

**Übungsaufgaben vom 15.12.2003**

**Aufgabe 1:** Es sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$Y' = A(x)Y + b(x) \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (x > 0)$$

für zwei gesuchte Funktionen  $Y = (y_1, y_2)^\top$  gegeben. Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten  $Y(2) = (1, 4)^\top$ .

**Aufgabe 2:** Es sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} + 1, \quad y_2' = \frac{y_1}{x} - 2\frac{y_2}{x} + x \quad (x > 0)$$

gegeben. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das homogene System. Lösen Sie das Anfangswertproblem für das inhomogene System mit den Anfangswerten  $y_1(1) = 1$ ,  $y_2(1) = 1$ .

**Aufgabe 3:** Es sei  $A$  eine nilpotente reelle  $(n \times n)$ -Matrix, d.h. es gilt  $A^l = 0$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie: Jede Funktion  $y_i$  einer Lösung  $y = (y_1, \dots, y_n)$  des Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq l - 1$ .

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$y_i' = \sum_{j=1}^n a_j y_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_j = \text{const.}$$

Berechnen Sie die Determinante der zugehörigen Fundamentalmatrix.