

Übungsaufgaben vom 10.11.2003

Aufgabe 1: Lösen Sie die folgenden impliziten Differentialgleichungen:

a) $(y')^3 + y' - x = 0,$

b) $y = x^2 e^{y'} + xy'$ mit den Anfangswerten $y(1) = 1.$

Zeichnen Sie Lösungskurven zu a) und b).

Aufgabe 2: Eine Differentialgleichung der Form $y' = f_0(x)y^\alpha + f_1(x)y$ mit gegebenen Funktionen $f_0, f_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt eine *Bernoullische Differentialgleichung*.

a) Rechnen Sie nach, daß sich eine solche Differentialgleichung durch Einführung einer neuen gesuchten Funktion $z = y^{1-\alpha}$ auf eine lineare Differentialgleichung für z zurückführen läßt.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y, \quad y(1) = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$4y' \sin x = -y(1 + y^4) + y^5 \cos x.$$

Aufgabe 4: In der linearen Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

seien die Funktionen f, g für $x \geq 0$ definiert und stetig mit

$$f(x) \geq \alpha > 0, \quad |g(x)| \leq M$$

mit festen Zahlen α, M . Zeigen Sie:

a) Für jede Lösung der homogenen Differentialgleichung gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$

b) Jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist für $x \geq 0$ beschränkt.