Übungsaufgaben vom 17.1.2004

Aufgabe 1: a) Unter welchen Voraussetzungen kann man zu gegebenen Funktionen $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung bestimmen, für die $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem bilden?
b) Diskutieren Sie die Frage von a) für das Beispiel

$$y_1(x) = \frac{1}{x}, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \quad x > 0$$

und geben Sie gegebenenfalls eine Differentialgleichung an.

Aufgabe 2: Jedem Polynom

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_0$$

wird ein Differentialoperator $P(D)$, $D = d/dx$ mit konstanten Koeffizienten zugeordnet, der auf Funktionen $u = u(x)$ nach der Vorschrift

$$P(D)u = a_n D^n u + a_{n-1}D^{n-1}u + \ldots a_0 u$$

wirkt. Zeigen Sie die Rechenregel aus der Vorlesung:

$$P_1(D)[P_2(D)u] = P_2(D)[P_1(D)u] = (P_1P_2)(D)u.$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 1 - x.$$

Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.
b) Besimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 6y^{(3)} + 17y'' - 28y' + 20y = 0.$$

Aufgabe 4: Es werde die Differentialgleichung $y'' = g(y)$ betrachtet. Dabei genüge $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Lipschitzbedingung und es gelte $sg(s) < 0$ für $s \neq 0$. Zeigen Sie:
a) Jede Lösung der Differentialgleichung ist auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar.
b) Gilt $\int_0^s g(t)\,dt \to -\infty$ für $s \to \pm\infty$, so ist jede Lösung periodisch.