Dr. Stefan Dück
dueck@informatik.uni-leipzig.de
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~dueck

SS 2018
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Übungsblatt zur Vorlesung „Nebenläufige Prozesse: Spurtheorie“

5. Serie

- **Seminaraufgaben** sind bis zur Übung vorzubereiten und dort vorzustellen.
- **Hausaufgaben** können für Bonuspunkte in der Klausur schriftlich in 2er Gruppen bis 11:15 Uhr im Briefkasten “Hausaufgaben Formale Modelle” in der Post, 5. Etage Augusteum, abgegeben werden.
- Abgabe der **Hausaufgaben** am Freitag, dem **06.07**
- Besprechung der **Seminaraufgaben** in der Übung am Montag, dem **02.07**
- **Wiederholungsaufgaben** sind freiwillige Aufgaben zur Klausurvorbereitung.
- Die Klausur findet am Donnerstag, dem 19.07., von 12:00 bis 13:30 Uhr im HS 2 statt.

Seminaraufgabe 5.1 Sei M ein Monoid und $L \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass dann ein M-Automat $\mathcal{A}$ existiert mit $L(\mathcal{A}) = L$.

Seminaraufgabe 5.2 Sei M ein Monoid und seien $L_1, L_2 \in \mathrm{Rec}(M)$. Konstruieren Sie für die folgenden Sprachen einen M-Automaten $\mathcal{A}_i$ mit $L(\mathcal{A}_i) = L_i$:

(a) $L_3 = M \setminus L_1$

(b) $L_4 = L_1 \cap L_2$

(c) $L_5 = L_1 \cup L_2$

Seminaraufgabe 5.3 Beweisen Sie Lemma 3.13 aus der Vorlesung:
Sei (A, I) ein Spuralphabet, $m \geq 1$, und $x, y, z_1, ..., z_m \in M(A, I)$.
Es gilt $x \cdot y = z_1 \cdot ... \cdot z_m$ genau dann, wenn es Spuren $r_1, ..., r_m, s_1, ..., s_m \in M(A, I)$ gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} x &= r_1 \cdot ... \cdot r_m, \\ y &= s_1 \cdot ... \cdot s_m, \\ z_i &= r_i \cdot s_i && \text{für } 1 \leq i \leq m, \\ r_j \, I \, s_i & && \text{für } 1 \leq i < j \leq m. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 5.4 Sei $A = \{a, b\}$ und $I = \{(a, b), (b, a)\}$. Konstruieren Sie einen $M(A, I)$-Automaten, der die Sprache $L = \{[a]^m \cdot [b]^n \mid n, m \geq 1\} \subseteq M(A, I)$ erkennt.

Hausaufgabe 5.5 Seien M, M' Monoide, $f : M \to M'$ ein Homomorphismus, $L' \subseteq M'$ und $L = f^{-1}(L')$. Beweisen Sie mittels Konstruktion eines M-Automaten, dass

$$L' \in \mathrm{Rec}(M') \quad \Rightarrow \quad L \in \mathrm{Rec}(M)$$

Wiederholungsaufgabe 5.6 Sei $A = \{a, b\}$ und $I = \{(a, b), (b, a)\}$.
Betrachten Sie den Automaten $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$, wobei

- $Q = \{1, 2\}$, $q_0 = 1$, $F = \{2\}$ und
- $\delta : Q \times M(A, I) \to Q$, so dass $\delta(q, [x])$ für alle $q \in Q$ und $x \in A$ in der folgenden Tabelle definiert ist:

	[a]	[b]
1	1	2
2	2	2

Ist A ein $M(A, I)$-Automat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wiederholungsaufgabe 5.7 Sei $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$. Wir betrachten die Monoide $M_1 = (\mathbb{N}_+, \max)$ und $M_2 = (\mathbb{N}_+, \cdot)$. Zeigen Sie $\mathrm{Rec}(M_1) \subsetneq \mathrm{Rec}(M_2)$, indem Sie die folgenden Schritte beweisen:

(a) Ist $L \in \mathrm{Rec}(M_1)$, so ist L endlich oder co-endlich (d.h. $\mathbb{N}_+ \setminus L$ ist endlich).

(b) Jede endliche Menge $L \subseteq \mathbb{N}_+$ ist in $\mathrm{Rec}(M_2)$.

(c) Es gibt eine unendliche Menge $L \subseteq \mathrm{Rec}(M_2)$, so dass $\mathbb{N}_+ \setminus L$ auch unendlich ist.