Dr. Stefan Dück
dueck@informatik.uni-leipzig.de
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~dueck

SS 2018
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Übungsblatt zur Vorlesung „Logik und Modelltheorie“

2. Serie

- **Seminaraufgaben** werden im Seminar bearbeitet - ausgearbeitete Ansätze erwünscht.
- **Hausaufgaben** können schriftlich in 2er Gruppen **5 min vor der Vorlesung** für Bonuspunkte abgegeben werden (oder bis 11:00 Uhr im Briefkasten “Hausaufgaben Formale Modelle” in der Post, 5. Etage).
- Abgabe der **Hausaufgaben** am Donnerstag, den **03.05.**
- Besprechung der **Seminaraufgaben** in der Übung am Montag, den **30.04.**
- **Wiederholungsaufgaben** sind freiwillige Übungsaufgaben zur Wiederholung oder Vertiefung des Stoffes. Diese werden nur im Seminar behandelt, wenn noch Zeit übrig ist.

Seminaraufgabe 2.1 Sei $\sigma = (\emptyset, \emptyset, \{\mathrm{Lab}_a, \mathrm{Lab}_b, E_1, E_2\}, \sigma')$ mit $\sigma'(\mathrm{Lab}_a) = \sigma'(\mathrm{Lab}_b) = 1$ und $\sigma'(E_1) = \sigma'(E_2) = 2$. Ein *Graph* sei eine σ-Struktur $\mathcal{M}$ mit Grundmenge V, $\mathrm{Lab}_a^{\mathcal{M}} \cup \mathrm{Lab}_b^{\mathcal{M}} = V$, $\mathrm{Lab}_a^{\mathcal{M}} \cap \mathrm{Lab}_b^{\mathcal{M}} = \emptyset$ und $E_1^{\mathcal{M}} \cap E_2^{\mathcal{M}} = \emptyset$. Bezeichne mit $\mathfrak{G}$ die Klasse aller Graphen.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Eigenschaften 1. Stufe in $\mathfrak{G}$ sind (d.h. modellieren Sie diese als logische Formeln).

(a) Ein mit a gelabelter Knoten aus V hat nie einen mit b gelabelten Nachbarknoten (also steht mit keinem solchen Knoten in Relation E_1 oder E_2).

(b) Jeder Knoten $v \in V$ hat maximal zwei Nachbarknoten.

Sei

$$\varphi = E_1(x,y) \vee E_2(x,y) \vee \exists z.\big((E_1(x,z) \vee E_2(x,z)) \wedge (E_1(z,y) \vee E_2(z,y))\big)$$

Geben Sie einen Graphen $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Bewertung $\bar{x} \in V^{\mathbb{N}}$ an mit $(\mathcal{M}, \bar{x}) \models \varphi$. Machen Sie sich klar, wann $(\mathcal{M}, \bar{x}) \models \varphi$ erfüllt ist.

Seminaraufgabe 2.2 Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathcal{M}$ ist eine Substruktur von $\mathcal{N}$ (d.h. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$).

(ii) $M \subseteq N$ und für jede Atomformel α und jede Bewertung $x \in M^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$(\mathcal{M}, x) \models \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{N}, x) \models \alpha$$

Seminaraufgabe 2.3 Seien φ und ψ zwei Formeln aus $L(\sigma)$, deren freie Variablen in $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ enthalten sind. Man zeige, dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \forall v_1 \forall v_2 ... \forall v_n.(\varphi \to (\psi \to \varphi))$$

Hausaufgabe 2.4 Sei $\sigma_w = (\emptyset, \emptyset, \{\mathrm{Lab}_a, \mathrm{Lab}_b, \leq\}, \sigma'_w)$ mit $\sigma'_w(\mathrm{Lab}_a) = 1$, $\sigma'_w(\mathrm{Lab}_b) = 1$ und $\sigma'_w(\leq) = 2$. Ein *Wort* $\mathcal{M}$ sei eine σ_w-Struktur mit Grundmenge $M = \{1, ..., n\}$, sowie $\mathrm{Lab}_a^{\mathcal{M}} \cup \mathrm{Lab}_b^{\mathcal{M}} = M$, $\mathrm{Lab}_a^{\mathcal{M}} \cap \mathrm{Lab}_b^{\mathcal{M}} = \emptyset$ und $\leq^{\mathcal{M}}$ sei die übliche Ordnungsrelation auf M. Bezeichne mit $\mathfrak{W}$ die Klasse aller Wörter.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Eigenschaften 1. Stufe in $\mathfrak{W}$ sind (d.h. modellieren Sie diese als logische Formeln).

(a) Nach jedem a folgt irgendwann ein b.

(b) Nach jedem a folgt direkt ein b.

(c) Betrachten Sie nun σ aus Aufgabe 1 und eine σ-Struktur $\mathcal{M}$, welche einen zusammenhängenden Graphen beschreibt. Geben Sie eine Formel aus $L(\sigma)$ an, welche beschreibt, dass $\mathcal{M}$ ein Wort ist.

Hausaufgabe 2.5 Seien σ eine Signatur, $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zwei σ-Strukturen und $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Homomorphismus. Seien weiterhin $x \in M^{\mathbb{N}}$ und $y \in N^{\mathbb{N}}$ zwei Bewertungen mit $y_n = h(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Term t gilt: $h(t^{(\mathcal{M},x)}) = t^{(\mathcal{N},y)}$

(b) Sei h nun sogar ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass dann für jede Formel φ aus $L(\sigma)$ gilt:

$$(\mathcal{M}, x) \models \varphi \iff (\mathcal{N}, y) \models \varphi$$

Bemerkung: Dies zeigt, dass jeder Isomorphismus eine, wie wir später sagen, *elementare Einbettung* ist.

Wiederholungsaufgabe 2.6 Sei σ eine Signatur und $\mathcal{M}$ eine σ-Struktur. Seien weiterhin φ und ψ zwei Formeln aus $L(\sigma)$ und $x \in M^{\mathbb{N}}$ eine Bewertung. Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{M}, x) \models \varphi \vee \psi \iff (\mathcal{M}, x) \models \varphi$ oder $(\mathcal{M}, x) \models \psi$

(b) $(\mathcal{M}, x) \models \varphi \to \psi \iff$ wenn $(\mathcal{M}, x) \models \varphi$, dann $(\mathcal{M}, x) \models \psi$

(c) Sei weiterhin $y \in M^{\mathbb{N}}$ mit $x_n = y_n$ für alle freien Variablen v_n. Dann gilt:

$$(\mathcal{M}, x) \models \varphi \iff (\mathcal{M}, y) \models \varphi$$

Wiederholungsaufgabe 2.7 Seien $\sigma \subseteq \sigma_1$ zwei Signaturen, $\mathcal{M}$ eine σ-Struktur, $\mathcal{N}$ eine σ_1-Struktur und $\mathcal{M}$ das σ-Redukt von $\mathcal{N}$. Sei weiterhin φ eine Formel aus der Sprache $L(\sigma)$. Zeigen Sie unter expliziter Zurückführung auf die Definition von $\models$, dass für alle Bewertungen $x \in M^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$(\mathcal{M}, x) \models \varphi \iff (\mathcal{N}, x) \models \varphi$$

Gilt eine analoge Aussage, falls $\mathcal{M}$ eine Substruktur von $\mathcal{N}$ ist?