Übungsaufgaben Diff.-Int. 2
Serie 2

1.)

Gegeben: $\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+1\right|<e \quad \forall x>c\left(e\right).$

Gesucht: $c\left(e\right)>0$

$$\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|=\left|\frac{2}{1-\sqrt{x}}\right|<e$$

$$\frac{2}{e}<\left|1-\sqrt{x}\right|=\sqrt{x}-1$$ (Betrag aufgelöst, da nur Betrachtung für große x)

$$1+\frac{2}{e}<\sqrt{x}$$

$$\left(1+\frac{2}{e}\right)^2<x$$

daraus folgt: $c\left(e\right)=\left(1+\frac{2}{e}\right)^2$.

2.)

Da $f\left(x\right)$ stetig, gilt nach Def.: Zu jeder pos. reellen Zahl e ex. eine pos. reelle Zahl d, so daß $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<e \quad \forall x,x_0\in Def.$ mit $\left|x-x_0\right|<d$.

Nach der Dreiecksungleichung $\left|\left|x\right|-\left|y\right|\right|\le\left|x-y\right|$ gilt:

$$\left|\left|f\left(x\right)\right|-\left|f\left(x_0\right)\right|\right|\le\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|$$

somit weiterhin wegen $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<e$ auch

(*) $\left|\left|f\left(x\right)\right|-\left|f\left(x_0\right)\right|\right|<e$

Da $\left|x-x_0\right|<d$ bereits aus der Stetigkeit von $f\left(x\right)$ hervorgeht, ist mit (*) auch $\left|f\left(x\right)\right|$ stetig.

□

3.)

a)

Betrachtung für $m\neq 0$:

$\lim\limits_{x\to\pm 0} x^m\sin\frac{1}{x}=0$, da $x^m=0$ und $\sin\frac{1}{x}$ beschränkt.

D.h. $f_m\left(x\right)$ ist stetig.

Betrachtung für $m=0$:

Da 0^0 nicht def., lassen sich keine Limes-Regeln anwenden. Ich betrachte deswegen die Folge $f\left(x_k\right)=\sin\frac{1}{x_k}=1$, also $\frac{1}{x_k}=\frac{p}{2}+2kp$ und $x_k=\dfrac{1}{\frac{p}{2}+2kp}$ mit $k\in\mathbb{Z}$.

Für $k\to\infty$ geht $x_k\to 0$ und damit ist der Grenzwert 1.

D.h. der Grenzwert stimmt nicht mit dem Funktionswert überein, damit ist $f_m\left(x\right)$ nicht stetig.

b)
Betrachtung für m=0:

$f_m(x)$ ist nicht differenzierbar, da nach a) schon nicht stetig.

Betrachtung für m=1:

Ich untersuche den Differentialquotienten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

Da $\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$ nicht existiert, ist $f_m(x)$ nicht differenzierbar.

Betrachtung für m>1:

Differentialquotient:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^m\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h^{m-1}\sin\frac{1}{h}=0$$

Aus der Existenz des Grenzwertes folgt die Differenzierbarkeit für m>1.

4.)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x)-f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,g(x)+f'(x)hg(x)+he\,g(x)-f(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)h-f(x)he}{hg(x+h)\,g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)+e\,g(x)-f(x)e}{g(x+h)\,g(x)}$$

mit $e\to 0$ ergibt sich:

$$=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

□