

## Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen Serie 9

1.)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Die Lösung soll sich nach der Aufgabenstellung auch als Potenzreihe darstellen lassen:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Als nächstes  $y$  zweimal ableiten und alle Summen in die DG einsetzen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = 0$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n + \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = 0$$

Die beiden Summen-Produkte lassen sich als Cauchysche Produktreihe zusammenfassen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n (j+1) c_{j+1} a_{n-j} \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n c_j b_{n-j} \right) x^n = 0$$

Die äußeren Summen sind hier alle gleich, also Koeffizientenvergleich.

$$c_{n+2} (n+2)(n+1) + \sum_{j=0}^n (j+1) c_{j+1} a_{n-j} + \sum_{j=0}^n c_j b_{n-j} = 0$$

$$c_{n+2} (n+2)(n+1) + \sum_{l=1}^{n+1} l c_{l+1} a_{n-l+1} + \sum_{j=0}^n c_j b_{n-j} = 0$$

Das ist nun eine Rekursionsformel für  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , mit der man sukzessive die  $c_n$  bestimmen

kann. Daraus folgt, dass sich  $y(x)$  als Potenzreihe darstellen läßt.

2.)

Potenzreihenentwicklung von  $y' = x^3 + y^3$ ,  $y(0) = 1$  :

Ansatz:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad a_0 = 1, \text{ da } y(0) = 1$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} y^2(x) &= 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ &\quad + a_1x + a_1^2x^2 + a_1a_2x^3 + \dots \\ &\quad + a_2x^2 + a_1a_2x^3 + \dots \\ &\quad + a_3x^3 + \dots \\ &= 1 + 2a_1x + (a_1^2 + 2a_2)x^2 + (2a_3 + 2a_1a_2)x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^3(x) &= \dots \\ &= 1 + 3a_1x + 3(a_1^2 + a_2)x^2 + (a_3 + 4a_1a_2 + a_1^3)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 = 1 + 3a_1x + 3(a_1^2 + a_2)x^2 + (a_3 + 4a_1a_2 + a_1^3)x^3$$

$$a_1 = 1$$

$$2a_2 = 3a_1 \quad a_2 = \frac{3}{2}$$

$$3a_3 = 3(a_1^2 + a_2) \quad a_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Schließlich:

$$\underline{\underline{y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \dots}}$$

**Abschätzung Konvergenzradius:**

- Zunächst für den Fall  $0 \leq x \leq a$  :

Ich schätze nach unten ab:

$$y' = x^3 + y^3 \geq y^3 \text{ und wähle eine Unterfunktion } \tilde{y}' = \tilde{y}^3$$

$$\text{Also } \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}^3} = 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\tilde{y}^{-2} = x + c \rightarrow \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{c - 2x}}$$

Für diese muss auch die Anfangsbedingung  $\tilde{y}(0) = 1$  gelten, woraus  $c = 1$  folgt

$$\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$$

Diese Funktion hat bei  $\frac{1}{2}$  eine Singularität, d.h. sie wird unendlich. Da nun der Konvergenzradius von Potenzreihen maximal bis zur ersten Singularität der zu entwickelnden Funktion geht, folgt hieraus  $\frac{1}{2} \geq r$  .

Eine Oberfunktion zu finden ist schwieriger, ich verwende den Ansatz  $\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{1-bx}}$ .

$$\text{Also } \hat{y}' = \frac{1}{2}b \frac{1}{(1-bx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dann muss gelten:

$$x^3 + \hat{y}^2 = x^3 + \frac{1}{\sqrt[2]{(1-bx)^3}} \leq \hat{y}' = \frac{1}{2}b \frac{1}{(1-bx)^{\frac{3}{2}}}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x^3(1-bx)^{\frac{3}{2}} + 1 &\leq \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b - 1 &\geq x^3(1-bx)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (*)$$

Um hier nun den Parameter  $b$  zu finden berechne ich das Maximum von  $f(x) = x^3(1-bx)^{\frac{3}{2}}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(1-bx)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^3(1-bx)^{\frac{1}{2}}(-b) = 0 \\ \rightarrow (1-bx) - \frac{1}{2}bx &= 0 \quad \rightarrow x_E = \frac{2}{3}b \\ f(x_E) &= \left(\frac{2}{3}b\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Mit (\*) haben wir  $\frac{1}{2}b - 1 = \left(\frac{2}{3b}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ , also  $b \approx 2,014$ , wofür  $f(x)$  das Maximum annimmt, also die Abschätzung (\*) gilt und  $\hat{y}$  eine Oberfunktion ist.

Diese hat eine Singularität bei  $\frac{1}{2,014}$ , da wg.  $\hat{y} : 1-bx > 0 \rightarrow x < \frac{1}{2,014}$  sein muss.

Daraus kann man schlussfolgern, dass der Konvergenzradius größer als  $\frac{1}{2,014}$  sein muss.

- Jetzt noch der Fall  $-a \leq x \leq 0$ :

$$\hat{y} = x^3 + \hat{y}^3 < \hat{y}^3$$

Die Oberfunktion  $\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$  ist für alle  $x \leq 0$  definiert. Analog ist das für die Unterfunktion ersichtlich, d.h. in dem Fall ergibt sich keine Begrenzung des Konvergenzradius.

Bildet man nun den Durchschnitt der betrachteten vier Fälle, ergibt sich als Abschätzung der Konvergenzradius:

$$\underline{\underline{\frac{1}{2,014} \leq r \leq \frac{1}{2}}}$$

3.)

$$y' = 1 + \mathbf{m} \sin(x+y), \quad y(\mathbf{m}, 0) = 0$$

Die Differentialgleichung für  $\frac{\partial y}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{m}, \cdot)$  erhält man durch partielle Differenziation nach  $\mathbf{m}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \frac{\partial y}{\partial x}(\mathbf{m}, x) &= \sin(x+y) + \mathbf{m} \cos(x+y) \frac{\partial y}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{m}, x) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{m} \partial x} &= \left( \frac{\partial y}{\partial \mathbf{m}} \right)' = \sin(x+y) + \mathbf{m} \cos(x+y) \frac{\partial y}{\partial \mathbf{m}} \end{aligned}$$

Das ganze nochmal führt auf:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial m^2}\right)' = 2 \cos(x+y) \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right) - m \sin(x+y) \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)^2 + y \cos(x+y) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial m^2}\right)$$

Tja, und beim Lösen der beiden guck ich wie ein Schwein ins Uhrwerk...

Sie lassen sich aber auf jeden Fall für  $m=0$  lösen. Fehler in der Aufgabenstellung?

Für  $m=0$  komme ich bei der ersten DG auf  $\frac{\partial y}{\partial m}(x,0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$  und bei der zweiten auf

$$\frac{\partial^2 y}{\partial m^2}(x,0) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x.$$

4.)

a)

Die Behauptung folgt für den Fall  $-a < y < a$  sofort daraus, dass  $f(x, y)$  stetig und beschränkt ist.

Falls nun  $y$  größer als  $a$  werden sollte, so ist nach Voraussetzung der Anstieg  $y' = f(x, y) < 0$ , d.h.

die Funktion fällt sofort wieder. Analog gilt: wird  $y$  kleiner als  $-a$ , ist der Anstieg positiv.

Dadurch existiert durch elementare Integration für alle  $x$  eine Lösung der DG.