

Aufgaben zur Lehrveranstaltung
Diskrete Strukturen

Bonusserie 2

Hinweise:

- Dieses Blatt enthält **fakultative** Bonusaufgaben.
 - Abgabeschluss der Aufgaben: **29.01.2019** vor der Vorlesung.
 - Beschriften Sie jedes Lösungsblatt mit **Matrikelnummer, Name, Übungsgruppe**.
 - Schreiben Sie Ihre Lösungen dokumentenecht auf; mit Bleistift verfasste Abgaben werden nicht bewertet.
 - Die korrigierten Übungszettel können zur Sprechstunde im Büro A406 abgeholt und besprochen werden.
-

Bonusaufgabe 1 (Isomorphie)

Geben Sie entweder einen Isomorphismus zwischen (2)

$$(\mathbb{Z}_6, +_6, -\cdot, [0]) \text{ und } (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, \oplus, \ominus, ([0]_3, [0]_2)).$$

an oder beweisen Sie, dass die beiden Abelschen Gruppen nicht isomorph zueinander sind. Dabei bezeichnet \oplus die komponentenweise Verknüpfung mit

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a +_3 a', b +_2 b')$$

und \ominus die komponentenweise Inversenabbildung mit analoger Definition.

Bonusaufgabe 2 (Abelsche Gruppen)

Wir betrachten die Menge S_3 der bijektiven Abbildungen über $\{1, 2, 3\}$. (2)
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Struktur $(S_3, ;)$ ist eine Abelsche Gruppe.

Hinweis: Schreiben Sie die Elemente von S_3 als Matrizen der Form $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{bmatrix}$ mit $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$. Eine solche Matrix repräsentiert eine Abbildung mit $1 \mapsto x$, $2 \mapsto y$ und $3 \mapsto z$.

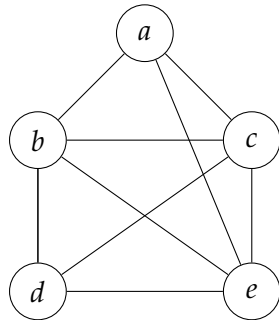
Bonusaufgabe 3 (Körper)

Lassen sich Abbildungen $- \cdot$ und \cdot^{-1} finden, so dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot, -, \cdot^{-1}, 0, 1)$ einen Körper bildet? Begründen Sie kurz. (1)

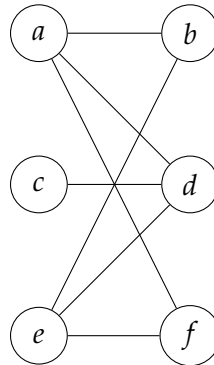
Bonusaufgabe 4 (Graphen – Planarität)

Welche der folgenden ungerichteten Graphen sind planar? (1)

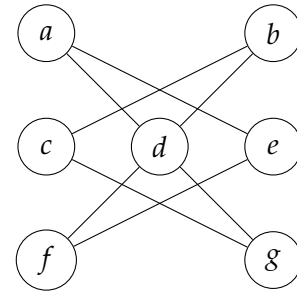
a)



b)



c)



Bonusaufgabe 5 (Graphen – Färbbarkeit)

Das Prüfungsamt der Universität für Diskrete Strukturen, an der auch Ash aus Aufgabe 6.1 studiert hat, benötigt Ihre Hilfe bei der Planung von Prüfungen. Wir betrachten dazu folgende Menge von Vorlesungen $V = \{\text{Aussagenlogik (AL), Prädikatenlogik (PL), Naive Mengenlehre (NM), Relationen und Funktionen (RF), Verbandstheorie (VT), Gruppen und Körper (GK), Bäume und Graphen (BG), Arithmetik (A)}\}$. Anhand der Prüfungsanmeldungen konnte ermittelt werden, dass sich für folgende Paare von Vorlesungen **keine** Überschneidungen in den Anmeldungen ergeben, die jeweiligen Prüfungen also parallel stattfinden können: (4)

- Aussagenlogik – Prädikatenlogik, Aussagenlogik – Naive Mengenlehre, Aussagenlogik – Relationen und Funktionen, Aussagenlogik – Verbandstheorie, Aussagenlogik – Gruppen und Körper, Aussagenlogik – Bäume und Graphen, Aussagenlogik – Arithmetik
- Prädikatenlogik – Naive Mengenlehre, Prädikatenlogik – Verbandstheorie, Prädikatenlogik – Gruppen und Körper, Prädikatenlogik – Bäume und Graphen, Prädikatenlogik – Arithmetik
- Relationen und Funktionen – Verbandstheorie, Relationen und Funktionen – Gruppen und Körper
- Verbandstheorie – Gruppen und Körper
- Naive Mengenlehre – Arithmetik

Wie viele Prüfungstermine müssen *mindestens* angeboten werden, damit alle angemeldeten Prüfungsteilnehmer ihre Prüfungen problemlos ablegen können? Gehen Sie bei der Beantwortung der Frage schrittweise vor: Zeichnen Sie zunächst einen Graphen mit der Vorlesungsmenge als Eckenmenge und einer geeigneten Kantenmenge. Zeigen Sie, dass Ihr Graph n -färbbar ist (für ein geeignet zu bestimmendes $n \in \mathbb{N}$) und argumentieren Sie, warum dies eine Lösung des ursprünglichen Problems liefert.

