Dr. Stefan Dück
dueck@informatik.uni-leipzig.de
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~dueck

SS 2018
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Übungsblatt zur Vorlesung „Nebenläufige Prozesse: Spurtheorie“

1. Serie

- **Seminaraufgaben** werden im Seminar bearbeitet - ausgearbeitete Ansätze erwünscht.
- **Hausaufgaben** können für Bonuspunkte schriftlich in 2er Gruppen bis 11:15 Uhr im Briefkasten “Hausaufgaben Formale Modelle” in der Post, 5. Etage Augusteum, abgegeben werden.
- Abgabe der **Hausaufgaben** am Freitag, dem **27.04.**
- Besprechung der **Seminaraufgaben** in der Übung am Montag, dem **23.04.**
- **Wiederholungsaufgabe** sind freiwillige Übungsaufgaben zur Wiederholung oder Vertiefung des Stoffes. Diese werden nur im Seminar behandelt, wenn noch Zeit übrig ist.

Seminaraufgabe 1.1 Sei (B, E, F) ein B/E-Netzwerk und $a, b \in E$ und $M, Mb, Mab \subseteq B$. Zeigen Sie, dass dann $a\ I\ b$ und $Mab = Mba$ gelten.

Seminaraufgabe (für den 07.05.) 1.2 Sei M ein Monoid und $R \subseteq M^2$ eine Relation. Machen Sie sich klar, dass der Schnitt zweier Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist.
Zeigen Sie dann, dass es eine eindeutige Kongruenz $R' \supseteq R$ auf M gibt, so dass $R' \subseteq S$ für alle Kongruenzen $S \supseteq R$.
(In anderen Worten: R' ist die kleinste Kongruenz die ganz R enthält.)
Die Relation R' wird die von R *erzeugte Kongruenz* genannt.

Seminaraufgabe 1.3 Es sei M ein Monoid.

(a) Sei weiterhin A eine Menge und $f : A \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es dann genau einen Homomorphismus $g : A^* \to M$ gibt mit $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Wenn f in (a) injektiv ist, dann ist g ein Monomorphismus.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Menge A und einen Epimorphismus $h : A^* \to M$ gibt.

Seminaraufgabe 1.4 Sei A ein Alphabet. Wir definieren neue Symbole $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$ und eine Relation R:

$$R = \{(aa^{-1}, \varepsilon) \mid a \in A\} \cup \{(a^{-1}a, \varepsilon) \mid a \in A\} \subseteq \left((A \cup A^{-1})^*\right)^2$$

Sei R' die von R erzeugte Kongruenz (siehe Aufgabe 2). Wie sieht R' aus?
Für den 07.05.: Zeigen Sie, dass dann

$$F_A = {}^{(A \cup A^{-1})^*}\!\big/_{R'}$$

eine Gruppe ist.
Sei weiterhin G eine beliebige Gruppe. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : A \to G$ zu einem eindeutigen Homomorphismus $f' : F_A \to G$ fortgesetzt werden kann.

Hausaufgabe 1.5 Sei (B, E, F) ein B/E-Netzwerk und $a, b \in E$ mit $a \, I \, b$. Seien weiterhin $M, M', M'' \subseteq B$, so dass $M \xrightarrow{a} M'$ und $M \xrightarrow{b} M''$ gilt.
Zeigen Sie, dass dann es eine Menge $M''' \subseteq B$ mit $M' \xrightarrow{b} M'''$ und $M'' \xrightarrow{a} M'''$ gibt.

Hausaufgabe 1.6 Sei $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe und $e, f \in S$ idempotent (d.h. $e^2 = e$, $f^2 = f$).

(a) Zeigen Sie, dass $eSe = \{ese \mid s \in S\}$ ein Monoid ist.

(b) Sei $i \in \{e, f\}$ und G_i die größte Gruppe die in iSi liegt. (Zusatz: Warum existiert diese?) Zeigen Sie, dass $G_e \cap G_f = \emptyset$ falls $e \neq f$. Hinweis: Betrachten Sie das Element ef.

Wiederholungsaufgabe 1.7 Beweisen Sie folgende Variante von Aufgabe 5.
Sei $N = (P, T, F, k)$ ein P/T-Netz. Weiterhin seien $a, b \in T$ sowie M eine Markierung mit $a \parallel_M b$. Zeigen Sie, dass dann Mba existiert und es gilt $Mba = Mab$.
Hinweis: Hierbei steht Mx für die Markierung M' mit $M \xrightarrow{x} M'$.

Wiederholungsaufgabe 1.8 Seien M, M' Monoide und $f : M \to M'$ ein Homomorphismus.
Zeigen Sie: Ist U' ein Untermonoid von M', so ist $f^{-1}(U')$ ein Untermonoid von M.