

Übungsaufgaben Diff.-Int. 2 Serie 5

1.)

Folgende Ungleichung ist zu beweisen: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ mit $x > 0$.

Ich wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an und setze:

$$f(x) = \ln x \text{ mit Grenzen } a = 1, b = 1+x$$

Da $f(x)$ stetig und differenzierbar, folgt daraus:

$$\exists \mathbf{x} \in (1, 1+x), \text{ sodass } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\mathbf{x})$$

D.h.

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{1+x-1} = \frac{1}{\mathbf{x}}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\mathbf{x}}$$

Mit $1 < \mathbf{x} < 1+x$ folgt sofort die Abschätzung

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \text{ bzw. } \ln(1+x) < x$$

□

2.)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a \log x$$

Sei hier a die Basis des Logarithmus, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0+0} x^a \ln x = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^a}}$$

Anwendung der Regel von L'Hospital liefert:

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{(-a)x^{-a-1}} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^a}{(-a)} = 0$$

3.)

Beweis, dass die zweite Ableitung an einer Minimalstelle einer stetig differenzierbaren Funktion positiv ist.

Sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ zweimal differenzierbar und gilt $f'(x_0) = 0$ sowie $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ (lokales Minimum). Ich schreibe den Taylorschen Satz für $n=1$ auf. Zu jedem $x \in U(x_0)$ existiert ein $\mathbf{q} \in (0,1)$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0 + \mathbf{q}(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2 \\ &= f(x_0) + \frac{f''(x_0 + \mathbf{q}(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

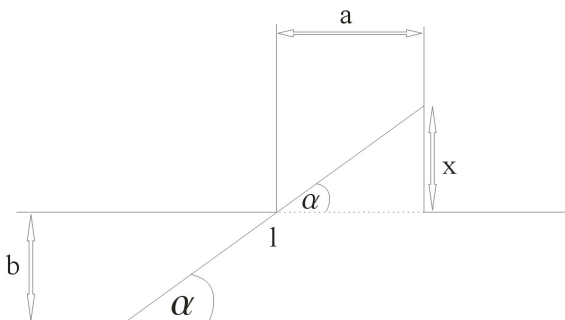
Aufgrund von $f(x) > f(x_0)$ und $(x-x_0)^2 > 0$ muss folglich $f''(x_0) > 0$, also auch $f''(x_0) \geq 0$ gelten.

□

4.)

Zu bestimmen ist die maximale Länge eines Balkens, der durch zwei rechtwinklig aufeinanderstoßende Kanäle „geflößt“ werden soll.

Skizze:



Dabei ist zu beachten, dass es in dieser Extremwertaufgabe darum geht, für l ein Minimum zu finden, das die maximale Länge des Balkens bestimmt.

Hier gilt:

$$\sin \mathbf{a} = \frac{x+b}{l} \quad \tan \mathbf{a} = \frac{x}{a} \quad \text{mit } a, b, x > 0$$

Damit ergibt sich als Zielfunktion:

$$l(\mathbf{a}) = \frac{a \tan \mathbf{a} + b}{\sin \mathbf{a}} = \frac{a \frac{\sin \mathbf{a}}{\cos \mathbf{a}} + b}{\sin \mathbf{a}} = \frac{a}{\cos \mathbf{a}} + \frac{b}{\sin \mathbf{a}}$$

Lokale Extrema bestimmen:

(notwendige Bedingung)

$$\begin{aligned} l'(a) &= \frac{a \sin a}{\cos^2 a} - \frac{b \cos a}{\sin^2 a} = 0 \\ \frac{a \sin a}{\cos^2 a} &= \frac{b \cos a}{\sin^2 a} \\ a \sin^3 a &= b \cos^3 a \\ \tan a &= \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \\ a &= \arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

(hinreichende Bedingung)

$$l''(a) = \frac{a \cos^3 a + 2a \sin^2 a \cos a}{\cos^4 a} - \frac{-b \sin^3 a - 2b \cos^2 a \sin a}{\sin^4 a} = \frac{a(1 + \sin a)}{\cos^3 a} + \frac{b(1 + \cos a)}{\sin^3 a}$$

$$\begin{aligned} l''\left(\arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) &= \frac{a \left(1 + \frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}\right)}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}\right)^2}\right)^3} + \frac{b \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}\right)^2}\right)}{\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}\right)^3} \\ &= \frac{a \left(1 + \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}\right)}{\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}\right)}{\frac{b}{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

Aus $a, b > 0$ ist hieraus ohne weitere Umformungen ersichtlich, dass $l''\left(\arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) > 0$,
d.h. bei dem gefunden Extremwert handelt es sich um ein lokales Minimum.

Daraus folgt schließlich:

$$\begin{aligned} l\left(\arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) &= \frac{a \tan\left(\arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) + b}{\sin\left(\arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)} = \frac{a \sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b}{\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}} = \frac{\left(a \sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b\right) \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \\ &= \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b\right) \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{b}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \underline{\underline{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

Der Balken darf also eine max. Länge von $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ nicht überschreiten.