Übungsaufgaben Diff.-Int. 2
Serie 10

1.)

Es ist die Länge der Schraubenlinie $(a\cos t, b\sin t, ct)$ mit $0 < t < T$ und $a = b$ zu berechnen.

$$l = \int_0^T \sqrt{\left((a\cos t)'\right)^2 + \left((a\sin t)'\right)^2 + \left((ct)'\right)^2}$$
$$= \int_0^T \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2}\,dt$$
$$= \int_0^T \sqrt{a^2 + c^2}\,dt = \sqrt{a^2+c^2}\int_0^T dt = \underline{\underline{\sqrt{a^2+c^2}\cdot T}}$$

2.)

Oberfläche des Rotationskörpers $y = 1 - x^2,\ |x| \le 1$ um x-Achse:

$$O_x = 2p\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$
$$= 2p\int_{-1}^{1}(1-x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx = 4p\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

Substitution: $2x = u$:

$$O_x = 2p\int_0^2 \left(1-\tfrac{u^2}{4}\right)\sqrt{1+u^2}\,du$$

Substitution: (Ansatz aus Formelsammlung)

$$u = \frac{t^2-1}{2t} \qquad \sqrt{1+u^2} = \frac{t^2+1}{2t}$$
$$du = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt \qquad t = u + \sqrt{u^2+1}$$

$$O_x = 2p\int_1^{2+\sqrt{5}} \left(1 - \frac{(t^2-1)^2}{16t^2}\right)\frac{t^2+1}{2t}\,\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$
$$= \tfrac{p}{8}\int_1^{2+\sqrt{5}} \left(\frac{16t^2 - t^4 + 2t^2 - 1}{t^2}\right)\frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\,dt$$
$$= \tfrac{p}{32}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{(18t^2 - t^4 - 1)(t^4 + 2t^2 + 1)}{t^5}\,dt$$
$$= \tfrac{p}{32}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{18t^6 - t^8 - t^4 + 36t^4 - 2t^6 - 2t^2 + 18t^2 - t^4 - 1}{t^5}\,dt$$
$$= \tfrac{p}{32}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{-t^8 + 16t^6 + 34t^4 + 16t^2 - 1}{t^5}\,dt$$

$$= \tfrac{p}{32}\left[-\frac{t^4}{4} + 8t^2 + 34\ln t - \frac{8}{t^2} + \frac{1}{4t^4}\right]_1^{2+\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{p}{32}\left(\frac{1}{4\left(2+\sqrt{5}\right)^4} - \frac{8}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + 8\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(2+\sqrt{5}\right)^4 + 34\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - 0\right)$$

$$\vdots$$

$$= \tfrac{1}{16}p\left(14\sqrt{5} + 17\,\text{arcsinh}(2)\right)$$

3.)

Konvergenzradien bestimmen:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!}\right| = \left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right| = \left|\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}\right| = \left|\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right|$$

Diese Folge konvergiert gegen einen pos. Grenzwert $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{e}$

Damit ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{l} = e$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^3\,(3n)!}{(3n+3)!\,(n!)^3}\right| = \left|\frac{(n+1)^3\,(3n)!}{(3n)!\,(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1}{27n^2+9n+2}\right|$$

Die Folge konvergiert wieder gegen pos. Grenzwert $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{27n^2+9n+2}\right| = \tfrac{1}{27}$

Und der Konvergenzradius ist $r = \frac{1}{l} = 27$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d^{n^2} x^n \quad , 0 < d < 1$$

Wurzelkriterium:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{d^{n^2}} = d^n$

Das ist nun aber eine Nullfolge, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} d^{n^2} x^n$ konvergiert für alle x.

Konvergenzradius $r = \underline{\underline{\infty}}$.

4.)

Beweis, dass $f_n(x) = x^n,\ 0 \le x \le 1$ nicht gleichmäßig konvergent.

$f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

Beweis indirekt:

Sei $f_n(x)$ gleichmäßig konvergent und $x < 1$. Dann gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < e \qquad \forall n \ge n_0(e), \forall x < 1,\ e < \tfrac{1}{2}$$

Das ergibt einen Widerspruch, da für alle n gilt: $\lim\limits_{x \to 1} x^n = 1$ (x^n stetig), d.h. damit existiert eine Umgebung $U_d(1)$, sodass $1 - \tilde{e} < x^n \le 1$ ($\tilde{e} < \tfrac{1}{2}$).

□