Übungsaufgaben vom 1.12.2003

Aufgabe 1: Es werde das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$ mit der durch

$$f(x,y) = y|y|^{-3/4} + x \sin \frac{\pi}{x}$$

gegebenen stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachtet (für $y = 0$ bzw. $x = 0$ werde $f(x,y) = 0$ gesetzt). Sei $\delta = (n+\frac{1}{2})^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ und y_n der zugehörige Eulersche Polygonzug mit den Stützstellen $x_k = k\delta$. Beweisen Sie, daß die Folge $\{y_n\}_{n\geq 1}$ dieser Polygonzüge in keinem Intervall der Form $[0,a]$, $a > 0$ gleichmäßig konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie durch Fallunterscheidung n gerade/ungerade und untere bzw. obere Abschätzung, daß die Folge $\{y_n(x)\}_{n\geq 1}$ für kein $x \in (0,a_0)$, $a_0 > 0$ hinreichend klein, konvergiert.

Aufgabe 2: Es sei eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ mit $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$ stetig mit $f(x,y) < 0$ für $xy > 0$ und $f(x,y) > 0$ für $xy < 0$. Zeigen Sie, daß $y = 0$ die einzige Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ ist, welche in einer Umgebung von 0 definiert ist und $y(0) = 0$ erfüllt. Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt und betrachten Sie in einem die Zahl 0 enthaltenden kompakten Intervall diejenigen Punkte, in denen die Lösung ihr Maximum oder Minimum annimmt.

Aufgabe 3: Wird unter den Voraussetzungen des Existenzsatzes von Peano die Folge der sukzessiven Approximationen von gebildet, so braucht diese Folge nicht zu konvergieren, selbst wenn die Differentialgleichung eindeutig lösbar ist. Dazu werde folgendes Beispiel betrachtet: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} -2x & \text{für} \quad y \geq x^2, \\ -2y/x & \text{für} \quad |y| < x^2, \\ 2x & \text{für} \quad y \leq -x^2 \end{cases}$$

und $\{y_n\}_{n\geq 1}$ die Folge der sukzessiven Approximationen mit

$$y_0(x) = x^2, \qquad y_{n+1}(x) = \int_0^x f\big(t, y_n(t)\big)\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Zeigen Sie: Die Folge $\{y_n(x)\}_{n\geq 1}$ ist für kein $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ konvergent, obgleich die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ nach Übungsaufgabe 2 nur eine einzige Lösung mit $y(0) = 0$ besitzt.

Aufgabe 4: Unter den Voraussetzungen des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung werde die Folge der Eulerschen Näherungspolygonzüge gebildet.
a) Zeigen Sie, daß diese Folge gleichmäßig konvergent ist.
b) Versuchen Sie eine Abschätzung für den Fehler zwischen der exakten Lösung und den Näherungspolygonzügen in Abhängigkeit von der Intervallunterteilung zu erhalten.