

Übungsaufgaben Diff.-Int. 2 Serie 6

1.)

Es ist folgende Implikation zu zeigen: wenn $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, dann auch $|f(x)|$.

Sei $f(x)$ integrierbar auf $[a, b]$, dann gilt für jede Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle I_k der Länge Δx_k :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |M_k - m_k| \Delta x_k < \epsilon \quad \text{falls } \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k < \delta$$

$$\text{wobei } M_k = \sup_{x \in I_k} f(x) \text{ und } m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$$

Nun ist zu zeigen, dass dies auch für $\sum_{k=0}^{n-1} ||M_k| - |m_k|| \Delta x_k$ mit $|M_k| = \sup_{x \in I_k} |f(x)|$ und $|m_k| = \inf_{x \in I_k} |f(x)|$ gilt:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} ||M_k| - |m_k|| \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} |M_k - m_k| \Delta x_k < \epsilon \quad (\text{Dreiecksungleichung nach Tipp})$$

$$\text{also ist auch } \sum_{k=0}^{n-1} ||M_k| - |m_k|| \Delta x_k < \epsilon \quad \text{für } \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k < \delta.$$

Daraus folgt die Integrierbarkeit von $|f(x)|$.

□

2.)

Beweis für $\int_a^b (I f(x)) dx = I \int_a^b f(x) dx$, $I = \text{const}$:

Ich zerlege das Intervall $[a, b]$ wieder in n Teilintervalle I_k der Länge Δx_k . Sei weiterhin $T = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\}$ eine Menge von Zwischenwerten mit der Eigenschaft $\mathbf{x}_k \in I_k = [x_k, x_{k+1}]$.

Dann ist $\mathbf{s} = \sum_{k=0}^{n-1} I f(\mathbf{x}_k) \Delta x_k = I \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{x}_k) \Delta x_k$ die Zwischensumme von $I f(x)$.

Das bestimmte Integral von f ist nun der Grenzwert S aller Zwischensummen von f (falls dieser existiert, was aber nach Voraussetzung gegeben ist).

$$S = I \lim_{\max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{x}_k) \Delta x_k = I \int_a^b f(x) dx$$

Damit ist $S = \int_a^b (I f(x)) dx = I \int_a^b f(x) dx$.

□

3.)

$\int_0^b x^2 dx$ mittels Summendefinition berechnen:

Ich zerlege mal wieder $[0, b]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta x_k = \frac{b}{n}$. Die Stützstellen sind dann

$$x_k = \frac{kb}{n}.$$

Da x^2 im Intervall streng monoton steigend, befindet sich der minimale Funktionswert an der linken und der maximale an der rechten Grenze, d.h.

$$\text{Obersumme } O_n = \sum_{k=1}^n x_k^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 b^2}{n^2} \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\text{Untersumme } U_n = \sum_{k=1}^n x_{k-1}^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2 b^2}{n^2} \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2$$

$$O_n - U_n = \frac{b^3}{n^3} (n^2) = \frac{b^3}{n} < \epsilon \rightarrow \text{integrierbar}$$

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{1} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{b^3}{3}$$

4.)

Zu zeigen: $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}}$.

Wegen $\int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$, lässt sich die Ungleichung folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2} dx &< \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \\ \frac{1}{2} &< \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \\ 2 &> \sqrt{4-x^2+x^3} \\ 4 &> 4-x^2+x^3 \\ x^2 - x^3 &> 0 \\ x^2(1-x) &> 0 \end{aligned}$$

Aus $0 < x < 1$ (die Punkte $x=0$ und $x=1$ haben keinen Einfluss auf den Wert des bestimmten Integrals) folgt die Gültigkeit der letzten Ungleichung und demzufolge auch die der ursprünglichen. \square