

Übungsaufgaben Diff.-Int. 2 Serie 7

1.)

Zu zeigen: Wenn f stetig auf $[a, b]$ und $\int_a^b f(x) dx = 0$, dann $\exists c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

Es lässt sich der Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden, d.h., da f stetig existiert mind. ein $c \in (a, b)$, so dass

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c) \quad (a \neq b)$$

Daraus folgt, wenn $\int_a^b f(x) dx = 0$:

$$(b-a) f(c) = 0$$

$$f(c) = 0$$

□

2.)

Beweis für folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes:

Wenn f, g stetig auf $[a, b]$ und $g(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, dann $\exists \mathbf{x} \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\mathbf{x}) \int_a^b g(x) dx$$

Ich schätze das Integral nach oben und unten ab:

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) \int_a^b g(x) dx$$

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = c \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad , c \in \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$$

Nach dem Zwischenwertsatz folgt, da f stetig: $\exists \mathbf{x} \in [a, b]$ mit $f(\mathbf{x}) = c$.

$$\text{D.h.} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

und schließlich $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\mathbf{x}) \int_a^b g(x) dx$.

□

3.)

a)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + c$$

b)

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = -\sqrt{\cos 2x} + c$$

4.)

a)

Lösung m.H. part. Integration $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - \int 2x e^x dx \quad (u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x^2 \quad v' = 2x)$$

wiederum part. Integration:

$$\begin{aligned} \int 2x e^x dx &= e^x 2x - 2 \int e^x dx && (u' = e^x \quad u = e^x \quad v = 2x \quad v' = 2) \\ &= e^x 2x - 2e^x \end{aligned}$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x} dx$$

Substitution $z = \frac{1}{x}$, daraus folgt $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, also $dx = -x^2 dz$

$$\int \frac{1}{x^2} \arctan z (-x^2) dz = -\int \arctan z dz$$

part. Integration:

$$\begin{aligned} -\int 1 \cdot \arctan z dz &= -z \arctan z + \int \frac{z}{1+z^2} dz && (u' = 1 \quad u = z \quad v = \arctan z \quad v' = \frac{1}{1+z^2}) \\ &= -z \arctan z + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) \end{aligned}$$

Resubstitution:

$$\int \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c$$