

## Übungsaufgaben vom 24.11.2003

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie nach der Methode der sukzessiven Approximation die ersten vier Näherungen für die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = y^2 + 3y - 4, \quad y(0) = -\frac{3}{2}.$$

Vergleichen Sie die Näherungen mit der exakten Lösung.

**Aufgabe 2:** Beweisen Sie den folgenden Hilfssatz aus der Vorlesung. Es sei  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $\varphi(x) > 0$  für  $x > 0$  und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} = \infty.$$

Weiter sei  $u : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $u(x) \geq 0$  für  $x \in [0, a]$ ,  $u(0) = 0$  und

$$|u(x) - u(\bar{x})| \leq \int_x^{\bar{x}} \varphi(u(\tau)) d\tau \quad \text{für } 0 \leq x \leq \bar{x} \leq a.$$

Zeigen Sie:  $u = 0$  in  $[0, a]$ .

Hinweis: Definiere für kleine  $\varepsilon > 0$  ein  $\psi(\varepsilon, x)$  durch

$$2x = \int_{\varepsilon}^{\psi(\varepsilon, x)} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)},$$

zeige  $u(x) \leq \psi(\varepsilon, x)$  und führe anschließend den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  durch.

**Aufgabe 3:** Lösen Sie die folgenden beiden Riccatischen Differentialgleichungen:

- a)  $y' = e^{-x}y^2 + y + e^x$ ,  
 b)  $y' = x^3y^2 + \frac{y}{x} - x^5$ .

**Aufgabe 4:** Beweisen Sie: Sind  $y = y_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  vier verschiedene Lösungen einer Riccatischen Differentialgleichung im Intervall  $(a, b)$ , dann ist ihr Doppelverhältnis konstant, d.h. es gilt für alle  $x \in (a, b)$ :

$$\frac{y_1(x) - y_3(x)}{y_2(x) - y_3(x)} : \frac{y_1(x) - y_4(x)}{y_2(x) - y_4(x)} = \text{const.}$$