

Übungsaufgaben Diff.-Int. 2 Serie 8

1.)

a)

$$\int \cos^2 x \, dx$$

Lösung mit part. Integration:

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos x \, dx &= \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx && (u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \cos x \quad v' = -\sin x) \\ &= \cos x \sin x + \int 1 - \cos^2 x \, dx \\ &= \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}(\cos x \sin x + x)}} \end{aligned}$$

b)

$$\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{3}{2}} \, dx = \underline{\underline{\frac{8}{15} x^{\frac{5}{2}}}}$$

2.)

$$\int \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x + 1} \, dx$$

Ich forme den Bruch zunächst mit Polynomdivision um:

$$\int \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x + 1} \, dx = \int 1 - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \, dx$$

Als nächstes folgt Partialbruchzerlegung von $\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$:Nullstellen des Nenners: $x_{01} = -1$ $x_{02} = -i$ $x_{03} = i$

das ergibt:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x+i)(x-i)} = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad (\text{da } i^2 = -1)$$

Koeffizientenvergleich:

$$A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1) = x^2 + x + 1$$

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C = x^2 + x + 1$$

d.h., es ist folgendes lineares Gleichungssystem, zu lösen:

$$A + B = 1$$

$$B + C = 1 \quad \rightarrow \quad A = B = C = \frac{1}{2}$$

$$A + C = 1$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x + 1} dx &= \int 1 dx - \left(\int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{1+x^2} dx \right) \\
 &= x - \frac{1}{2} \ln(x+1) - \left(\int \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} dx \right) \\
 &= x - \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \underline{\underline{x - \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \arctan x}}
 \end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2+3x+x^2}{x^2+2x+2} dx &= \int 1 + \frac{x}{x^2+2x+2} dx \\
 &= x + \int \frac{1}{2} \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2} dx \\
 &= x + \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{2}{x^2+2x+2} dx \right) \\
 &= x + \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - 2 \int \frac{1}{1+(1+x)^2} dx \right) \\
 &= x + \frac{1}{2} \left(\ln(x^2+2x+2) - 2 \arctan(1+x) \right) \\
 &= \underline{\underline{x + \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - \arctan(1+x)}}
 \end{aligned}$$

4.)

Gegeben ist für $x > 0$ folgende Funktion: $L(x) = \int_1^x \frac{du}{u}$.

Zu zeigen: $L(xy) = L(x) + L(y)$, $x, y > 0$ ohne Integration.

Ich nehme die Gültigkeit von $L(x) + L(y) = L(xy)$ an und setze demzufolge:

$$\int_1^x \frac{du}{u} + \int_1^y \frac{du}{u} = \int_1^{xy} \frac{du}{u} = \int_1^x \frac{du}{u} + \int_x^{xy} \frac{du}{u} \quad (\text{zweite Umformung ist lediglich Rechenregel basierend auf HS})$$

$$\text{dann ist zu zeigen: } \int_1^y \frac{du}{u} = \int_x^{xy} \frac{du}{u} \quad (*)$$

Im Integral $\int_x^{xy} \frac{du}{u}$ substituiere ich folgendermaßen: $z = \frac{u}{x}$ mit $u = xz$, also $du = xdz$

$$\int_x^{xy} \frac{du}{u} = \int_1^y \frac{xdz}{xz} = \int_1^y \frac{dz}{z}$$

$$\int_1^y \frac{dz}{z} \text{ ist aber das gleiche wie } \int_1^y \frac{du}{u}, \text{ d.h. die Gleichheit (*) gilt.}$$

Da ich hier evtl. von einer falschen Annahme ausgegangen bin, folgt aus der Umkehrung meiner Beweisrichtung dann sofort der eigentliche Beweis.

□