Übungsaufgaben Diff.-Int. 2
Serie 3

1.)

Es sind folgende Formeln zu beweisen:

a) $\left(\arctan x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ich benutze die Umkehrfunktion $f^{-1}\left(y\right) = x = \tan y$ (*)

Nach Differentiationsregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

mit (*) folgt dann:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

b) $\left(\operatorname{arccot} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Analog ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\left(y\right) = x = \cot y$ (*)

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\left(1+\cot^2 y\right)} \quad \text{, da } (\cot y)' = -\frac{1}{\sin^2 y} = -\left(1+\cot^2 y\right)$$

mit (*) folgt:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$\square$

2.)

Gesucht sind die Ableitungen von:

a) $f\left(x\right) = x^x$

$$f\left(x\right) = x^x = e^{x\ln x}$$

$$f'(x) = e^{x\ln x}\left(\ln x + \tfrac{x}{x}\right) = \underline{\underline{x^x\left(\ln x + 1\right)}}$$

b) $f\left(x\right) = \left(\cos x\right)^{\sin x}$

$$f\left(x\right) = e^{\sin x \ln\cos x}$$

$$f'(x) = \underline{\underline{\left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x \ln\cos x - \tan x \sin x\right)}}$$

c) $f\left(x\right) = \sqrt[25]{3x^2}$

$$f'(x) = \underline{\underline{13286025\sqrt{3}\cdot x\cdot\sqrt[23]{x^2}}}$$

3.)

Zu zeigen: Wenn $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$, dann $f(x)=\text{const}$ auf $[a,b]$.

Ich wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an und setze x als rechte Grenze mit $a<x<b$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

daraus folgt: $f(x)=f(a) \qquad \forall x \in [a,b]$

Aus $a=\text{const}$ folgt sofort $f(a)=\text{const}$ und damit auch $f(x)=\text{const}$ auf $[a,b]$.

$\square$

4.)

Beweis der Leibniz-Regel mittels vollständiger Induktion:

I.A.: $n=1$

$$(fg)'=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(1-k)}g^{(k)}=\binom{1}{0}f'g+\binom{1}{1}fg'=f'g+fg'$$

I.V.: Leibniz-Regel gültig für n-te Ableitung
I.B.: Leibniz-Regel auch gültig für (n+1)-te Ableitung
Beweis:

$$(fg)^{(n+1)}=\left((fg)^{(n)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}}_{\text{Index } k \text{ benenne ich in } j \text{ um}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)}}_{\text{ich setze } k+1=j}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j+1)}g^{(j)}+\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}f^{(n-j+1)}g^{(j)}$$

$$=\binom{n}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n+1)}+\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right)}_{\binom{n+1}{j}}f^{(n-j+1)}g^{(j)}$$

mit $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ bzw. $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$ und erneutem Umbenennen von j mit k sowie Einfügen des ersten und letzten Gliedes in die Reihe ergibt sich:

$$(fg)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}$$

Damit wurde von der Induktionsvoraussetzung auf die Induktionsbehauptung geschlossen und die Leibniz-Regel bewiesen.

$\square$