Diskrete Strukturen

Vorlesung 13: Graphen — Planarität & Färbbarkeit

22. Januar 2019

Nächste Termine — Modul "Diskrete Strukturen"

Hörsaalübung (Mo. 9:15)	Vorlesung (Di. 17:15)
21.1. ————	22.1. Planarität von Graphen (6. Abgabe)
28.1. Hörsaalübung 7. Übungswoche	29.1. Färbbarkeit von Graphen (Abgabe 2. Bonushalbserie)
4.2. Tutorium (Klausurvorbereitung)	5.2. Arithmetik (hoffentlich Auswertung Eval.)
11.2. ————	12.2. ————
18.2. Prüfungswoche	19.2. Prüfung am 22.2.

Vorlesungsstruktur

1. Mathematische Grundlagen
   - Aussagen- und Prädikatenlogik
   - Naive Mengenlehre
   - Relationen und Funktionen

2. Diskrete Strukturen
   - Algebraische Strukturen
   - Bäume und Graphen
   - Arithmetik

Heutige Vorlesung

- Bäume und planare Graphen
- Charakterisierung Planarität
- Definition Färbung
- Färbbarkeit spezieller Graphen

Bitte Fragen direkt stellen!

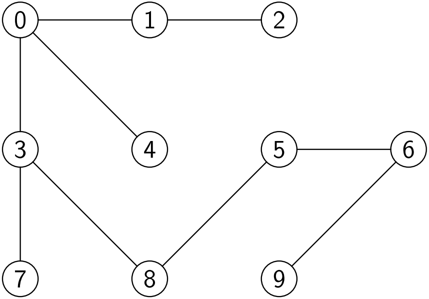
§13.1 Definition (Baum)

Ein ungerichteter Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ heißt auch Baum gdw.
$\mathcal{G}$ genau eine starke Zusammenhangskomponente hat und sowohl schlingen- als auch kreisfrei ist.

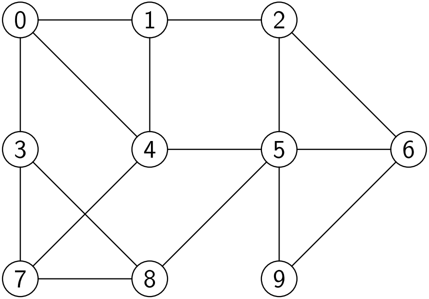
§13.1 Definition (Baum)

Ein ungerichteter Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ heißt auch Baum gdw.
$\mathcal{G}$ genau eine starke Zusammenhangskomponente hat und sowohl schlingen- als auch kreisfrei ist.

Baum



kein Baum



§13.2 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher ungerichteter Graph mit genau einer starken Zusammenhangskomponente. Dann existiert ein Baum $\mathcal{T} = (E, B)$, der ein Untergraph von $\mathcal{G}$ ist.

§13.2 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher ungerichteter Graph mit genau einer starken Zusammenhangskomponente. Dann existiert ein Baum $\mathcal{T} = (E, B)$, der ein Untergraph von $\mathcal{G}$ ist.

Beweis (direkt; 1/2).

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{(E', K') \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(K) \mid (E', K') \text{ ist ein Baum}\}$$

die endlich und nichtleer ist, denn für jedes $e \in E$ ist $(\{e\}, \emptyset) \in \mathcal{M}$.

§13.2 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher ungerichteter Graph mit genau einer starken Zusammenhangskomponente. Dann existiert ein Baum $\mathcal{T} = (E, B)$, der ein Untergraph von $\mathcal{G}$ ist.

Beweis (direkt; 1/2).

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{(E', K') \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(K) \mid (E', K') \text{ ist ein Baum}\}$$

die endlich und nichtleer ist, denn für jedes $e \in E$ ist $(\{e\}, \emptyset) \in \mathcal{M}$.
Wir wählen $(E', K') \in \mathcal{M}$ mit maximaler Anzahl von Ecken; d.h. $|E'| \geq |E''|$ für alle $(E'', K'') \in \mathcal{M}$. Wir zeigen $E' = E$ indirekt. Sei also $E' \subsetneq E$.

§13.2 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher ungerichteter Graph mit genau einer starken Zusammenhangskomponente. Dann existiert ein Baum $\mathcal{T} = (E, B)$, der ein Untergraph von $\mathcal{G}$ ist.

Beweis (direkt; 1/2).

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{(E', K') \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(K) \mid (E', K') \text{ ist ein Baum}\}$$

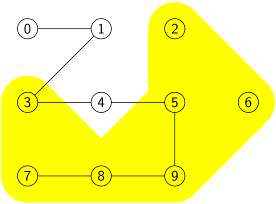
die endlich und nichtleer ist, denn für jedes $e \in E$ ist $(\{e\}, \emptyset) \in \mathcal{M}$. Wir wählen $(E', K') \in \mathcal{M}$ mit maximaler Anzahl von Ecken; d.h. $|E'| \geq |E''|$ für alle $(E'', K'') \in \mathcal{M}$. Wir zeigen $E' = E$ indirekt. Sei also $E' \subsetneq E$. Per Definition gilt $\emptyset \neq E' \subseteq E$ und sei $s \in E'$ und $z \in E \setminus E'$. Da $\mathcal{G}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, gilt $s \sim_{\mathcal{G}} z$ und damit existiert ein Weg $(e_0 \to e_1 \to \cdots \to e_n)$ mit $e_0 = s$ und $e_n = z$.

Beweis (direkt; 2/2).

Da $s \in E'$ und $z \notin E'$ existiert $i \leq n$, so dass $e_{i-1} \in E'$ und $e_i \notin E'$. Wir konstruieren

$$\mathcal{T}' = \left(E' \cup \{e_i\}, K' \cup \{(e_{i-1}, e_i), (e_i, e_{i-1})\}\right)$$

Dies ist offensichtlich ein Baum und $\mathcal{T}' \in \mathcal{M}$. Es gilt aber $|E' \cup \{e_i\}| > |E'|$, womit der Widerspruch erreicht ist. Also gilt $E' = E$ und damit die Behauptung. $\square$



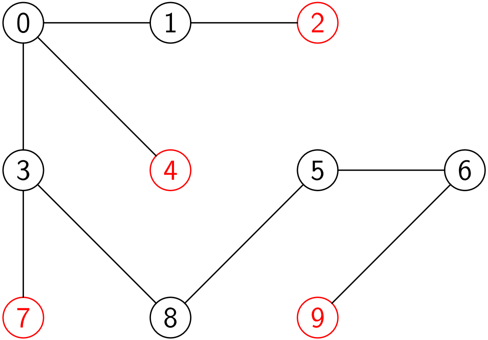
§13.3 Definition (Blatt)

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein Baum.
Eine Ecke $e \in E$ mit $\mathrm{grad}_{\mathcal{T}}(e) = 1$ heißt auch Blatt.

§13.3 Definition (Blatt)

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein Baum.
Eine Ecke $e \in E$ mit $\mathrm{grad}_{\mathcal{T}}(e) = 1$ heißt auch Blatt.

Blätter rot markiert:



§13.4 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum mit $|E| \geq 2$.
Dann hat $\mathcal{T}$ mind. 2 Blätter.

§13.4 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum mit $|E| \geq 2$.
Dann hat $\mathcal{T}$ mind. 2 Blätter.

Beweis (direkt).

Da $\mathcal{T}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss es mind. eine Kante geben. Sei $(s, z) \in K$. Da $\mathcal{T}$ schlingenfrei ist, gilt $s \neq z$.

§13.4 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum mit $|E| \geq 2$.
Dann hat $\mathcal{T}$ mind. 2 Blätter.

Beweis (direkt).

Da $\mathcal{T}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss es mind. eine Kante geben. Sei $(s, z) \in K$. Da $\mathcal{T}$ schlingenfrei ist, gilt $s \neq z$. Da es nur endlich viele Pfade gibt (da sich die Ecken auf dem Pfad nicht wiederholen können), existiert ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ maximaler Länge, so dass $e_i \neq e_n$ für alle $0 \leq i < n$; d.h. alle Ecken des Pfads sind verschieden.

§13.4 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum mit $|E| \geq 2$.
Dann hat $\mathcal{T}$ mind. 2 Blätter.

Beweis (direkt).

Da $\mathcal{T}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss es mind. eine Kante geben. Sei $(s, z) \in K$. Da $\mathcal{T}$ schlingenfrei ist, gilt $s \neq z$. Da es nur endlich viele Pfade gibt (da sich die Ecken auf dem Pfad nicht wiederholen können), existiert ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ maximaler Länge, so dass $e_i \neq e_n$ für alle $0 \leq i < n$; d.h. alle Ecken des Pfads sind verschieden. Wir zeigen indirekt, dass e_0 und e_n Blätter sind.

§13.4 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum mit $|E| \geq 2$.
Dann hat $\mathcal{T}$ mind. 2 Blätter.

Beweis (direkt).

Da $\mathcal{T}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss es mind. eine Kante geben. Sei $(s, z) \in K$. Da $\mathcal{T}$ schlingenfrei ist, gilt $s \neq z$. Da es nur endlich viele Pfade gibt (da sich die Ecken auf dem Pfad nicht wiederholen können), existiert ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ maximaler Länge, so dass $e_i \neq e_n$ für alle $0 \leq i < n$; d.h. alle Ecken des Pfads sind verschieden. Wir zeigen indirekt, dass e_0 und e_n Blätter sind. Sei e_0 kein Blatt; d.h. es existiert $e \in E$, so dass $(e, e_0) \in K$ und $e \neq e_1$. Dann folgt auch $e \neq e_i$ für alle $i \leq n$, denn sonst gäbe es einen Kreis $e \to e_0 \to \cdots \to e_i = e$. Dann ist jedoch $(e \to e_0 \to \cdots \to e_n)$ ein längerer Pfad mit paarweise verschiedenen Ecken. Widerspruch!

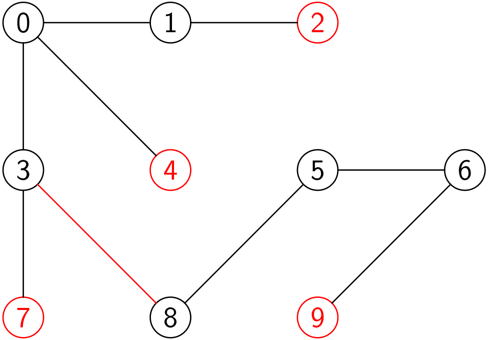
§13.4 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum mit $|E| \geq 2$.
Dann hat $\mathcal{T}$ mind. 2 Blätter.

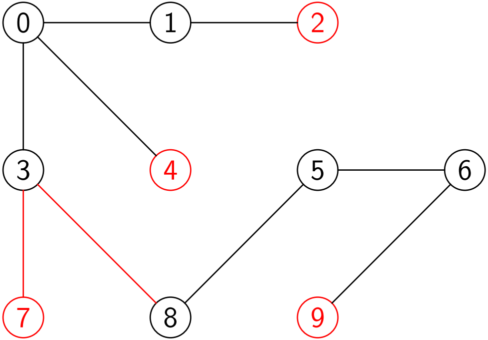
Beweis (direkt).

Da $\mathcal{T}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss es mind. eine Kante geben. Sei $(s, z) \in K$. Da $\mathcal{T}$ schlingenfrei ist, gilt $s \neq z$. Da es nur endlich viele Pfade gibt (da sich die Ecken auf dem Pfad nicht wiederholen können), existiert ein Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_n)$ maximaler Länge, so dass $e_i \neq e_n$ für alle $0 \leq i < n$; d.h. alle Ecken des Pfads sind verschieden. Wir zeigen indirekt, dass e_0 und e_n Blätter sind. Sei e_0 kein Blatt; d.h. es existiert $e \in E$, so dass $(e, e_0) \in K$ und $e \neq e_1$. Dann folgt auch $e \neq e_i$ für alle $i \leq n$, denn sonst gäbe es einen Kreis $e \to e_0 \to \cdots \to e_i = e$. Dann ist jedoch $(e \to e_0 \to \cdots \to e_n)$ ein längerer Pfad mit paarweise verschiedenen Ecken. Widerspruch! Analog für e_n. $\square$

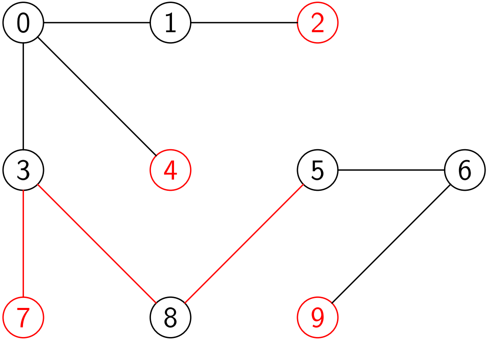
Konstruktion eines maximalen Pfads:



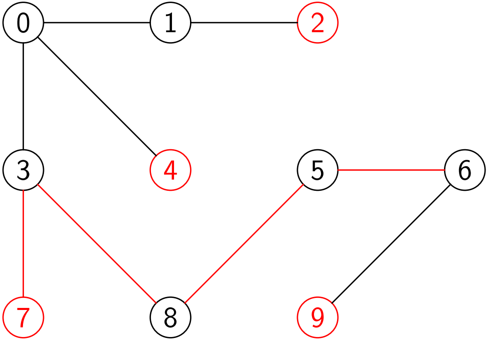
Konstruktion eines maximalen Pfads:



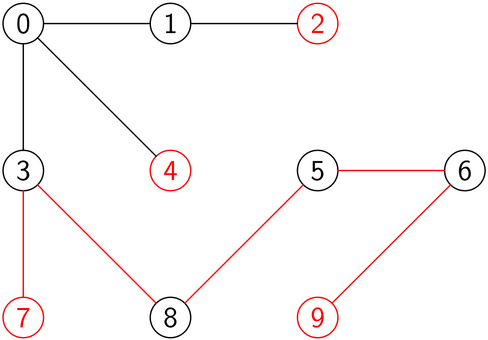
Konstruktion eines maximalen Pfads:



Konstruktion eines maximalen Pfads:



Konstruktion eines maximalen Pfads:



§13.5 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum. Dann gilt $|E| = \frac{|K|}{2} + 1$.

§13.5 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum. Dann gilt $|E| = \frac{|K|}{2} + 1$.

Beweis (indirekt).

Sei (E, K) ein Baum mit der geringsten Anzahl an Ecken, so dass $|E| \neq \frac{|K|}{2} + 1$. D.h. für alle Bäume (E', K') mit $|E'| < |E|$ gilt $|E'| = \frac{|K'|}{2} + 1$.

§13.5 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum. Dann gilt $|E| = \frac{|K|}{2} + 1$.

Beweis (indirekt).

Sei (E, K) ein Baum mit der geringsten Anzahl an Ecken, so dass $|E| \neq \frac{|K|}{2} + 1$. D.h. für alle Bäume (E', K') mit $|E'| < |E|$ gilt $|E'| = \frac{|K'|}{2} + 1$. Offensichtlich gilt $|E| \geq 2$, denn alle Bäume (E', K') mit einer Ecke haben keine Kanten, also $1 = |E'| = \frac{|K'|}{2} + 1 = 1$.

§13.5 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum. Dann gilt $|E| = \frac{|K|}{2} + 1$.

Beweis (indirekt).

Sei (E, K) ein Baum mit der geringsten Anzahl an Ecken, so dass $|E| \neq \frac{|K|}{2} + 1$. D.h. für alle Bäume (E', K') mit $|E'| < |E|$ gilt $|E'| = \frac{|K'|}{2} + 1$. Offensichtlich gilt $|E| \geq 2$, denn alle Bäume (E', K') mit einer Ecke haben keine Kanten, also $1 = |E'| = \frac{|K'|}{2} + 1 = 1$. Folglich hat (E, K) zwei Blätter a, b nach §13.4. Wir betrachten den Graph

$$\mathcal{G} = (E \setminus \{b\}, K \setminus \{(b, e), (e, b)\})$$

wobei $N_{\mathcal{G}}(b) = \{e\}$.

§13.5 Theorem

Sei $\mathcal{T} = (E, K)$ ein endlicher Baum. Dann gilt $|E| = \frac{|K|}{2} + 1$.

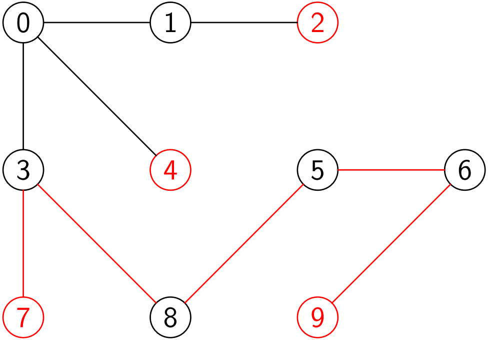
Beweis (indirekt).

Sei (E, K) ein Baum mit der geringsten Anzahl an Ecken, so dass $|E| \neq \frac{|K|}{2} + 1$. D.h. für alle Bäume (E', K') mit $|E'| < |E|$ gilt $|E'| = \frac{|K'|}{2} + 1$. Offensichtlich gilt $|E| \geq 2$, denn alle Bäume (E', K') mit einer Ecke haben keine Kanten, also $1 = |E'| = \frac{|K'|}{2} + 1 = 1$. Folglich hat (E, K) zwei Blätter a, b nach §13.4. Wir betrachten den Graph

$$\mathcal{G} = (E \setminus \{b\}, K \setminus \{(b, e), (e, b)\})$$

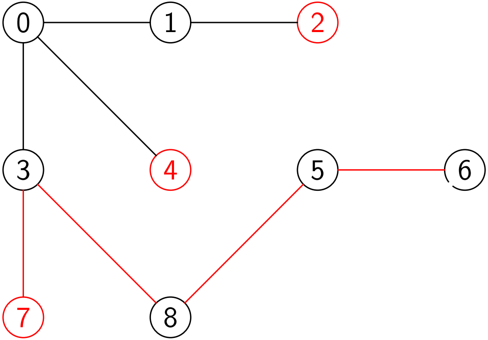
wobei $N_{\mathcal{G}}(b) = \{e\}$. Dies ist wieder ein Baum und da er kleiner ist, gilt die Behauptung für ihn; also $|E| - 1 = \frac{|K|-2}{2} + 1$. Daraus folgt jedoch $|E| = \frac{|K|}{2} + 1$. Widerspruch. $\square$

Entfernung eines Blattes in einem Baum:



Entfernt genau eine Ecke und zwei Kanten

Entfernung eines Blattes in einem Baum:



Entfernt genau eine Ecke und zwei Kanten

§13.6 Definition (planar)

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist planar gdw. er in der $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$-Ebene so darstellbar ist, dass die Kantenbögen (Strecken zwischen den Ecken) sich nicht überschneiden

§13.6 Definition (planar)

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist planar gdw. er in der $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$-Ebene so darstellbar ist, dass die Kantenbögen (Strecken zwischen den Ecken) sich nicht überschneiden

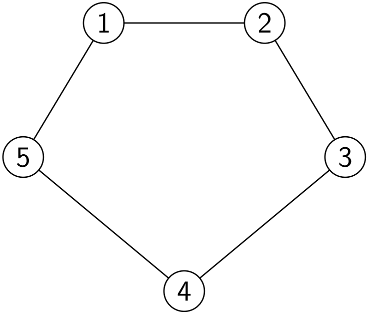
Notizen:

- eine überschneidungsfreie Darstellung genügt
- gleiche Graph kann völlig verschiedenen dargestellt werden
- Kurvenbögen können auch verwendet werden — Theorem von Fáry

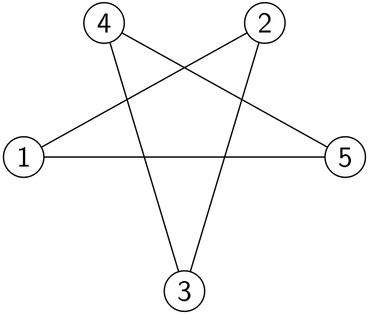
Ungerichteter Graph $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, K)$ ist planar, wobei

$$K = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (1,5)\}$$

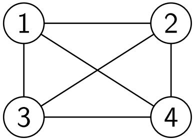
planare Darstellung:



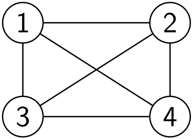
nicht-planare Darstellung:



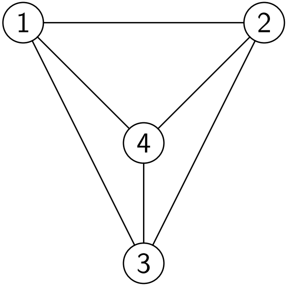
Frage: Ist dieser ungerichtete Graph planar?



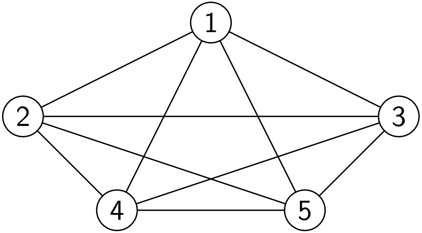
Frage: Ist dieser ungerichtete Graph planar?



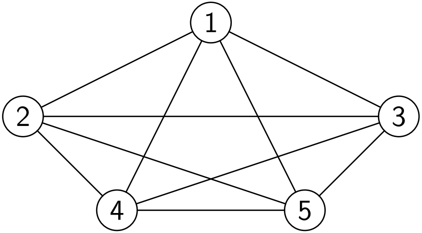
Lösung: planar ✓



Frage: Ist dieser ungerichtete Graph planar?



Frage: Ist dieser ungerichtete Graph planar?



Lösung: Dies scheint schwierig . . .

§13.7 Theorem (Eulersche Polyederformel)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier, planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$\text{Anzahl der Flächen} = \frac{|K|}{2} - |E| + 2$$

§13.7 Theorem (Eulersche Polyederformel)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier, planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$\text{Anzahl der Flächen} = \frac{|K|}{2} - |E| + 2$$

Beweis (vollständige Induktion über $n = \frac{|K|}{2} - |E| + 1$; 1/2).

Da $\mathcal{G}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss $|E| \leq \frac{|K|}{2} + 1$ und damit $n \geq 0$ gelten.

§13.7 Theorem (Eulersche Polyederformel)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier, planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$\text{Anzahl der Flächen} = \tfrac{|K|}{2} - |E| + 2$$

Beweis (vollständige Induktion über $n = \frac{|K|}{2} - |E| + 1$; 1/2).

Da $\mathcal{G}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss $|E| \leq \frac{|K|}{2} + 1$ und damit $n \geq 0$ gelten. Im IA sei daher $n = 0$ und damit $\frac{|K|}{2} = |E| - 1$. Gemäß §13.2 hat $\mathcal{G}$ einen Baum (E, K') als Untergraph. Gemäß §13.5 gilt jedoch $|E| = \frac{|K'|}{2} + 1$ und damit $|K'| = |K|$.

§13.7 Theorem (Eulersche Polyederformel)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier, planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$\text{Anzahl der Flächen} = \frac{|K|}{2} - |E| + 2$$

Beweis (vollständige Induktion über $n = \frac{|K|}{2} - |E| + 1$; 1/2).

Da $\mathcal{G}$ nur eine starke Zusammenhangskomponente hat, muss $|E| \leq \frac{|K|}{2} + 1$ und damit $n \geq 0$ gelten. Im IA sei daher $n = 0$ und damit $\frac{|K|}{2} = |E| - 1$. Gemäß §13.2 hat $\mathcal{G}$ einen Baum (E, K') als Untergraph. Gemäß §13.5 gilt jedoch $|E| = \frac{|K'|}{2} + 1$ und damit $|K'| = |K|$. Also ist $\mathcal{G}$ selbst ein Baum und hat damit weder Kreise noch Schlingen. Also hat $\mathcal{G}$ keine innere Fläche und die Anzahl seiner Flächen ist 1.

$$\frac{|K|}{2} - |E| + 2 = \frac{|K|}{2} - \left(\frac{|K|}{2} + 1\right) + 2 = 1$$

Beweis (vollständige Induktion über $n = \frac{|K|}{2} - |E| + 1$; 2/2).

IH: Gelte die Aussage für n.

IS: Wir betrachten $n + 1 > 0$. Dann ist $|E| < \frac{|K|}{2} + 1$ und $\mathcal{G}$ offenbar kein Baum (§13.5). Also existiert ein Kreis $(e_0 \to e_1 \to \cdots \to e_n)$.

Beweis (vollständige Induktion über $n = \frac{|K|}{2} - |E| + 1$; 2/2).

IH: Gelte die Aussage für n.

IS: Wir betrachten $n + 1 > 0$. Dann ist $|E| < \frac{|K|}{2} + 1$ und $\mathcal{G}$ offenbar kein Baum (§13.5). Also existiert ein Kreis $(e_0 \to e_1 \to \cdots \to e_n)$. Wir entfernen die Kanten $K'' = \{(e_0, e_1), (e_1, e_0)\}$, womit zwei vorher abgetrennte Flächen zu einer Fläche verschmelzen. Für den Graphen $\mathcal{G}' = (E, K')$ mit $K' = K \setminus K''$ gilt die Eulersche Polyederformel gemäß IH, da

$$\frac{|K'|}{2} - |E| + 1 = \frac{|K| - 2}{2} - |E| + 1 = \frac{|K|}{2} - |E| + 1 - \frac{2}{2} = n + 1 - 1 = n$$

Also gilt

$$\text{Anzahl der Flächen von } \mathcal{G} = \text{Anzahl der Flächen von } \mathcal{G}' + 1$$

$$= \frac{|K'|}{2} - |E| + 2 + 1 \qquad = \frac{|K| - 2}{2} - |E| + 3$$

$$= \frac{|K|}{2} - |E| + 2$$

□

Leonhard Euler (* 1707; † 1783)

- schweiz. Mathematiker und Physiker
- für Großteil der math. Notation verantwortlich
- Universalgelehrter

§13.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier und planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$|K| \leq 6 \cdot |E| - 12$$

§13.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier und planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$|K| \leq 6 \cdot |E| - 12$$

Beweis (direkt).

Sei a die Anzahl der Flächen. Jede Fläche wird von mind. 3 Kanten begrenzt und jedes Kantenpaar $\{(s, z), (z, s)\}$ kann nur 2 Flächen begrenzen. Es folgt $3 \cdot a \leq 2 \cdot \frac{|K|}{2} = |K|$.

§13.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier und planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$|K| \leq 6 \cdot |E| - 12$$

Beweis (direkt).

Sei a die Anzahl der Flächen. Jede Fläche wird von mind. 3 Kanten begrenzt und jedes Kantenpaar $\{(s, z), (z, s)\}$ kann nur 2 Flächen begrenzen. Es folgt $3 \cdot a \leq 2 \cdot \frac{|K|}{2} = |K|$. Unter Nutzung der Eulerschen Polyederformel erhalten wir

$$3 \cdot \left(\frac{|K|}{2} - |E| + 2\right) = \frac{3}{2}|K| - 3|E| + 6 \leq |K|$$

§13.8 Theorem

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein endlicher, schlingenfreier und planarer Graph mit genau 1 starken Zusammenhangskomponente. Dann gilt

$$|K| \leq 6 \cdot |E| - 12$$

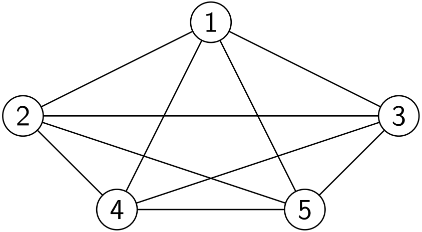
Beweis (direkt).

Sei a die Anzahl der Flächen. Jede Fläche wird von mind. 3 Kanten begrenzt und jedes Kantenpaar $\{(s, z), (z, s)\}$ kann nur 2 Flächen begrenzen. Es folgt $3 \cdot a \leq 2 \cdot \frac{|K|}{2} = |K|$. Unter Nutzung der Eulerschen Polyederformel erhalten wir

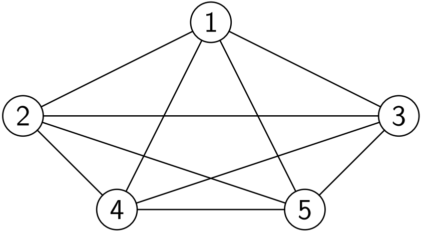
$$3 \cdot \left(\frac{|K|}{2} - |E| + 2\right) = \frac{3}{2}|K| - 3|E| + 6 \leq |K|$$

Durch Umstellen erhalten wir die Behauptung. □

Frage: Ist dieser ungerichtete Graph (E, K) planar?



Frage: Ist dieser ungerichtete Graph (E, K) planar?



Lösung: Nein, denn er ist endlich, schlingenfrei und ungerichtet, aber

- $|K| = 20$ und $|E| = 5$
- damit kann er gemäß §13.8 nicht planar sein, denn $20 > 6 \cdot 5 - 12 = 18$

§13.9 Definition (primitive Unterteilung)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein ungerichteter schlingenfreier Graph. Ein Graph $(E \cup \{e\}, K')$ mit $e \notin E$ ist eine primitive Unterteilung von $\mathcal{G}$ gdw. eine Kante $(s, z) \in K$ existiert, so dass

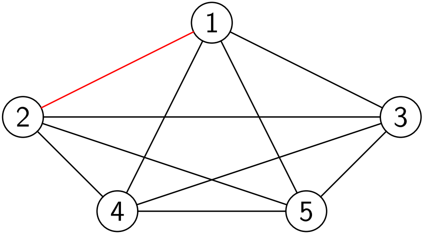
$$K' = \big(K \setminus \{(s, z), (z, s)\}\big) \cup \{(s, e), (e, s), (z, e), (e, z)\}$$

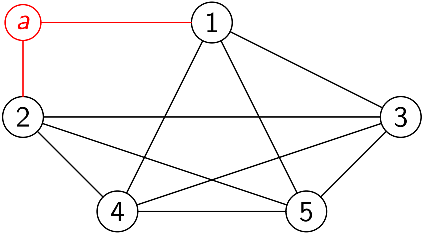
§13.9 Definition (primitive Unterteilung)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein ungerichteter schlingenfreier Graph. Ein Graph $(E \cup \{e\}, K')$ mit $e \notin E$ ist eine primitive Unterteilung von $\mathcal{G}$ gdw. eine Kante $(s, z) \in K$ existiert, so dass

$$K' = \big(K \setminus \{(s,z),\ (z,s)\}\big) \cup \{(s,e),\ (e,s),\ (z,e),\ (e,z)\}$$

rechts eine primitive Unterteilung von links





§13.10 Definition (Unterteilung)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein ungerichteter schlingenfreier Graph. Ein Graph $\mathcal{G}' = (E', K')$ ist eine Unterteilung von $\mathcal{G}$ gdw. Graphen $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ existieren, so dass

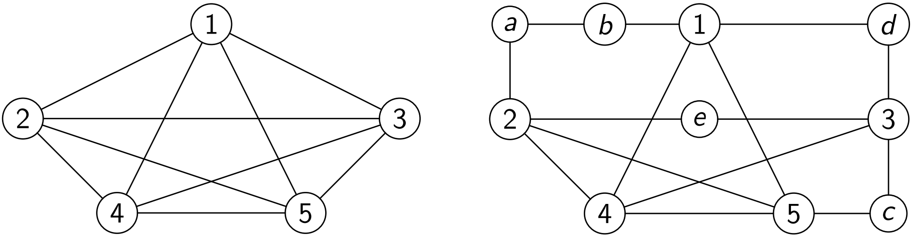
- $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$ und $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}'$ und
- $\mathcal{G}_{i+1}$ eine primitive Unterteilung von $\mathcal{G}_i$ für alle $i < n$ ist

§13.10 Definition (Unterteilung)

Sei $\mathcal{G} = (E, K)$ ein ungerichteter schlingenfreier Graph. Ein Graph $\mathcal{G}' = (E', K')$ ist eine Unterteilung von $\mathcal{G}$ gdw. Graphen $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ existieren, so dass

- $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$ und $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}'$ und
- $\mathcal{G}_{i+1}$ eine primitive Unterteilung von $\mathcal{G}_i$ für alle $i < n$ ist

rechts eine Unterteilung von links

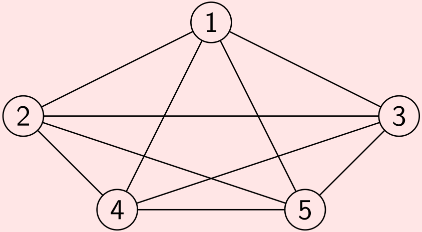


§13.11 Theorem (Kuratowski)

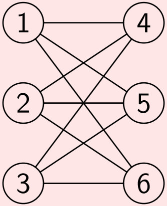
Ein Graph $\mathcal{G}$ ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen hat, der isomorph zu

- einer Unterteilung von K_5 oder
- einer Unterteilung von $K_{3,3}$ ist.

K_5



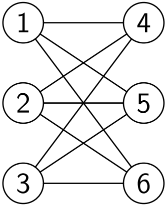
$K_{3,3}$



Kazimierz Kuratowski (* 1896; † 1980)

- poln. Mathematiker und Logiker
- abstrakte Topologie und metr. Strukturen
- bewies Zorns Lemma (mittels Auswahlaxiom)

Warum ist der Graph $K_{3,3} = (E, K)$ nicht planar?



Theorem §13.8 liefert hier

$$18 = |K| \leq 6 \cdot |E| - 12 = 6 \cdot 6 - 12 = 24$$

und kann daher nicht verwendet werden, um Nicht-Planarität zu zeigen

§13.12 Theorem

Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis (indirekt).

Sei $K_{3,3} = (E, V)$ planar. Dann liefert die Eulersche Polyederformel (§13.7)

$$\text{Anzahl } F \text{ der Flächen} = \frac{|K|}{2} - |E| + 2 = \frac{18}{2} - 6 + 2 = 5$$

Für jede Fläche existiert ein begrenzender Kreis. Ein Kreis hat mind. die Länge 3, aber $K_{3,3}$ hat keine Kreise der Länge 3.

§13.12 Theorem

Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis (indirekt).

Sei $K_{3,3} = (E, V)$ planar. Dann liefert die Eulersche Polyederformel (§13.7)

$$\text{Anzahl } F \text{ der Flächen} = \frac{|K|}{2} - |E| + 2 = \frac{18}{2} - 6 + 2 = 5$$

Für jede Fläche existiert ein begrenzender Kreis. Ein Kreis hat mind. die Länge 3, aber $K_{3,3}$ hat keine Kreise der Länge 3. Daher ist jede Fläche von einem Kreis der Länge mind. 4 begrenzt und wir benötigen mind. $4F$ solche Flächenbegrenzer.

§13.12 Theorem

Der Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis (indirekt).

Sei $K_{3,3} = (E, V)$ planar. Dann liefert die Eulersche Polyederformel (§13.7)

$$\text{Anzahl } F \text{ der Flächen} = \frac{|K|}{2} - |E| + 2 = \frac{18}{2} - 6 + 2 = 5$$

Für jede Fläche existiert ein begrenzender Kreis. Ein Kreis hat mind. die Länge 3, aber $K_{3,3}$ hat keine Kreise der Länge 3. Daher ist jede Fläche von einem Kreis der Länge mind. 4 begrenzt und wir benötigen mind. $4F$ solche Flächenbegrenzer. Wie bereits eher (§13.8) beobachtet, kann jedes Kantenpaar $\{(s, z), (z, s)\}$ nur 2 Flächen begrenzen. Es folgt, dass mind. $\frac{4F}{2} = 2F = 10$ Kantenpaare oder $4F = 20$ Kanten benötigt werden. Der Graph $K_{3,3}$ hat jedoch nur 18 Kanten. Widerspruch. $\square$

Anwendungen:

- Färbung von Landkarten
  (benachbarte Länder erhalten verschiedene Farben)
- Frequenzwahl von Mobilfunktürmen
  (verschiedene Frequenzen bei Türmen mit überlappender Abdeckung)
- Registerbelegung von Variablen in Maschinen-Code
  (gleichzeitig verwendete Variablen in verschiedenen Registern)

Färbbarkeit — Motivation

Färbbarkeit — Motivation

Benachbarte Länder müssen verschiedene Farben haben

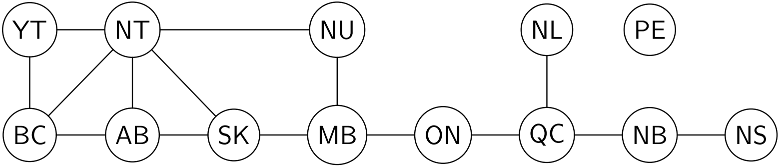
Nachbarn:

- haben nichttriviale Landgrenze
  (z.B. Quebec und Ontario)
- Wassergrenzen irrelevant
  (z.B. Quebec und Nunavut)
- Grenze trivial, falls nur Punkt
  (z.B. Saskatchewan und Nunavut)

Färbbarkeit — Motivation

Ungerichteter Graph:

- Länder als Ecken
- Nachbarn verbunden durch Kanten



§13.13 Definition (Färbbarkeit)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein ungerichteter Graph (E, K) ist n-färbbar, falls eine Funktion $c\colon E \to \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ existiert, so dass $c(s) \neq c(z)$ für alle $(s, z) \in K$.

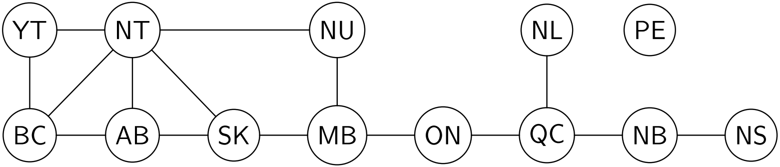
§13.13 Definition (Färbbarkeit)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein ungerichteter Graph (E, K) ist *n-färbbar*, falls eine Funktion $c\colon E \to \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ existiert, so dass $c(s) \neq c(z)$ für alle $(s, z) \in K$.

Notizen:

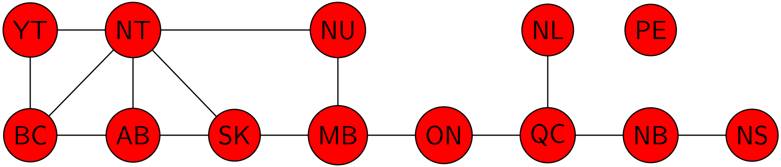
- Für $n \geq 1$ ist $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{1, \ldots, n\}$
- Für $n = 0$ ist $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\} = \emptyset$
- n-färbbar falls alle Ecken mit n Farben $\{1, \ldots, n\}$ so belegt werden können, dass Nachbarn verschiedene Farben tragen

Färbbarkeit



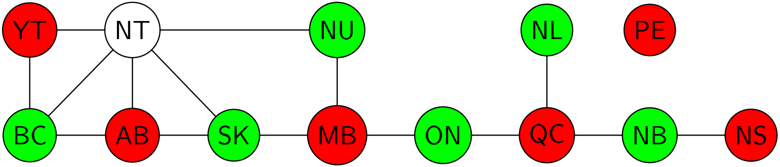
- offensichtlich nicht 0-färbbar

Färbbarkeit



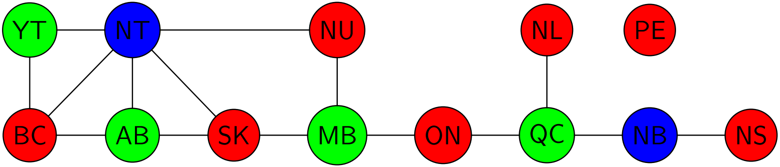
- offensichtlich nicht 0-färbbar
- offensichtlich nicht 1-färbbar

Färbbarkeit



- offensichtlich nicht 0-färbbar
- offensichtlich nicht 1-färbbar
- offensichtlich nicht 2-färbbar

Färbbarkeit



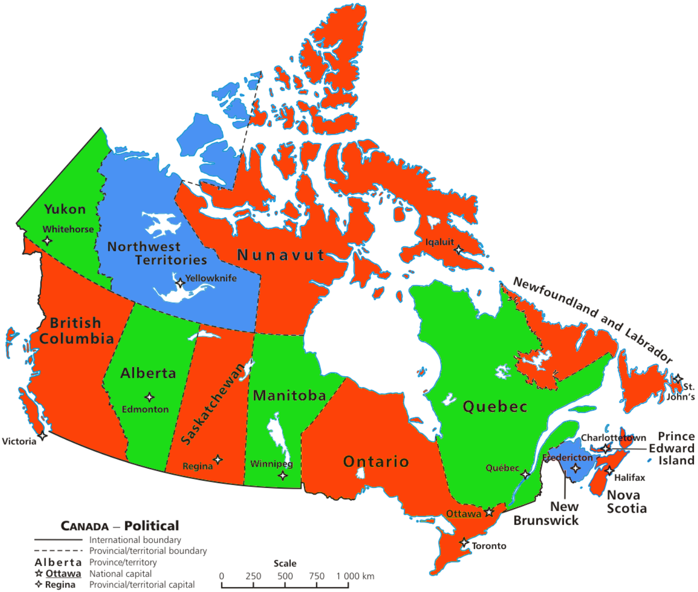
- offensichtlich nicht 0-färbbar
- offensichtlich nicht 1-färbbar
- offensichtlich nicht 2-färbbar
- 3-färbbar mit

$$1 = c(\mathrm{BC}) = c(\mathrm{SK}) = c(\mathrm{NU}) = c(\mathrm{ON}) = c(\mathrm{NL}) = c(\mathrm{PE}) = c(\mathrm{NS})$$

$$2 = c(\mathrm{YT}) = c(\mathrm{AB}) = c(\mathrm{MB}) = c(\mathrm{QC})$$

$$3 = c(\mathrm{NT}) = c(\mathrm{NB})$$

Färbbarkeit



§13.14 Theorem

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist 0-färbbar genau dann, wenn $E = \emptyset$

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\leftarrow$) Sei $E = \emptyset$ und damit auch $K = \emptyset$, da $K \subseteq E \times E$. Dann ist $c = \emptyset$ eine Funktion $c \colon \emptyset \to \emptyset$ und offenbar gilt $c(s) \neq c(z)$ für alle $(s, z) \in K$.

($\rightarrow$) Sei (E, K) 0-färbbar. Dann existiert eine Funktion $c \colon E \to \emptyset$. Allerdings existiert eine derartige Funktion nur falls $E = \emptyset$, da $c(e) \in \emptyset$ für alle $e \in E$ gelten muss. $\square$

§13.15 Lemma

Sei $n \in \mathbb{N}$. Jeder n-färbbare Graph (E, K) ist schlingenfrei.

(schlingenfrei gdw. K irreflexiv)

Beweis (Kontraposition).

Sei (E, K) nicht schlingenfrei; d.h. K ist nicht irreflexiv. Also existiert $(e, e) \in K$ für $e \in E$. Für jede Funktion $c\colon E \to \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ gilt jedoch $c(e) = c(e)$ und damit kann die Färbbarkeit nicht erfüllt werden. $\square$

§13.16 Theorem

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist 1-färbbar genau dann, wenn $K = \emptyset$

Beweis (beidseitige Implikationen).

($\leftarrow$) Sei $K = \emptyset$. Die Funktion $c \colon E \to \{1\}$ sei durch $c(e) = 1$ für alle $e \in E$ gegeben. Es gilt offenbar $c(s) \neq c(z)$ für alle $(s, z) \in K$.

($\rightarrow$) Per Kontraposition: Sei $K \neq \emptyset$ und damit existiert $(s, z) \in K$ mit $s, z \in E$. Falls $s = z$, dann ist (E, K) nicht schlingenfrei und damit nicht 1-färbbar nach §13.15. Andernfalls, $s \neq z$ und es gilt $c(s) = c(z) = 1$ für jede Funktion $c \colon E \to \{1\}$. Damit ist (E, K) nicht 1-färbbar. $\square$

§13.17 Lemma

Sei (E, K) ein Baum (genau 1 starke Zusammenhangskomponente, schlingen- und kreisfrei) und $s, z \in E$ mit $s \neq z$.
Dann existiert genau ein Pfad von s nach z.

§13.17 Lemma

Sei (E, K) ein Baum (genau 1 starke Zusammenhangskomponente, schlingen- und kreisfrei) und $s, z \in E$ mit $s \neq z$.
Dann existiert genau ein Pfad von s nach z.

Beweis (direkt).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gibt es offenbar einen Weg von s nach z und damit einen Pfad von s nach z.

§13.17 Lemma

Sei (E, K) ein Baum (genau 1 starke Zusammenhangskomponente, schlingen- und kreisfrei) und $s, z \in E$ mit $s \neq z$.
Dann existiert genau ein Pfad von s nach z.

Beweis (direkt).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gibt es offenbar einen Weg von s nach z und damit einen Pfad von s nach z. Seien nun $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ und $(e'_0 \to \cdots \to e'_k)$ Pfade paarweise verschiedener Ecken von $e_0 = s = e'_0$ nach $e_\ell = z = e'_k$. O.B.d.A. sei $\ell \leq k$.

Färbbarkeit — Eigenschaften

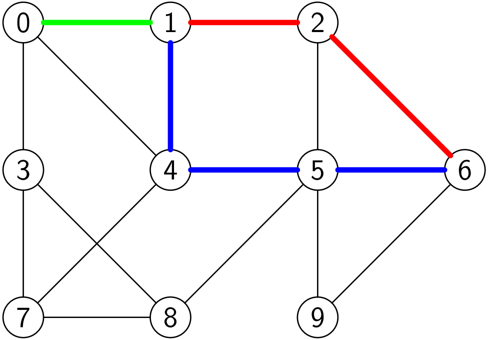
§13.17 Lemma

Sei (E, K) ein Baum (genau 1 starke Zusammenhangskomponente, schlingen- und kreisfrei) und $s, z \in E$ mit $s \neq z$.
Dann existiert genau ein Pfad von s nach z.

Beweis (direkt).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gibt es offenbar einen Weg von s nach z und damit einen Pfad von s nach z. Seien nun $(e_0 \to \cdots \to e_\ell)$ und $(e'_0 \to \cdots \to e'_k)$ Pfade paarweise verschiedener Ecken von $e_0 = s = e'_0$ nach $e_\ell = z = e'_k$. O.B.d.A. sei $\ell \leq k$. Nun zeigen wir, dass die Verschiedenheit der Pfade widersprüchlich ist. Seien die Pfade also verschieden. Dann existiert der kleinste Index $1 \leq i \leq \ell$, so dass $e_i \neq e'_i$, und der kleinste Index $i \leq j \leq \ell$, so dass $e_j = e'_{j'}$ für ein $j' \leq k$. Offenbar ist dann $j' \geq i$ und $(e_{i-1} \to \cdots \to e_j)$ gefolgt von $(e'_{j'} \to \cdots \to e'_{i-1})$ ein Kreis, da entweder $j > i$ oder $j' > i$. Widerspruch zur Kreisfreiheit. □

Färbbarkeit — Eigenschaften



Aus den Pfaden $(0 \to 1 \to 2 \to 6)$ und $(0 \to 1 \to 4 \to 5 \to 6)$ konstruieren wir die Pfade $(1 \to 2 \to 6)$ und $(6 \to 5 \to 4 \to 1)$, die zusammen den Kreis $(1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 4 \to 1)$ bilden

§13.18 Definition (bipartit)

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist bipartit
falls er 2-färbbar und nicht 1-färbbar ist.

§13.18 Definition (bipartit)

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist bipartit
falls er 2-färbbar und nicht 1-färbbar ist.

§13.19 Lemma

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein ungerichteter Graph (E, K) ist n-färbbar gdw.
seine Z-Teilgraphen für jede starke Zusammenhangskomponente Z
n-färbbar sind.

§13.18 Definition (bipartit)

Ein ungerichteter Graph (E, K) ist bipartit
falls er 2-färbbar und nicht 1-färbbar ist.

§13.19 Lemma

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein ungerichteter Graph (E, K) ist n-färbbar gdw.
seine Z-Teilgraphen für jede starke Zusammenhangskomponente Z
n-färbbar sind.

Beweis.

einfache Übung $\square$

§13.20 Theorem

Jeder Baum (E, K) ist 2-färbbar.
Gilt weiterhin $|E| \geq 2$, so ist (E, K) bipartit.

Beweis (direkt; 1/2).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gilt offenbar $E \neq \emptyset$.

§13.20 Theorem

Jeder Baum (E, K) ist 2-färbbar.
Gilt weiterhin $|E| \geq 2$, so ist (E, K) bipartit.

Beweis (direkt; 1/2).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gilt offenbar $E \neq \emptyset$. Sei $r \in E$ also eine beliebige Ecke. Sei $d(r) = 0$ und für jede Ecke $e \in E \setminus \{r\}$ sei $d(e)$ die Länge des eindeutigen Pfades von r nach e (vgl. §13.17).

§13.20 Theorem

Jeder Baum (E, K) ist 2-färbbar.
Gilt weiterhin $|E| \geq 2$, so ist (E, K) bipartit.

Beweis (direkt; 1/2).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gilt offenbar $E \neq \emptyset$. Sei $r \in E$ also eine beliebige Ecke. Sei $d(r) = 0$ und für jede Ecke $e \in E \setminus \{r\}$ sei $d(e)$ die Länge des eindeutigen Pfades von r nach e (vgl. §13.17). Wir definieren die Funktion $c\colon E \to \{1, 2\}$, so dass

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } d(e) \text{ gerade ist} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

§13.20 Theorem

Jeder Baum (E, K) ist 2-färbbar.
Gilt weiterhin $|E| \geq 2$, so ist (E, K) bipartit.

Beweis (direkt; 1/2).

Da (E, K) genau eine starke Zusammenhangskomponente hat, gilt offenbar $E \neq \emptyset$. Sei $r \in E$ also eine beliebige Ecke. Sei $d(r) = 0$ und für jede Ecke $e \in E \setminus \{r\}$ sei $d(e)$ die Länge des eindeutigen Pfades von r nach e (vgl. §13.17). Wir definieren die Funktion $c \colon E \to \{1, 2\}$, so dass

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } d(e) \text{ gerade ist} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun $(s, z) \in K$ eine Kante. Da (E, K) schlingenfrei ist, gilt offenbar $s \neq z$. Wir müssen zeigen, dass $c(s) \neq c(z)$.

Färbbarkeit — Eigenschaften

Beweis (direkt; 2/2).

Falls $s = r$, dann gilt $d(s) = 0$ und damit $c(s) = 1$. In diesem Fall ist $(s \to z)$ der einzige Pfad von r nach z (vgl. §13.17), womit $d(z) = 1$ und damit $c(z) = 2$. Entsprechend für $z = r$.

Beweis (direkt; 2/2).

Falls $s = r$, dann gilt $d(s) = 0$ und damit $c(s) = 1$. In diesem Fall ist $(s \to z)$ der einzige Pfad von r nach z (vgl. §13.17), womit $d(z) = 1$ und damit $c(z) = 2$. Entsprechend für $z = r$.

Sei also nun $r \notin \{s, z\}$ und $(e_0 \to \cdots \to e_k)$ der Pfad von r nach s (vgl. §13.17). Wir unterscheiden zwei weitere Fälle:

Beweis (direkt; 2/2).

Falls $s = r$, dann gilt $d(s) = 0$ und damit $c(s) = 1$. In diesem Fall ist $(s \to z)$ der einzige Pfad von r nach z (vgl. §13.17), womit $d(z) = 1$ und damit $c(z) = 2$. Entsprechend für $z = r$.
Sei also nun $r \notin \{s, z\}$ und $(e_0 \to \cdots \to e_k)$ der Pfad von r nach s (vgl. §13.17). Wir unterscheiden zwei weitere Fälle:

- Sei $z \in \{e_0, \ldots, e_k\}$ und damit existiert $j \leq k$ mit $e_j = z$. Dann muss $j = k - 1$ gelten, denn sonst gäbe es einen weiteren
  Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_j \to s)$ von r nach s. Somit gelten $d(s) = k$ und $d(z) = k - 1$, womit $c(s) \neq c(z)$.

Färbbarkeit — Eigenschaften

Beweis (direkt; 2/2).

Falls $s = r$, dann gilt $d(s) = 0$ und damit $c(s) = 1$. In diesem Fall ist $(s \to z)$ der einzige Pfad von r nach z (vgl. §13.17), womit $d(z) = 1$ und damit $c(z) = 2$. Entsprechend für $z = r$.

Sei also nun $r \notin \{s, z\}$ und $(e_0 \to \cdots \to e_k)$ der Pfad von r nach s (vgl. §13.17). Wir unterscheiden zwei weitere Fälle:

- Sei $z \in \{e_0, \ldots, e_k\}$ und damit existiert $j \leq k$ mit $e_j = z$. Dann muss $j = k - 1$ gelten, denn sonst gäbe es einen weiteren Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_j \to s)$ von r nach s. Somit gelten $d(s) = k$ und $d(z) = k - 1$, womit $c(s) \neq c(z)$.
- Sei $z \notin \{e_0, \ldots, e_k\}$. Dann ist $(e_0 \to \cdots \to e_k \to z)$ der Pfad von r nach z, womit $d(s) = k$ und $d(z) = k + 1$ und damit wiederum $c(s) \neq c(z)$.

Beweis (direkt; 2/2).

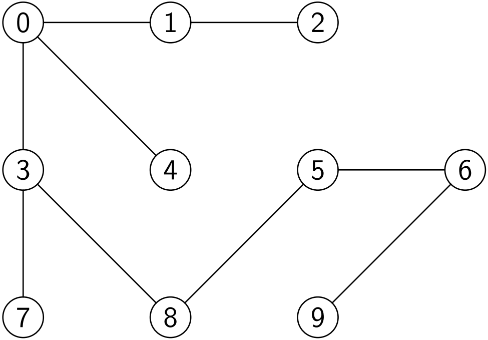
Falls $s = r$, dann gilt $d(s) = 0$ und damit $c(s) = 1$. In diesem Fall ist $(s \to z)$ der einzige Pfad von r nach z (vgl. §13.17), womit $d(z) = 1$ und damit $c(z) = 2$. Entsprechend für $z = r$.

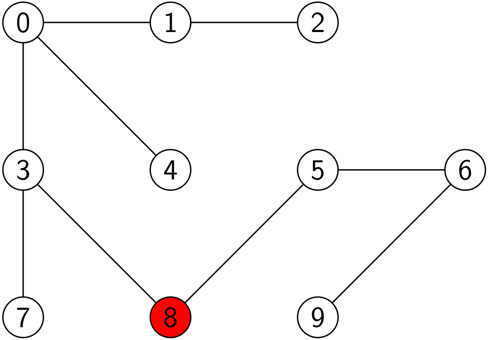
Sei also nun $r \notin \{s, z\}$ und $(e_0 \to \cdots \to e_k)$ der Pfad von r nach s (vgl. §13.17). Wir unterscheiden zwei weitere Fälle:

- Sei $z \in \{e_0, \ldots, e_k\}$ und damit existiert $j \leq k$ mit $e_j = z$. Dann muss $j = k - 1$ gelten, denn sonst gäbe es einen weiteren
  Pfad $(e_0 \to \cdots \to e_j \to s)$ von r nach s. Somit gelten $d(s) = k$ und $d(z) = k - 1$, womit $c(s) \neq c(z)$.
- Sei $z \notin \{e_0, \ldots, e_k\}$. Dann ist $(e_0 \to \cdots \to e_k \to z)$ der Pfad von r nach z, womit $d(s) = k$ und $d(z) = k + 1$ und damit wiederum $c(s) \neq c(z)$.

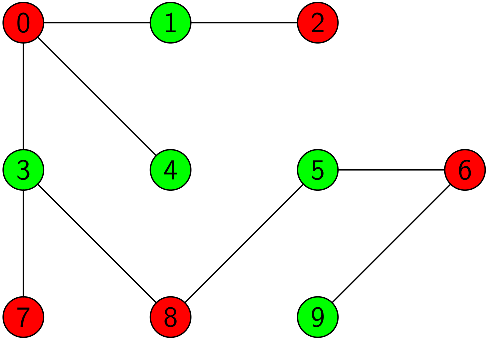
Die zweite Aussage folgt direkt aus §13.14 und §13.16. $\square$

Färbbarkeit — Eigenschaften




0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Färbbarkeit — Eigenschaften



Zusammenfassung

- Bäume und Planarität
- Charakterisierung Planarität
- Definition Färbbarkeit
- Färbbarkeitssätze

Das letzte Extrablatt ist bereits im AlmaWeb verfügbar.