Übungsaufgaben Diff.-Int. 2
Serie 4

1.)

Es ist zu zeigen, dass die Eulersche Zahl e irrational ist. Entsprechend dem Tipp führe ich einen indirekten Beweis:

1. wie gegeben
2. Taylor-Entwicklung an $x_0 = 0$:

$$n!\frac{p}{q} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + ... + 1 \right) = \frac{e^d}{n+1} \quad , \quad 0 < d < 1$$

3. Für $n > \max(q,3)$ gilt Gleichung in 2. nicht, da:

n ist auf jeden Fall größer als q, d.h. $n!\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ ($n!$ und q kürzen sich)

und weiterhin $\left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + ... + 1 \right) \in \mathbb{N}$. (offensichtlich ;)

Nun ist aber $\frac{e^d}{n+1} \notin \mathbb{N}$ wegen $n > 3$ und $0 < d < 1$, also $e^d < n+1$.

Daraus folgt, dass die linke Seite der Gleichung in 2. eine natürliche (bzw. ganze) Zahl ist, aber nicht die rechte, woraus keine Gleichheit folgen kann. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und e ist irrational.

$\square$

2.)

Ich führe wiederum einen indirekten Beweis:

Angenommen, für n gerade ex. mehr als zwei reelle Nullstellen, so müssen nach dem Satz von Rolle mehrere (paarweise verschiedene) x_i existieren mit $f'(x_i) = 0$. Der Satz von Rolle darf aufgrund der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f(x) = x^n + px + q$ angewendet werden.

Es gilt:

$$f'(x) = nx^{n-1} + p = 0$$

$$x^{n-1} = -\frac{p}{n}$$

$$x = \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$$

Damit ex. für x nur eine Lösung, da eine ungerade Wurzel gezogen wird (und gezogen werden darf), welche eindeutig bestimmt ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. es existieren nicht mehr als zwei reelle Nullstellen.

$\square$

3.)

Es ist $\lim\limits_{x\to p}\frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$ zu bestimmen.

Um nicht L'Hospital zu verwenden (kam das in der Vorlesung schon dran?) führe ich eine Approximation m.H. einer Taylor-Entwicklung durch und berechne davon den Limes.

$$\begin{array}{ll} f_1(x)=\sin(3x) & f_2(x)=\tan(5x) \\ f_1'(p)=-3 & f_1'(p)=5 \\ f_1''(p)=0 & f_1''(p)=0 \\ f_1'''(p)=27 & f_1'''(p)=250 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$f_1(x)=0+\frac{-3}{1!}(x-p)+0+\frac{27}{3!}(x-p)^3+.....$$

$$f_2(x)=0+\frac{5}{1!}(x-p)+0+\frac{250}{3!}(x-p)^3+.....$$

$$\lim_{x\to p}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to p}\frac{-3(x-p)+\frac{27}{3!}(x-p)^3+.....}{5(x-p)+\frac{250}{3!}(x-p)^3+.....}=\lim_{x\to p}\frac{-3+\frac{27}{3!}(x-p)^2+.....}{5+\frac{250}{3!}(x-p)^2+.....}=\underline{\underline{-\frac{3}{5}}}$$

Probe mit L'Hospital: $\lim\limits_{x\to p}\frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}=\lim\limits_{x\to p}\frac{(\sin(3x))'}{(\tan(5x))'}=\lim\limits_{x\to p}\frac{3\cos(3x)\cos^2(5x)}{5}=-\frac{3}{5}$

4.)

a)

$$\lim_{x\to 0+0}(\cot x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0+0}e^{\sin x\ln\cot x}$$

Taylorentwicklung von $\cot x$:

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-..... \quad ,\cot x\to\infty \text{ für } x\to 0$$

Um $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x\ln\cot x)$ zu berechnen, wende ich der Einfachheit halber nun trotzdem die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin x\ln\cot x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln\cot x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{-1}{\cot x\sin^2 x}}{(-1)\sin^{-2}x\cos x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{x\to 0+0}(\cot x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0+0}e^{\sin x\ln\cot x}=e^0=\underline{\underline{1}}$

b)

$$\lim_{x\to 0+0}\left(x^x\right)^x = \lim_{x\to 0+0} e^{x^2 \ln x}$$

Zur Berechnung von $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2 \ln x$ verwende ich wieder L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0+0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-x^2}{2} = 0$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^x\right)^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x^2 \ln x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$