

Übungsaufgaben vom 8.12.2003

Aufgabe 1: Zeigen Sie mittels der Majorantenmethode: Lassen sich die reellen Funktionen $f = f(x)$, $g = g(x)$ für $|x| < R$ durch konvergente Potenzreihen mit dem Mittelpunkt 0 darstellen, so gilt das auch für jede Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

Aufgabe 2: Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x^3 + y^3, \quad y(0) = 1$$

bestimme man die ersten vier Glieder der Potenzreihenentwicklung. Schätzen Sie den Konvergenzradius ab!

Aufgabe 3: Es sei μ ein reeller Parameter und $y = y(\mu, \cdot)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 1 + \mu \sin(x + y), \quad y(\mu, 0) = 0.$$

Stellen Sie die Differentialgleichungen für $\frac{\partial y}{\partial \mu}(\mu, \cdot)$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}(\mu, \cdot)$ auf und bestimmen Sie die beiden Funktionen.

Aufgabe 4: Es sei die reelle Funktion $f = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ stetig und genüge einer Lipschitzbedingung bez. y . Ferner gelte mit einem $a \geq 0$:

$$f(x, y) < 0 \quad \text{für} \quad y > a, \quad f(x, y) > 0 \quad \text{für} \quad y < -a.$$

Zeigen Sie die folgenden beiden Behauptungen:

a) Die maximale Lösung $y = y(y_0, \cdot)$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Ist f zusätzlich 1-periodisch in x , so existiert stets eine 1-periodische Lösung von $y' = f(x, y)$.

Hinweis zu b): Suchen Sie ein y_0 mit $y(y_0, 1) = y_0$!