Dr. Stefan Dück
dueck@informatik.uni-leipzig.de
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~dueck

SS 2018
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Übungsblatt zur Vorlesung „Logik und Modelltheorie“
6. Serie

- **Seminaraufgaben** werden im Seminar bearbeitet - ausgearbeitete Ansätze erwünscht.
- **Hausaufgaben** können schriftlich in 2er Gruppen **5 min vor der Vorlesung** für Bonuspunkte abgegeben werden (oder bis 11:00 Uhr im Briefkasten “Hausaufgaben Formale Modelle” in der Post, 5. Etage).
- Abgabe der **Hausaufgaben** am Donnerstag, den **28.06.**
- Besprechung der **Seminaraufgaben** in der Übung am Montag, den **25.06.**
- Die Übung am 25.06. findet ausnahmsweise in Raum P702 statt.

Seminaraufgabe 6.1 Finden Sie Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ und eine Einbettung $h:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, die keine elementare Einbettung ist.

Seminaraufgabe 6.2 Sei $A\subseteq\mathbb{C}$ eine abzählbare Menge komplexer Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen abzählbaren Teilkörper (eine Teilstruktur, welche ein Körper ist) von $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$, welcher A enthält.

(b) Es gibt einen abzählbaren Teilkörper von $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$, welcher A enthält und in dem jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in A eine Nullstelle hat.

(c) Es gibt einen abzählbaren Teilkörper $\mathbb{A}$ von $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$, welcher A enthält und in dem jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{A}$ eine Nullstelle hat.

Seminaraufgabe 6.3 Zeigen Sie: Eine Funktion $h:M\to N$ ist genau dann eine elementare Einbettung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, wenn gilt:

(I) h ist eine Einbettung und

(II) $h(\mathcal{M}):=\mathcal{N}\restriction_{h(M)}$ ist eine elementare Substruktur von $\mathcal{N}$.

Hausaufgabe 6.4 Sei σ eine Signatur, $(\alpha,\leq)$ eine geordnete Menge und $(\mathcal{M}_i)_{i\in\alpha}$ und $(\mathcal{N}_i)_{i\in\alpha}$ elementare Ketten, sodass $\mathcal{M}_j\equiv\mathcal{N}_j$ für ein $j\in\alpha$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i\in\alpha}\mathcal{M}_i$ und $\bigcup_{i\in\alpha}\mathcal{N}_i$ elementar äquivalent sind.

Hausaufgabe 6.5 Sei $(F,+,\cdot,0,1)$ eine elementare Substruktur des komplexen Körpers $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$. Zeigen Sie

(a) $\mathbb{Q}\subseteq F$

(b) jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in F hat eine Nullstelle in F.