

Übungsaufgaben vom 26.1.2004

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die 2π -periodische Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = g(x)$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \\ 2 - \frac{x}{\pi} & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Geben Sie Fourierreihenentwicklung der Lösung an und zeigen Sie deren gleichmäßige und absolute Konvergenz.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß sich eine sogenannte *Eulersche Differentialgleichung*

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten a_0, \dots, a_n im Intervall $(0, \infty)$ durch die Substitution $x = e^t$ in eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $z = z(t) := y(x(t))$ überführen läßt.

Aufgabe 3: Lösen Sie die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen:

- a) $x^3 y''' + x y' - y = 3x^4$;
b) $x^2 y'' - 7x y' + 15y = x$ mit Anfangswerten $y(1) = y'(1) = 0$.

Aufgabe 4: Eine Flüssigkeit ströme wirbelfrei durch ein kreiszylindrisches Rohr mit dem Radius $R > 0$. Die Geschwindigkeitsverteilung $v = v(r)$ der Flüssigkeit im Rohr hängt dann nur vom Abstand r von der Symmetrieachse ab und erfüllt die Differentialgleichung (*Hagen-Poiseuillesches Gesetz*)

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = -\gamma \quad (\gamma = \text{const.}).$$

Bestimmen Sie die allgmeine Lösung dieser Gleichung. Welche dieser Lösungen kommen als physikalisch sinnvolle Lösung in Betracht? Berechnen Sie daraus die Flüssigkeitsmenge

$$V = \int_0^R 2\pi v(r) r \, dr,$$

die pro Zeiteinheit durch das Rohr fließt.