4. Relationen

4.1 Grundlegende Definitionen

Relation R in einer Menge M: Beziehung zwischen je 2 Elementen von M.
Beispiel <-Relation auf natürlichen Zahlen Nat: $a < b$ gdw es gibt $r \in$ Nat, so dass $a + r = b$.
Falls $a < b$ sagt man auch: < trifft auf (a,b) zu.
Relation < kann durch alle Paare, auf die sie zutrifft, charakterisiert werden:

> Eine Relation R in einer Menge M ist eine Teilmenge von M x M.
> Statt $(a,b) \in R$ schreibt man auch aRb.

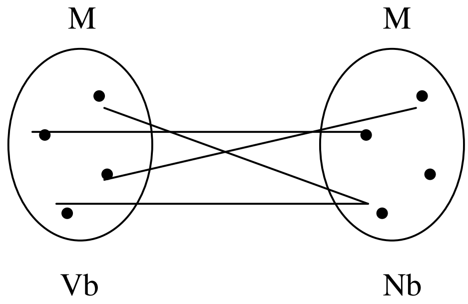
Beispiele: x ist Teiler von y, x ist Vater von y, x ist Chef von y, ...

Entsprechend: Relation zwischen Mengen M und N, auch Korrespondenz zwischen M und N genannt, Teilmenge von M x N (dazu mehr später).

Sei R eine Relation in M.

<u>Vorbereich</u> (Vb) von R:	$\{x \in M \mid \text{es gibt } y \in M \text{ mit } xRy\}$
<u>Nachbereich</u> (Nb) von R:	$\{y \in M \mid \text{es gibt } x \in M \text{ mit } xRy\}$
<u>Feld</u> (Fd) von R:	$Vb(R) \cup Nb(R)$

Graphische Veranschaulichung endlicher Relationen: Kante von jedem Element des Vb zu zugehörigen Elementen des Nb:



zu R <u>inverse Relation</u> $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

Wichtige Eigenschaften von Relationen:

R ist:	falls für alle x, y, z $\in$ M gilt:	Beispiel:
reflexiv:	xRx	$\subseteq$ (Teilmengenrelation)
irreflexiv:	nicht xRx	$\subset$ (echte Teilmengenrelation)
symmetrisch:	wenn xRy, dann yRx	$\equiv$ (Äquivalenz von Formeln)
asymmetrisch:	xRy impliziert nicht yRx	$\subset$
antisymmetrisch:	xRy und yRx impliziert $x = y$	$\subseteq$
transitiv:	xRy und yRz impliziert xRz	$\models$
linear:	xRy oder yRx	$\geq$ (z.B. auf Nat)
konnex:	$x \neq y$ impliziert xRy oder yRx	$<$
voreindeutig:	yRx und zRx impliziert $y = z$	nur 1 Kante zu Knoten in Nb
eindeutig:	xRy und xRz impliziert $y = z$	nur 1 Kante zu Knoten in Vb
eineindeutig:	eindeutig und voreindeutig	

Sei R Relation in M, $N \subseteq M$, die Einschränkung von R auf N, $R \| N$, ist die Menge

$$\{(a,b) \in R \mid a \in N, b \in N\}$$

Verknüpfung von Relationen: Seien R und S Relationen in M. Die Verknüpfung von R und S, $R \circ S$, ist die Menge von Paaren $\{(x,z) \mid$ es gibt ein y mit xRy und ySz$\}$.

(Analog für Relationen $R \subseteq M \times N$, $S \subseteq N \times P$; $R \circ S$ ist dann Relation zwischen M und P)

Beispiel:
Sei M = {Peter, Franz, Fritz, ...} eine Menge von Personen,
$V = \{(x,y) \mid x, y \in M$, x verwandt mit y$\}$
$F = \{(x,y) \mid x, y \in M$, x befreundet mit y$\}$
Dann ist
$(x,y) \in V \circ F$ gdw. y ist Freund eines Verwandten von x
$(x,y) \in F \circ V$ gdw. y ist Verwandter eines Freundes von x

Sei R eine Relation in M. Die transitive Hülle von R, R^t, ist die kleinste Relation, für die gilt:

a) $R \subseteq R^t$
b) wenn $(x,y) \in R^t$ und $(y,z) \in R$, dann $(x,z) \in R^t$.

Beispiele:
a) Sei $R = \{(x,x+1) \mid x \in Nat\}$ die direkte Nachfolgerrelation auf Nat, dann ist R^t die <-Relation
b) Sei $R = \{(x,y) \mid$ x Kind von y$\}$, dann ist $(v,w) \in R^t$ gdw v Nachkomme von y.

4.2 Äquivalenzrelationen

Eine Relation R in M heißt Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Man sagt dann: a ist äquivalent zu b bzgl. R falls aRb.

Beispiele:
$\equiv$ auf der Menge der aussagenlogischen Formeln
$R = \{(x,y) \mid$ x, y Studierende im gleichen Semester$\}$
$R_n = \{(x,y) \mid$ x,y aus N, es gibt z aus N, so dass x-z und y-z teilbar durch n$\}$

Eine Zerlegung (Partition) einer Menge M ist eine Menge K von nichtleeren Teilmengen von M, so dass gilt:
1. die Elemente von K sind paarweise disjunkt,
2. jedes Element von M ist Element eines Elementes von K.

Jede Äquivalenzrelation R in M induziert eine Zerlegung K von M in Äquivalenzklassen, wobei a und b zu einer Klasse gehören gdw aRb. Die Äquivalenzklasse der zu a äquivalenten Elemente von M wird mit $[a]_R$ bezeichnet. Es gilt also: $[a]_R = \{b \mid aRb\}$

4.3 Ordnungsrelationen

Sei R Relation in M. R heißt

reflexive (Halb-)Ordnung	falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch	($\subseteq$)
reflexive Vollordnung	falls R reflexive Ordnung und linear	($\leq$)
irreflexive (Halb-)Ordnung	falls R irreflexiv und transitiv	($\subset$)
irreflexive Vollordnung	falls R irreflexive Ordnung und konnex	($<$)

Anmerkung 1: Vollordnungen werden auch totale Ordnungen genannt, Halbordnungen auch partielle Ordnungen. Ordnungen die nicht Vollordnungen sind, heißen echte Halbordnungen. Es ergibt sich folgende Klassenhierarchie:

- Ordnung
  - reflexiv
    - echt partiell
    - total
  - irreflexiv
    - echt partiell
    - total

Anmerkung 2: irreflexiv und transitiv impliziert asymmetrisch
Beweis: wäre R nicht asymmetrisch, dann gäbe es x,y mit xRy und yRx. Aufgrund der Transitivität würde daraus folgen xRx, was der Irreflexivität widerspricht.

Ist R reflexive (Voll-)Ordnung, so ist $R^- = R \setminus \{(x,x) \mid x \in M\}$ irreflexive (Voll-)Ordnung.
Es gilt xR^-y gdw. xRy und $x \neq y$.
Ist R irreflexive (Voll-)Ordnung, so ist $R^+ = R \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$ reflexive (Voll-) Ordnung.
Es gilt xR^+y gdw. xRy oder $x = y$.

geordnete Menge: Paar (M, R), R reflexive oder irreflexive Ordnung auf M.
vollgeordnete Menge: Paar (M, R), R reflexive oder irreflexive Vollordnung auf M.

Sei R Ordnung auf M, $N \subseteq M$.
$a \in M$ obere Schranke von N, falls xRa für alle $x \in N$
$a \in M$ untere Schranke von N, falls aRx für alle $x \in N$
$a \in N$ maximales Element von N, falls für kein $x \in N$ gilt aRx und $x \neq a$
$a \in N$ minimales Element von N, falls für kein $x \in N$ gilt xRa und $x \neq a$
$a \in N$ Maximum von N, falls xRa für alle $x \in N$ mit $x \neq a$ (max N)
$a \in N$ Minimum von N, falls aRx für alle $x \in N$ mit $x \neq a$ (min N)
$a \in M$ Supremum von N, falls a Minimum der Menge der oberen Schranken von N (sup N)
$a \in M$ Infimum von N, falls a Maximum der Menge der unteren Schranken von N (inf N)

Supremum und Infimum heißen auch obere bzw. untere Grenze

Beispiele:
a) geordnete Menge (M, <), M natürliche Zahlen, < kleiner-Relation, N = {4, 5, 6, 7}

Jede Zahl größer als 7 ist obere Schranke, jede kleiner als 4 untere Schranke.

7 ist Maximum und maximales Element, 4 Minimum und minimales Element von N. 8 ist Supremum, 3 Infimum.

b) geordnete Menge (M, ≤), M natürliche Zahlen, ≤ kleiner-gleich-Relation, N = {4, 5, 6, 7}

Jede Zahl größer-gleich 7 ist obere Schranke, jede kleiner-gleich 4 untere Schranke.
7 ist Maximum, maximales Element und Supremum, 4 Minimum, minimales Element und Infimum von N.

c) geordnete Menge (M, ≤), M reelle Zahlen, ≤ kleiner-gleich-Relation, N =]1,2[

Jede Zahl größer-gleich 2 ist obere Schranke, jede kleiner-gleich 1 untere Schranke.
Es gibt kein Maximum und kein maximales Element, ebenso kein Minimum und kein minimales Element. 2 ist Supremum, 1 Infimum von N.

d) geordnete Menge (M, ≤), M reelle Zahlen, ≤ kleiner-gleich-Relation, N = [1,2]

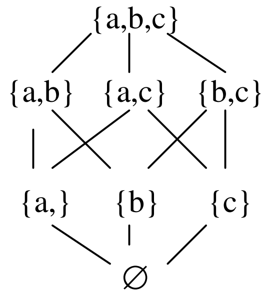
Jede Zahl größer-gleich 2 ist obere Schranke, jede kleiner-gleich 1 untere Schranke.
2 ist Maximum und maximales Element, 1 ist Minimum und minimales Element. 2 ist Supremum, 1 Infimum von N.

e) geordnete Menge (M, ⊂), M Potenzmenge von {a,b,c}, ⊂ Teilmengen-Relation, N = {{a},{b}}

Jede Menge, die a und b enthält, ist obere Schranke, die leere Menge untere Schranke.
Beide Mengen in N sind maximale und minimale Elemente, aber weder Maximum noch Minimum. {a,b} ist Supremum, die leere Menge Infimum von N.

Ordnungsrelationen lassen sich durch sogenannte Hasse-Diagramme veranschaulichen: stelle Elemente von M als Punkte dar, zeichne Pfeil von a nach b, wenn aRb und es keinen von a und b verschiedenen Punkt c gibt mit aRc und cRb.

Beispiel: Pot({a,b,c})



Durch Hasse-Diagramm ist Relation R eindeutig bestimmt, falls man weiß, ob R reflexiv oder irreflexiv ist.

Eine Vollordnung R in M heißt <u>Wohlordnung</u>, falls jede nichtleere Teilmenge von M ein minimales Element besitzt.

Beispiel: ≤ auf den natürlichen Zahlen ist Wohlordnung, nicht jedoch auf ganzen Zahlen (Menge der negativen ganzen Zahlen besitzt kein minimales Element).

5. Korrespondenzen und Abbildungen, Unendlichkeit

Eine Relation (auch Korrespondenz) zwischen Mengen M und N ist eine Relation in $M \cup N$ mit $Vb(K) \subseteq M$ und $Nb(K) \subseteq N$.
Ist $(a,b) \in K$, so nennt man a Urbild von b, b Bild von a.
Vb(K) nennt man auch Definitions-, Nb(K) Wertebereich von K.

Eindeutige Korrespondenzen (jedes Urbild hat maximal 1 Bild) heißen Abbildungen oder Funktionen
Abbildung aus M in N: $Vb(K) \subseteq M$ (auch: partielle Abbildung)
Abbildung von M in N: $Vb(K) = M$

Notation: f: M -> N besagt: f ist Abbildung von M in N

Verkettung von Abbildungen:
Seien f und g Abbildungen von M nach N und von N nach P. Dann ist die Relation

$$f \circ g = \{(a,c) \mid \text{es gibt } b \in N \text{ mit } (a,b) \in f \text{ und } (b,c) \in g\}$$

eine Abbildung von M nach P, genannt Verkettung von f und g.

Eine Funktion f von M nach N heißt:

injektiv	falls kein Element von N mehr als 1 Urbild hat
surjektiv	falls jedes Element von N mindestens 1 Urbild hat
bijektiv	falls jedes Element von N genau 1 Urbild hat (= surjektiv + injektiv)

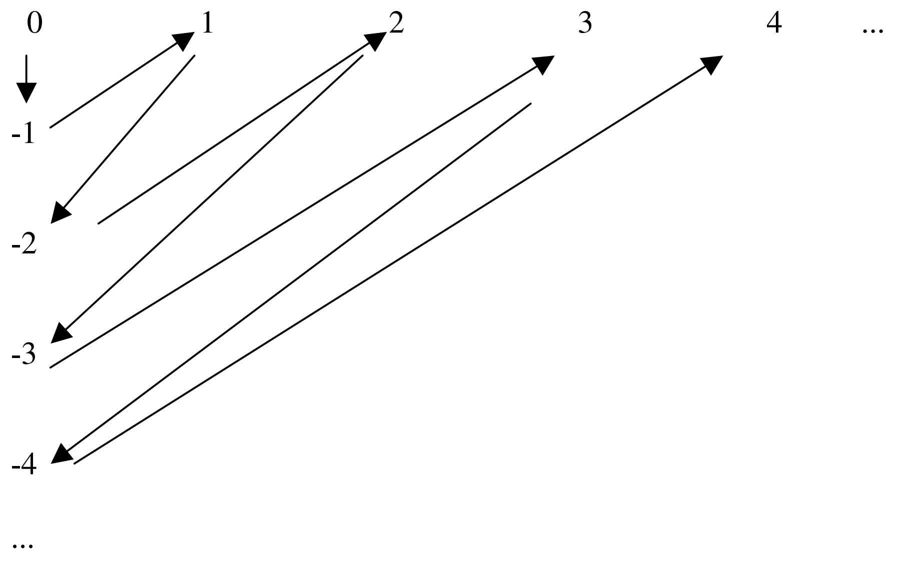
Unendlichkeitsdefinition nach Dedekind:
Eine Menge M ist <u>unendlich</u>, wenn es eine bijektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt.

Beispiel: natürliche Zahlen Nat, Teilmenge Z der geraden Zahlen, f: Nat -> Z mit $f(x) = 2x$ ist Bijektion auf echte Teilmenge, damit Nat unendlich.

Eine Menge M heißt
- abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von Nat auf M gibt,
- abzählbar unendlich, wenn M abzählbar und unendlich

Beispiel: die ganzen Zahlen sind abzählbar unendlich. Wähle

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{falls } n = 2k \\ -k, & \text{falls } n = 2k+1 \end{cases}$$



Nicht abzählbare Mengen heißen überabzählbar. Beispiel: reelle Zahlen R

Beweis: Cantorsches Diagonalverfahren

Wir zeigen (durch Widerspruch):
Bereits die Menge]0,1[der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist überabzählbar.

Sei f surjektive Abbildung von Nat in]0,1[.
Jedes $r \in\ ]0,1[$ kann als nicht abbrechende Dezimalzahl dargestellt werden.
Sei $f(n) = 0,z_{n0}z_{n1}z_{n2}z_{n3}...$
Betrachte die reelle Zahl $d = 0,d_0d_1d_2d_3...$ mit $d_j = 2$ falls $z_{jj} = 1$ und $d_j = 1$ sonst.
Diese Zahl ist von allen Bildern von f verschieden, damit ist f nicht surjektiv.

Veranschaulichung:

n \ f(n)	
0	$0,\ \mathbf{z_{00}}\ z_{01}\ z_{02}\ z_{03}\ z_{04}\ z_{05}\ z_{06}\ z_{07} \ldots$
1	$0,\ z_{10}\ \mathbf{z_{11}}\ z_{12}\ z_{13}\ z_{14}\ z_{15}\ z_{16}\ z_{17} \ldots$
2	$0,\ z_{20}\ z_{21}\ \mathbf{z_{22}}\ z_{23}\ z_{24}\ z_{25}\ z_{26}\ z_{27} \ldots$
3	$0,\ z_{30}\ z_{31}\ z_{32}\ \mathbf{z_{33}}\ z_{34}\ z_{35}\ z_{36}\ z_{37} \ldots$
4	$0,\ z_{40}\ z_{41}\ z_{42}\ z_{43}\ \mathbf{z_{44}}\ z_{45}\ z_{46}\ z_{47} \ldots$
5	$0,\ z_{50}\ z_{51}\ z_{52}\ z_{53}\ z_{54}\ \mathbf{z_{55}}\ z_{56}\ z_{57} \ldots$
6	$0,\ z_{60}\ z_{61}\ z_{62}\ z_{63}\ z_{64}\ z_{65}\ \mathbf{z_{66}}\ z_{67} \ldots$
7	$0,\ z_{70}\ z_{71}\ z_{72}\ z_{73}\ z_{74}\ z_{75}\ z_{76}\ \mathbf{z_{77}} \ldots$
...	

Für alle n gilt: d unterscheidet sich von f(n) mindestens an der Stelle z_{nn}.

6. Algebraische Strukturen

6.1 Grundbegriffe

Def. 6.1: Eine algebraische Struktur $A = (M, f_1, ..., f_s, R_1, ..., R_t)$ besteht aus folgenden Komponenten:

- einer nichtleeren Menge M, auch Trägermenge oder Universum genannt,
- Funktionen f_i, $1 \le i \le s$, mit zugehöriger Stelligkeit m_i, d.h. f_i: M^{mi} -> M,
- Relationen R_j, $1 \le j \le t$, mit zugehöriger Stelligkeit n_i, d.h. R_j: $\subseteq M^{ni}$.

Die Folge $(m_1, ..., m_s, n_1, ..., n_t)$ heißt Typ oder Signatur der algebraischen Struktur.

Eine Algebraische Struktur heißt Algebra, falls nur Funktionen, keine Relationen vorkommen $(s > 0, t = 0)$.

Zweistellige Funktionen f: M x M -> M heißen auch Verknüpfungen in M.

Beispiele: Addition und Multiplikation auf Zahlen, Vereinigung und Durchschnitt auf Mengen, ...

Verknüpfungen werden wegen dieser typischen Beispiele oft als Addition $(a + b)$ oder Multiplikation $(a \cdot b)$ bezeichnet

6.2 Gruppen und Halbgruppen

Def. 6.2: Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ (genannt Multiplikation) heißt Halbgruppe, falls $\circ$ assoziativ ist.

Def. 6.3: Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ (genannt Multiplikation) heißt Gruppe, falls gilt:

(1) die Verknüpfung ist assoziativ,
(2) G enthält ein Einselement e, d.h. ein Element, so dass für alle $a \in G$: $a \circ e = e \circ a = a$,
(3) zu jedem $a \in G$ gibt es ein Inverses a^{-1}, so dass gilt: $a \circ a^{-1} = e$.

Eine Gruppe heißt abelsch, falls ihre Verknüpfung kommutativ ist.

Beispiele: ganze, rationale, reelle, komplexe Zahlen mit +

Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G heißt Untergruppe von G, wenn U bzgl. der in G definierten Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Satz: Der Schnitt zweier Untergruppen ist selbst Untergruppe.

Für Vereinigung gilt das i.A. nicht: z.B. sind die geraden Zahlen mit + Untergruppe der ganzen Zahlen, die durch 3 teilbaren Zahlen ebenso, ihr Schnitt (die durch 6 teilbaren Zahlen) auch, aber nicht die Vereinigung: $2 + 3 = 5$ ist weder durch 2, noch durch 3 teilbar.

Def. 6.4: Seien $G_1 = (M_1, op_1)$ und $G_2 = (M_2, op_2)$ Gruppen. Eine Abbildung ϕ: M_1 –> M_2 heißt (Gruppen-) Homomorphismus von G_1 in G_2, falls für alle a,b aus M_1 gilt:

$$\phi(a\ op_1\ b) = \phi(a)\ op_2\ \phi(b)$$

Bemerkung: Ein Homomorphismus kann verschiedene Elemente von M_1 auf dasselbe Element von M_2 abbilden.

Ein Homomorphismus ϕ heißt Isomorphismus, falls ϕ bijektiv ist.

Beispiel:
G_1 positive reelle Zahlen mit Multiplikation, G_2 positive reelle Zahlen mit Addition, $\phi = \log$:
es gilt: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

6.3 Verbände

Def. 6.5: Eine Menge V mit zwei Verknüpfungen, die als Durchschnitt ($\cap$) und Vereinigung ($\cup$) bezeichnet werden, heißt Verband, wenn für alle a, b, c gilt:

(1)	$a \cap b = b \cap a$;	$a \cup b = b \cup a$	Kommutativität
(2)	$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$	$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$	Assoziativität
(3)	$a \cap (a \cup b) = a$	$a \cup (a \cap b) = a$	Absorption

Beispiele:

a) die Potenzmenge einer Menge M mit mengentheoretischem Schnitt und Vereinigung
b) positive ganze Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler und kleinstem gemeinsamen Vielfachen
c) die Menge der Äquivalenzklassen aussagenlogischer Formeln mit $\wedge$ und $\vee$:
$[F_1]_\equiv \wedge [F_2]_\equiv = [F1 \wedge F_2]_\equiv$ $\qquad$ $[F_1]_\equiv \vee [F_2]_\equiv = [F1 \vee F_2]_\equiv$

Def. 6.6: Seien $V_1 = (M_1, \cap_1, \cup_1)$ und $V_2 = (M_2, \cap_2, \cup_2)$ Verbände. Eine Abbildung ϕ: $M_1 \rightarrow M_2$ heißt (Verbands-) Homomorphismus, falls gilt:

$$\phi(a \cap_1 b) = \phi(a) \cap_2 \phi(b)$$
$$\phi(a \cup_1 b) = \phi(a) \cup_2 \phi(b)$$

Falls ϕ bijektiv, so heißt ϕ (Verbands-) Isomorphismus

also: es ist egal, ob erst Operation angewendet wird, dann abgebildet, oder umgekehrt.

Def. 6.7:
1. Sei $V = (M, \cap, \cup)$ ein Verband. Wir definieren $H(V) = (M, \leq)$ mit $a \leq b$ gdw. $a \cap b = a$.
2. Sei $H = (M, \leq)$ Halbordnung, so dass je zwei Elemente Infimum inf und Supremum sup besitzen. Wir definieren $V(H) = (M, \cap, \cup)$ wobei $a \cap b = \inf(\{a,b\})$ und $a \cup b = \sup(\{a,b\})$.

Satz:
1. Wenn V Verband ist, so ist H(V) partielle Ordnung, in der je zwei Elemente Supremum und Infimum besitzen

2. Wenn H Halbordnung ist, so dass je zwei Elemente Infimum und Supremum besitzen, so ist V(H) Verband.
3. H = H(V(H)) und V = V(H(V))
Beweis, dass H(V) partielle Ordnung ist:
Sei $H(V) = (M, \leq)$ mit $a \leq b$ gdw. $a \cap b = a$. Zu zeigen: $\leq$ reflexiv, transitiv, antisymmetrisch

a) Reflexivität: $a \leq a$

$$\begin{aligned} a \cap a &= a \cap (a \cup (a \cap b)) && \text{(Absorption angewendet auf rechtes a)} \\ &= a && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

b) Transitivität: $a \leq b$ und $b \leq c$ impliziert $a \leq c$

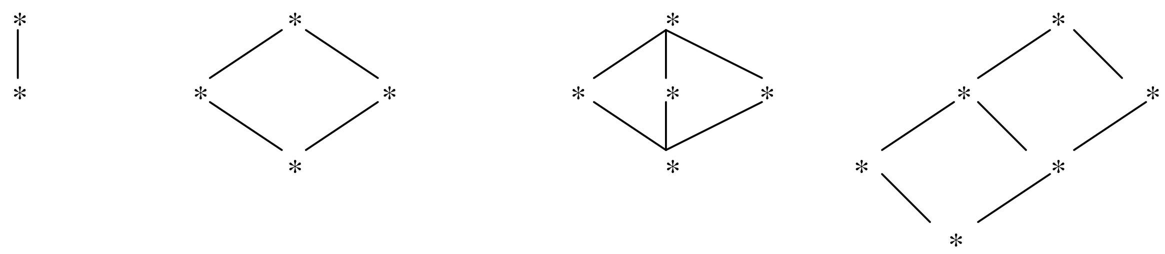
$$\begin{aligned} a \cap c &= (a \cap b) \cap c && \text{(da wegen } a \leq b\text{: } a = a \cap b\text{)} \\ &= a \cap (b \cap c) && \text{(Assoziativität)} \\ &= a \cap b && \text{(da wegen } b \leq c\text{: } b \cap c = b\text{)} \\ &= a && \text{(da wegen } a \leq b\text{: } a \cap b = a\text{)} \end{aligned}$$

c) Antisymmetrie: $a \leq b$ und $b \leq a$ impliziert $a = b$

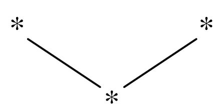
$$\begin{aligned} a &= a \cap b && \text{(wegen } a \leq b\text{)} \\ &= b \cap a && \text{(Kommutativität)} \\ &= b && \text{(wegen } b \leq a\text{)} \end{aligned}$$

Verbände lassen sich also durch Hasse Diagramme darstellen:

Beispiele:



kein Verband:



<u>6.4 Boolesche Algebren</u>

Def. 6.8: Ein Verband $V = (M, \cap, \cup)$ heißt distributiv, wenn für alle $a,b,c \in M$ gilt:

1. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
2. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Beispiele:
(Pot(M), $\cap$, $\cup$);
jede linear geordnete Menge M mit $a \cap b = \inf(\{a,b\})$ und $a \cup b = \sup(\{a,b\})$

Satz: Sei V distributiver Verband. Falls $a \cap b = a \cap c$ und $a \cup b = a \cup c$, so gilt $b = c$.

Beweis:

b	$= b \cup (a \cap b)$	(Absorption)
	$= b \cup (a \cap c)$	(Voraussetzung)
	$= (b \cup a) \cap (b \cup c)$	(Distributivität)
	$= (a \cup b) \cap (b \cup c)$	(Kommutativität)
	$= (a \cup c) \cap (b \cup c)$	(Voraussetzung)
	$= (a \cap b) \cup c$	(Distributivität)
	$= (a \cap c) \cup c$	(Voraussetzung)
	$= c$	(Absorption)

Def. 6.9: Sei $V = (M, \cap, \cup)$ ein Verband mit kleinstem Element 0 und größtem Element 1.
$b \in M$ heißt Komplement von $a \in M$, wenn gilt:

$$a \cap b = 0$$
$$a \cup b = 1$$

V heißt komplementär, wenn jedes Element mindestens ein Komplement besitzt.

Beispiel: (Pot(M), $\cap$, $\cup$) mit Nullelement $\varnothing$ und Einselement M. Komplement von X: $M \setminus X$.

Satz: In einem distributiven Verband hat jedes Element höchstens ein Komplement.
Beweis:
Seien y1 und y2 Komplemente von x. Es gilt $x \cap y_1 = 0 = x \cap y_2$ und $x \cup y_1 = 1 = x \cup y_2$.
Somit folgt die Behauptung aus dem vorigen Satz.

Def. 6.10: Ein komplementärer distributiver Verband heißt Boolesche Algebra.

Das eindeutige Komplement von a bezeichnet man mit a^c.

Anmerkung: George Boole, 1815-1864, engl. Mathematiker

Einfachstes Beipiel: ($\{0,1\}$, $\wedge$, $\vee$), Nullelement 0, Einselement 1

Satz: In einer Booleschen Algebra gelten folgende Beziehungen:

1. $0^c = 1$, $1^c = 0$
2. $(a^c)^c = a$
3. $x = y$ gdw. $x^c = y^c$
4. $(a \cup b)^c = a^c \cap b^c$; $(a \cap b)^c = a^c \cup b^c$

5. $a \leq b$ gdw. $b^c \leq a^c$
6. $a \leq b$ gdw. $a \cap b^c = \emptyset$

Beweis von 2. Wenn x Komplement von y, so auch y Komplement von x. Da demnach sowohl a wie $(a^c)^c$ Komplement von a^c sind, folgt Gleichheit aus der Eindeutigkeit des Komplements.

Beispiel aus der Technischen Informatik:

Betrachte die Menge aller 2-stelligen booleschen Funktionen f: {0,1} x {0,1} -> {0,1} mit den Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, die folgendermaßen definiert sind:

$f_1 \wedge f_2(x,y) = f_1(x,y) \wedge f_2(x,y)$ ($\wedge$ links: Operation auf Funktionen, rechts logisches und)
$f_1 \vee f_2(x,y) = f_1(x,y) \vee f_2(x,y)$ ($\vee$ links: Operation auf Funktionen, rechts log. oder)

Diese bilden einen booleschen Verband mit:

Nullelement f^0 mit $f^0(x,y) = 0$ für alle x,y
Einselement f^1 mit $f^1(x,y) = 1$ für alle x,y
$f^c(x,y) = \neg f(x,y)$ für alle x,y

Beispiel

x	y	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$	$f_1 \wedge f_2(x,y)$	$f_1 \vee f_2(x,y)$	$f_1^c(x,y)$	$f_2^c(x,y)$	$f^0(x,y)$	$f^1(x,y)$
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1

Es ergibt sich folgende Verbandsstruktur (Funktionen repräsentiert als Bitfolge) :