

Übungsaufgaben vom 3.11.2003

Aufgabe 1: Eine Aufgabe mitten aus dem fröhlichen (Studenten-)Leben. Eine gewisse Menge an Bier wird in einer stehenden kreiszylinderförmigen Tonne vom Radius r bzw. einem kruskegelstumpfförmigen Behälter mit dem Radius r am Boden und Radius $R > r$ in der Höhe $H > 0$ gelagert. In die Böden wird jeweils ein Zapfhahn mit dem gleichen Querschnitt eingeschlagen. Aus welchem Behälter ist die gleiche Menge Bier bei geöffnetem Zapfhahn schneller vollständig ausgelaufen?

Hinweis: Benutzen Sie Torricelli's Ausflußgesetz (benannt nach dem Mathematiker und Physiker Evangelista Torricelli, 1608-1647), wonach die Ausflußgeschwindigkeit v einer idealen Flüssigkeit (Bier?) durch eine nach unten gerichtete Öffnung sich proportional zur Höhe h der Flüssigkeit verhält, genauer $v = \sqrt{2Gh}$, G Gravitationskonstante. Leiten Sie daraus eine Differentialgleichung für die Flüssigkeitshöhe $h(t)$ zur Zeit t in beiden Fällen ab und diskutieren Sie diese.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x(1 - y^2 - x^2)}{y(1 + y^2 + x^2)}$$

in impliziter Form. Zeichnen Sie einige Lösungskurven!

Aufgabe 3: Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2}$$

einen Eulerschen Multiplikator λ durch einen Ansatz in der Form

$$\lambda(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

mit geeigneten α, β . Lösen Sie damit die Differentialgleichung.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie einen Eulerschen Multiplikator für eine lineare Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

und lösen Sie die zugehörige exakte Differentialgleichung.