *Untergruppe* von G.

Seminaraufgabe 3.2
Zeigen Sie, dass im Allgemeinen die Untermonoide einer Gruppe nicht zwangsläufig auch Untergruppen sind.

Seminaraufgabe 3.3
Sei A ein Alphabet und sei $\sim = \{(u, v) \mid |u|_a = |v|_a \text{ für alle } a \in A\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenz auf A^* ist.

(b) Geben Sie ein Repräsentantensystem von $A^*/{\sim}$ an.

(c) Bestimmen Sie das syntaktische Monoid von $L = \{[ab]\} \subseteq A^*/{\sim}$.

(d) Geben Sie den Minimalautomaten von L an.

Termine:

- Die Hausaufgaben können in Gruppen zu je zwei Personen bearbeitet werden. Alle abgegebenen Aufgaben müssen vorgerechnet werden können.
- Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt am 08.11.2019 entweder vor der Vorlesung oder bis 12:00 Uhr mittags im Briefkasten „Automatentheorie“ (Poststelle im Augusteum, Raum A514, 5. Etage). Beschriften Sie bitte *jedes* Lösungsblatt mit Name(n) und Matrikelnummer(n).
- Die Seminaraufgaben werden in der Übung am 04.11.2019 besprochen.