

Übungsaufgaben vom 5.1.2004

Aufgabe 1: Bestimmen Sie Fundamentalsysteme von Lösungen für die homogenen Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned}y_1' &= 3y_1 + 2y_2, \\y_2' &= -y_1 + y_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - 2y_2 + y_3, \\y_2' &= 2y_1 - 4y_2 + 2y_3, \\y_3' &= 3y_1 - 6y_2 + 3y_3.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit der (3×3) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems für drei gesuchte Funktionen $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - 2y_2 + \cos x, \\y_2' &= 2y_1 - y_3 + \sin x, \\y_3 &= 4y_1 - 2y_2 - y_3.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Werte der Matrizen-Exponentialfunktion:

$$\exp \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4: Es seien A, B komplexe $(n \times n)$ -Matrizen mit $AB = BA$ (d.h. die Matrizen sind vertauschbar). Beweisen Sie die Rechenregel

$$\exp(A + B) = \exp A \exp B$$

für die Matrizen-Exponentialfunktion. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung der Vertauschbarkeit (Beweis oder Gegenbeispiel)?